**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА**

При решении задач по теме «Геометрические неравенства» находят применение замечательные неравенства, связывающие различные «средние» нескольких положительных чисел:

– среднее арифметическое,

– среднее геометрическое,

– среднее квадратичное,

– среднее гармоническое чисел *a*, *b*, *c*

(есть среднее арифметическое чисел ).

Докажем, что для любых положительных чисел a, b, c имеют место неравенства

,

где равенство достигается только тогда, когда *a=b=c*. (Аналогичные неравенства справедливы для любых *n* положительных чисел.)

Неравенство равносильно неравенству

,

которое вытекает из очевидного неравенства

.

Точно так же доказывается неравенство

.

Получаем цепочку неравенств:

,

которые обращаются в неравенства только в случае, если.

Чтобы убедиться в справедливости неравенства

,

положим:. Тогда доказываемое неравенство приводится к виду

.

Многочлен, стоящий в левой части неравенства, разложим на множители:

.

Учитывая, что и , получаем:.

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда, что для исходного неравенства равносильно условию .

Итак, неравенство доказано. Применив его к числам, получим неравенство. Таким образом,

.

Заметим, что отсюда вытекает еще одно неравенство

,

которое в дальнейшем находит применение. Равенство здесь также имеет место лишь при .

Для доказательства геометрических неравенств, касающихся треугольника, кроме числовых неравенств, применяются теорема косинусов и формулы, выражающие элементы треугольника через его стороны или через радиус описанной окружности и углы. Любое неравенство между линейными элементами треугольника можно свести к неравенству, связывающему тригонометрические функции углов треугольника. Таким образом, решение задач на доказательство геометрических неравенств требует умения применять разнообразные сведения из различных разделов математики. Рассмотрим некоторые приемы доказательства неравенств на конкретных примерах.

*Пример 1*. Доказать, что в любом треугольнике диаметр вписанной окружности не более радиуса описанной окружности: *2r⩽R*.

*Решение 1*. Выразим *r* и *R* через стороны и площадь треугольника:

, .

Имеем: .

В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел

.

Аналогично .

Следовательно, .

*Решение 2*. Воспользуемся формулой

*.*

Задача сводится к доказательству неравенства

.

По теореме косинусов имеем:

*.*

Отсюда получаем .

Следовательно, , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда .

*Решение 3*. Известна формула, выражающая расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника: . Отсюда немедленно вытекает неравенство *,* поэтому .

Равенство имеет место только тогда, когда центры вписанной и описанной окружностей совпадают, т. е. в случае равностороннего треугольника.

*Пример 2*. Доказать, что для любого треугольника *ABC* имеют место неравенства:

1. ;
2. ;
3. ,

причем неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда треугольник *ABC* равносторонний.

*Решение*. В силу формулы неравенство 1 равносильно неравенству .

Приведем тригонометрическое доказательство неравенства 1.

Для любого треугольника *ABC* справедливо тождество

.

Следовательно, достаточно доказать, что

.

Не нарушая общности, можно считать, что . Преобразуем произведение двух косинусов в сумму. Учитывая, что

, получаем:

*.*

Ясно, что равенство достигается только тогда, когда и

, т. е. и .

Значит, равенство имеет место только для равностороннего треугольника *ABC*.

Используя неравенство 1 и неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным трех положительных чисел, получаем:

.

Наконец, в силу неравенства и неравенства 2 получаем:

.

**Задачи**

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC* справедливо неравенство .

*Решение*. Имеем .

Но .

Следовательно, , причем равенство имеет место тоько при b=c.

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC* имеют место неравенства:
2. ;
3. .

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

1) *Решение.* Воспользуемся формулой .

Поскольку , то .

Учитывая, что , получим: .

Равенство имеет место только при b=c.

2) *Решение*. Применив неравенство , получим:

.

Неравенство обращается в равенство при b=c.

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC*

.

*Решение.* Воспользуемся равенством

.

Заменив , получим , откуда , где равенство имеет место лишь при b=c.

Приведем геометрическое доказательство второго неравенства , представляющее собой усиление неравенства .

Продолжим биссектрису *AD* треугольника *ABC* до пересечения с описанной окружностью в точке *E*. Проведем диаметр *EM* и обозначим через *N* точку пересечения его со стороной *BC*. Так как *E* – середина дуги *BC*, то

, и .

Заметим, что и , поэтому

.

Итак, , т.е. , или , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда точки *A* и *M* совпадают, т.е. когда b=c.

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC* имеют место неравенства

*.*

В каком случае каждое их этих неравенств обращаются в равенство?

*Указание*. Для доказательства геометрических неравенств воспользуйтесь формулами:

;

и числовыми неравенствами, приведенными в начале данной темы.

В частности, для доказательства неравенства воспользуйтесь тождеством и неравенством

.

Аналогичным образом докажите, что

.

Во всех случаях равенство имеет место только для равностороннего треугольника.

1. Докажите, что если , то и, обратно, если , то .

*Указание*. Воспользуйтесь формулой .

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC* имеют место неравенства .

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

*Указание*. Установите, что

1. Докажите, что если , то .

*Указание*. Пусть и – медианы треугольника *ABC*. Докажите, что если , то . Для этого около треугольника опишите окружность. Точку пересечения окружности с прямой , отличную от , обозначьте через *D*. В треугольнике *ABC* угол *A* больше угла *B*, поэтому точка будет лежать между точками и *D*. Обозначьте , , тогда .

Далее, к треугольникам и примените следующую формулу . Из полученных соотношений

,

выведите, что .

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC*

*,*

причем каждое из этих неравенств обращается в равенство только для равностороннего треугольника.

*Указание*. Воспользуйтесь неравенствами задачи 4:

.

1. а) Докажите, что из всех треугольников данного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

б) Докажите, что из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

1. Докажите, что для любого треугольника *ABC*

,

где равенство имеет место лишь в том случае, когда .

*Решение*. Воспользуемся формулой . Тогда имеем:

.

Применим неравенства задачи 4:

, .

Следовательно, .

Равенство имеет место только при .

1. а) Докажите, что если стороны треугольника *ABC* удовлетворяют равенству, то .

б) Стороны треугольника *ABC* связаны соотношением, где

. Докажите, что .

б) *Решение*.

1. Докажите, что если , то .

Указание. Воспользуйтесь неравенством и формулой

.

1. Докажите, что если, то .
2. Докажите, что для углов любого треугольника *ABC* имеют место

зависимости:

1) ;

2) ;

3) .

В каком случае каждое их этих неравенств обращаются в равенство?

1) *Решение 1*. Сначала понизим степень синуса, пользуясь формулой . Получим:

.

Выполним дальнейшие преобразования. Учитывая, что

,

имеем:

.

Следовательно, .

Попутно мы получили тождество

.

Теперь докажем истинность неравенства

.

Так как , то

.

Равенство достигается только при , т.е. для равностороннего треугольника.

*Решение* *2*. Докажем истинность неравенства

.

Не нарушая общности, можно считать, что .

Тогда имеем:

.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда , т. е. когда треугольник *ABC* равносторонний.

Доказываемые неравенства справедливы в силу тождеств, полученных в решении 1.

*Решение* *3*. Воспользуемся формулой:

.

В силу формулы сразу получаем:

.

*Решение* *4*. Если *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, то вектор является нулевым только для равностороннего треугольника.

Имеем .

Так как , и , то после возведения в квадрат получим:

,

или .

Использовав формулу , полученное неравенство приведем к виду .

2) *Указание*. Воспользуйтесь неравенством и формулой

.

Доказываемые неравенства можно вывести также из соотношений

,

имеющих место для любого треугольника, в частности для треугольника с углами , , . Выполнив соответствующую подстановку, получим:

.

1. *Указание*. Воспользуйтесь неравенством (см. задачу 4) и формулой .
2. Докажите, что для углов любого треугольника *ABC* имеют место

неравенства

В каком случае каждое их этих неравенств обращаются в равенство?

*Решение*. Воспользуемся соотношениями

,

,

,

вытекающими из теоремы косинусов.

Из первого равенства находим .

Выразив таким же образом и , сложим эти равенства почленно:

.

Аналогично, используя два следующих соотношения, получаем:

,

.

В силу того что для любых положительных чисел a, b, c имеют место неравенства

,

приходим к неравенствам

.

Далее, используя результат задачи 10, получаем:

.

Применим это неравенство к треугольнику с углами , , и получим:

.

Остается доказать тождество

.

Так как полусумма углов треугольника равна , то , или .

Отсюда и вытекает доказываемое равенство.

Легко проверить, что все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда *ABC* – равносторонний треугольник.

1. Докажите, что для углов остроугольного треугольника *ABC*

справедливы неравенства

.

*Указание*. Примените неравенства

к треугольнику с углами , , (такой треугольник существует при условии, что *A*, *B* , *C* - острые углы).

1. Докажите, что для всякого треугольника *ABC*

,

Где равенство имеет место, лишь если треугольник *ABC* равносторонний.

*Решение* *1*. Доказываемое неравенство вытекает из соотношений

(см. решение задачи 15).

*Решение* *2*. Воспользуемся неравенством задачи 4:

.

Учитывая, что , , , получим

.

Остается воспользоваться тождеством, приведенным в решении 1.

*Решение* *3*. В силу тождества

,

доказанного в решении задачи 15, имеем:

.

Применив неравенство , справедливое для любых положительных чисел x,y , z, получим:

.

Далее так же, как в решении 2.

1. Докажите, что для углов треугольника *ABC* и любых положительных чисел x, y,z справедливо неравенство

.

При каком условии достигается равенство?

*Решение* *1*. Пусть *ABC* – данный треугольник. На лучах *BC*, *CA*, *AB* построим точки *X*, *Y*, *Z* такие, что *BX=x*, *CY=y*, *AZ=z*. Воспользуемся неравенством

.

Поскольку и точно так же для углов между векторами и , и , то после возведения в квадрат левой части неравенства получим:

.

Выясним, при каком условии это неравенство обращается в равенство. Складывая векторы , , , по правилу многоугольника, получим ломаную, которая будет замкнутой тогда и только тогда, когда

. При этом получится треугольник, углы которого соответственно равны углам треугольника *ABC*, т. е. треугольник, подобный треугольнику *ABC*. Итак, равенство имеет место тогда и только тогда, когда *x*, *y*, *z* - длины сторон треугольника с углами *A*, *B*, *C* т. е. при условии, что выполняется равенство .

*Решение* *2*. Легко проверить, что если , то имеет место тождество

,

из которого и вытекает доказываемое неравенство.

Равенство

имеет место тогда и только тогда, когда

и ,

т. е. когда *x*, *y*, *z* - длины сторон треугольника с углами , , .

1. Докажите, что для любой точки *O*, лежащей внутри треугольника *ABC* с периметром  *2p*, справедливо неравенство

.

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

*Решение*. Обозначим , , . Тогда имеем:

.

Поскольку и две другие суммы преобразуются аналогичным образом, то

.

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда , , , т. е. когда точка *O* является центром окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

1. Расстояния от произвольной внутренней точки *O* треугольника до его вершин A, B и C равны соответственно ,,; расстояния до его сторон BC, CA, AB равны , , . Докажите, что, где равенство имеет место только для равностороннего треугольника и его центра (неравенство Эрдеша - Морделла).

*Решение*. В треугольниках *BOC*, *COA* и *AOB* высоты, проведенные из точки *O*, равны соответственно , и . Обозначим , , . В силу задачи 2 и неравенства имеем:

, , .

Остается доказать, что

.

Положим , , . Тогда получим:

,

где . Мы пришли к неравенству, доказанному ранее

(см. задачу 18).

Равенство достигается лишь тогда, когда и , т. е. лишь для равностороннего треугольника *ABC* и его центра *O*.