**Модуль. Свойства модуля**

*Определение.* *Модуль числа * или *абсолютная величина числа * равна , если  больше или равно нулю и равна , если  меньше нуля:



Из определения следует, что для любого действительного числа , 

**Теорема**  *Абсолютная величина действительного числа  равна большему из двух чисел  или .*

1. Если число  положительно, то  отрицательно, т. е. . Отсюда следует, что .

В этом случае , т. е.  совпадает с большим из двух чисел  и 

2. Если  отрицательно, тогда  положительно и , т. е. большим числом является . По определению, в этом случае,  --- снова, равно большему из двух чисел  и 

**Следствие**  *Из теоремы следует, что .*

В самом деле, как , так и  равны большему из чисел  и , а значит, равны между собой.

**Следствие**  *Для любого действительного числа  справедливы неравенства , .*

Умножая второе равенство  на  (при этом знак неравенства изменится на противоположный), мы получим следующие неравенства: ,  справедливые для любого действительного числа . Объединяя последние два неравенства в одно, получаем: .

**Теорема**  *Абсолютная величина любого действительного числа  равна арифметическому квадратному корню из : .*

В самом деле, если , то, по определению модуля числа, будем иметь . С другой стороны, при , , значит .

Если , тогда  и  и в этом случае .

Эта теорема дает возможность при решении некоторых задач заменять  на .

Геометрически  означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число , до начала отсчета.

Если , то на координатной прямой существует две точки  и , равноудаленной от нуля, модули которых равны.

Если , то на координатной прямой  изображается точкой .

**Свойства модуля**



Из этого свойства следует, что ; .































**Вариант приведения одного отношения к равносильному ему отношению другого типа**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| < |  |  |  |  |  |  |  | > |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

К простейшим (не обязательно простым) неравенствам мы будем относить неравенства, решаемые одним из нижеприведенных равносильных переходов:





**Условие**  *Решим неравенство .*

**Решение.**

.

*Ответ.* .

**Условие**  *Решим неравенство .*

**Решение.**



*Ответ.* .

Как ни странно, но  достаточно, чтобы избавиться от знака модуля в любых неравенствах.

**Условие**  *Решить неравенство*



**Решение.**







*Ответ.* .

**Условие**  *Решить неравенство*



**Решение.** Относительно любого модуля данное неравенство имеет вид . Поэтому перебрав все комбинации знаков двух подмодульных выражений, имеем





*Ответ.* .

**Условие**  *При каких значениях параметра  неравенство*



выполняется при всех значениях ?

**Решение.** Исходное уравнение равносильно системе:



Выполнение для всех  исходного неравенства равносильно выполнению для  всех неравенств последней системы. А это равносильно тому, что дискриминанты всех четырёх квадратных трёхчленов неположительны: 

*Ответ.* .

**Условие**  *Найти все значения параметра , при каждом из которых число целочисленных решений неравенства*



максимально.

**Решение.** Так как  то исходное уравнение равносильно системе:



Поскольку оба неравенства в системе линейны относительно . Решим систему относительно :



Условия существования параметра  равносильно требованию







Неравенство объявляет все значения , которые могут быть решением исходного неравенства хотя бы при одном значении параметра. Следовательно, целочисленными решениями исходного неравенства могут быть только целые числа из промежутка , то есть



Естественно, что для любого целого числа из набора надо выяснить, при каких значениях параметра  это число будет решением исходного неравенства.

Поскольку исходное неравенство равносильно, то поочерёдно подставляя числа из набора в неравенства, мы сразу и найдём все соответствующие значения параметра. Имеем



Чтобы выявить значения параметра, при которых исходное неравенство имеет максимальное число целочисленных решений, воспользуемся ``разверткой'', полученной информации вдоль от параметра:



Очевидно, что максимальное количество целочисленных решений равно трём, и это достигается, когда  или .

*Ответ.* .

Геометрический смысл выражения  --- длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами  и . Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

**Условие**  *Решить неравенство .*

**Решение.** Изобразим на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек  и  в точности равна . Это все точки отрезка . Для всех чисел вне данного отрезка сумма расстояний будет больше двух.

*Ответ.* .

*Замечание.* Обобщением решения вышеприведенных уравнений являются следующие равносильные переходы:



**Условие**  *Решите неравенство: .*

**Решение.** Решим неравенство, используя координатную прямую. Данное неравенство выполняется для всех точек c координатой , которые находятся ближе к точке с координатой , чем к точке с координатой . Так как , то искомыми являются все точки, расположенные левее точки с координатой .

*Ответ.* .

**Условие**  *Дана функция: .*

а) Решите уравнение ;

б) Решите неравенство ;

в) Найдите количество решений уравнения  в зависимости от значений параметра .

**Решение.** Построим график функции . Для этого заметим, что , а тогда мы можем сначала построить график функции , и затем отразить его относительно оси ординат. Преобразуем выражение, задающее функцию :



Поскольку данная система определяет верхнюю полуокружность радиуса 2 с центром в точке (2; 0), график исходной функции представляет собой объединение двух полуокружностей (см. рис. ).



Теперь решение задач не представляет труда:

а) Корень уравнения есть абсцисса точки пересечения прямой  с графиком функции . Найдем ее геометрически: заштрихованный на рисунке прямоугольный треугольник является равнобедренным (угловой коэффициент прямой равен ), его гипотенуза есть радиус окружности, ее длина 2. Тогда длина катета, лежащего на оси абсцисс, есть , а искомая абсцисса равна .

б) Неравенство  выполнено при всех  из отрезка .

в) При ,  решений нет, при  уравнение  имеет три решения, при  --- четыре решения, при  --- два решения.

**Условие**  *Решить неравенство*



**Решение.** Воспользуемся теоремой:



Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель на множители и решим полученное рациональное неравенство.



*Ответ.* 

Применение метода интервалов основано на следующей

**Теорема**  *Функция, непрерывная на промежутке и необращающаяся на нем в нуль, сохраняет на этом промежутке свой знак.*

Это означает, что нули функции и границы промежутков ее непрерывности разделяют область определения функции на участки, где она сохраняет постоянный знак. Применение метода поясним на примере.

**Условие**  *Решим неравенство*



Пусть . Областью определения данной функции есть . Решая уравнение, получим, что функция  не обращается в нуль ни при каком значении переменной. Это означает, что на всей области определения функция является знакопостоянной. Вычисляя, например, , получаем, что функция принимает только положительные значения.

*Ответ.* .

Метод интервалов позволяет решать более сложные неравенства с модулями, но в этом случае он имеет несколько иное назначение. Суть состоит в слудующем. Находим корни всех подмодульных выражений и разбиваем числовую ось на промежутки знакопостоянства этих выражений. Это позволяет, последовательно перебирая эти промежутки, одновременно избавляться от всех модулей и решать обычное уравнение или неравенство (проверяя при этом, что найденный ответ входит в данный промежуток).

**Условие**  *Решить неравенство*



**Решение.** ``Ловушка'' заключается в том, что в задаче имеется несколько модулей, раскрывать которые -- значит получить, громоздкое решение. Умножим дробь на некоторое выражение, принимающее лишь положительные значения и такое, чтобы упростить исходное неравенство:







*Ответ.* .

**Условие**  *Решите систему неравенств*



**Решение.** Предположим, что данная система неравенств имеет решение , , , . Тогда, в частности, , т. е.



Аналогично получаем







Перемножим все полученные неравенства. С одной стороны, произведение четырёх положительных чисел положительно. С другой стороны, это произведение равно ---



Приходим к противоречию.

*Ответ.* Система не имеет решений.

**Условие**  *Существуют ли действительные числа ,  и  такие, что при всех действительных  и  выполняется неравенство*



**Решение.** Предположим, что такие числа ,  и  существуют. Выберем  и  такие, что , , . Тогда разность между левой и правой частями равна . А если взять  и  такие, что , , , то эта разность будет равна . Таким образом, с одной стороны, , с другой . Противоречие.

*Ответ.* Нет.

**Условие**  *Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство ?*

**Решение.** При натуральном  уравнение  имеет ровно  целочисленных решений, а при  решение единственно. Таким образом, количество решений исходного неравенства равно .

*Ответ.* 19801.

**Условие**  *Все значения квадратного трёхчлена  на отрезке  по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина ?*

*Ответ.* Максимальное значение величины  равно 17.

Докажем это. Сначала докажем, что эта величина не может быть больше 17. Так как значения трёхчлена  на отрезке  по модулю не превосходят единицы, то , , , то есть , , . Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то





Следовательно, . Осталось заметить, что квадратный трёхчлен  удовлетворяет условию задачи и для него величина  равна 17.

**Условие**

Докажите, что если для чисел *a*, *b* и *c* выполняются неравенства | *a* - *b*|$ \ge$| *c*|, | *b* - *c*|$ \ge$| *a*|, | *c* - *a*|$ \ge$| *b*|, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

**Первый способ.**Предположим, сначала, что одно из чисел равно нулю. Пусть, например, *a* = 0 (остальные случаи аналогичны). Тогда получим неравенства: | *b*|$ \ge$| *c*| и | *c*|$ \ge$| *b*|, откуда | *b*| = | *c*|, т. е. *b* = *c* или *b* = - *c*. В первом случае *b* = *a* + *c*, во втором *a* = *b* + *c*. Все доказано.

Пусть теперь ни одно из чисел *a*, *b* и *c* не равно нулю. Без ограничения общности можно считать, что число *a* — максимальное по модулю среди чисел *a*, *b* и *c* (т. е. | *a*|$ \ge$| *b*|, | *a*|$ \ge$| *c*|). Также можно считать, что *a*> 0 (в противном случае произведем замену: *a* = - *a*1, *b* = - *b*1, *c* = - *c*1). Тогда | *a*| = *a*, | *a* - *b*| = *a* - *b*, | *a* - *c*| = *a* - *c*.

При этих предположениях из неравенства | *b* - *c*|$ \ge$| *a*| следует, что числа *b* и *c* не могут иметь одинаковых знаков (подумайте, почему).

Возможны два случая.

1o. *b* > 0, *c* < 0. Тогда | *b*| = *b*, | *c*| = - *c* и | *b* - *c*| = *b* - *c*, так что мы получаем неравенства *a* - *b*$ \ge$ - *c*, *b* - *c*$ \ge$*a*, *a* - *c*$ \ge$*b*. Из первого неравенства следует, что *b*$ \le$*a* + *c*, из второго — что *b*$ \ge$*a* + *c*, значит, *b* = *a* + *c*.

2o. *b* < 0, *c* > 0. Тогда, аналогично предыдущему случаю, получим неравенства *a* - *b*$ \ge$*c*, *c* - *b*$ \ge$*a*, *a* - *c*$ \ge$ - *b*. Следовательно, в этом случае одновременно выполняются неравенства *c*$ \ge$*a* + *b*, *c*$ \le$*a* + *b*, т. е. *c* = *a* + *b*. Таким образом, в обоих случаях утверждение доказано.

**Второй способ.**Возведем неравенство | *a* - *b*|$ \ge$| *c*| в квадрат и перенесем все члены в левую часть, получим (*a* - *b*)2 - *c*2$ \ge$ 0. Разложив левую часть на множители по формуле разности квадратов, получим: (*a* - *b* - *c*)(*a* - *b* + *c*)$ \ge$ 0, или, что то же самое,

(*a* - *b* - *c*)(*b* - *c* - *a*)$\displaystyle \le$0.

Аналогично получаем, что произведения (*b* - *c* - *a*)(*c* - *a* - *b*) и (*c* - *a* - *b*)(*a* - *b* - *c*) также не положительны.

Умножая эти произведения находим, что

(*a* - *b* - *c*)2(*b* - *c* - *a*)2(*c* - *a* - *b*)2$\displaystyle \le$0.

Мы видим, что произведение неотрицательных чисел не превосходит 0, значит, одно из этих чисел равно 0, откуда следует требуемое утверждение.

**Условие**

Бесконечная последовательность чисел *x*n определяется условиями: *x*n + 1 = 1 - | 1 - 2*x*n|, причем 0$ \le$*x*1$ \le$1. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, если *x*1 рационально.

**Решение**

  а) Если 0$ \le$*x*n$ \le$1, то 0$ \le$*x*n + 1$ \le$1. Действительно,

0$\displaystyle \le$*x*n$\displaystyle \le$1  $\displaystyle \Rightarrow$   - 1$\displaystyle \le$1 - 2*x*n$\displaystyle \le$1  $\displaystyle \Rightarrow$   
$\displaystyle \Rightarrow$  0$\displaystyle \le$| 1 - 2*x*n|$\displaystyle \le$1  $\displaystyle \Rightarrow$  0$\displaystyle \le$*x*n + 1$\displaystyle \le$1.

Если *x*n рациональное, то *x*n + 1 рациональное, причем со знаменателем не большим чем у *x*n. Действительно, пусть *x*n = $ {\frac{p_n}{q_n}}$ — несократимая дробь. Тогда

*x*n + 1 = 1 - $\displaystyle \left\vert\vphantom{\frac{q_n-2p_n}{q_n}}\right.$$\displaystyle {\frac{q_n-2p_n}{q_n}}$$\displaystyle \left.\vphantom{\frac{q_n-2p_n}{q_n}}\right\vert$ = $\displaystyle {\frac{q_n- \vert q_n-2p_n\vert}{q_n}}$.

Если эта дробь несократима, то ее знаменатель такой же, как и у *x*n, если она сократима, то после сокращения знаменатель уменьшится.

Итак, все члены последовательности — рациональные числа, заключенные между 0 и 1, т. е. правильные дроби. Но правильных дробей со знаменателями, не большими заданной величины *q*, — конечное число. Поэтому какие-то члены последовательности повторятся, и с этого момента последовательность будет периодической.

б) **Первый случай.** Раскрывая модуль в *x*n + 1 = 1 - | 1 - 2*x*n|, получим либо *x*n + 1 = 2*x*n, либо *x*n + 1 = 2 - 2*x*n. Поэтому *x*n + 1 = *a*1 + 2*b*1*x*n, где *a*1 — целое число, *b*1 = ±1. Аналогично, *x*n + 2 = *a*2 + 4*b*2*x*n. Продолжая этот процесс, получим, что

*x*n + k = *a*k + 2k*b*k*x*n,

где *a*k — целое число, *b*k = ±1.

Допустим, что *x*n + k = *x*n. Тогда *x*n — решение линейного уравнения с целыми коэффициентами *a*k + 2k*b*k*x*n = *x*n. Это уравнение имеет единственное решение, так как 2k*b*k = ±2k$ \ne$1. Это решение рационально, так что *x*n — рациональное число. Но тогда *x*n - 1 — рациональное число, *x*n - 2 — рациональное число и т. д. Значит, *x*1 — тоже рациональное число.

**Второй случай.** Запишем число *x*1 в двоичной системе счисления:

*x*n = 0, *a*1*a*2*a*3...

Если *a*1 = 0, то двоичная запись числа *x*n + 1 получается из двоичной записи числа *x*n сдвигом (проверьте!):

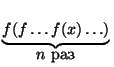
*x*n + 1 = 0, *a*2*a*3*a*4...

Если же *a*1 = 1, то двоичная запись числа *x*n + 1 получается из двоичной записи числа *x*n сдвигом с заменой всех единиц на нули, а нулей — на единицы (назовем это инверсией). Докажем, что если *x*n периодична, то *a*n тоже периодична. Если *x*n + k = *x*n и между ними произошло четное число инверсий, то *a*n + k = *a*n. Если между *x*n и *x*n + k произошло нечетное число инверсий, то *a*n + 2k= 1 - *a*n + k = *a*n. В обоих случаях *a*n периодична. Но число, двоичная запись которого периодична, — рационально.

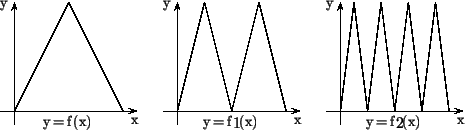
Комментарии. 1o. Заметим, что функция *y* = *f* (*x*) = 1 - | 1 - 2*x*| линейна на каждом из отрезков [0;1/2] и [1/2;1]:

*y* = ![$\displaystyle \left\{\vphantom{
2x\hbox{ при }0\le x\le1/2,\\
2-2x\hbox{ при }1/2\le x\le 1.
}\right.$](data:image/gif;base64,R0lGODlhDgAfAOMAAKenp4+Pj2tra19fX7KyslRUVEhISDw8PDAwMCQkJAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAACH5BAEAAAQALAAAAAAOAB8AQAQ3kMhJKy3IWqy7nwIidAOCAF+qrh2XGlnqfkXC3niuS0OC0jHgJ1ALqA4H1cyz7AAKh9FuSmVFAAA7)2*x*при0$\displaystyle \le$*x*$\displaystyle \le$1/2,   
2 - 2*x*при1/2$\displaystyle \le$*x*$\displaystyle \le$1.

Аналогично, функция

*y* = *f*n(*x*) = ,

переводящая *x*1 в *x*n, линейна на каждом из отрезков [*t*]$ \left[\vphantom{\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}}\right.$$ {\frac{k}{2^n}}$;$ {\frac{k+1}{2^n}}$$ \left.\vphantom{\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}}\right]$. Графики функций *y* = *f* (*x*), *y* = *f*2(*x*), *y* = *f*3(*x*) показаны на (рис.).



2o. Для каждого *T* = 2, 3,... существует по крайней мере одна точка с периодом *T* — это, например, абсцисса последней точки пересечения отрезка *y* = *x*, 0$ \le$*x*$ \le$1, с графиком функции *y* = *f*T(*x*), *x*1 = 2T/(2T + 1).

Подумайте над вопросом: сколько существует периодических траекторий для каждого периода *T* (или, что почти то же самое, — точек *x*, для которых *x* = *f*T(*x*), причем *x*$ \ne$*f*k(*x*), если *k* < *T*)?

3o. Задача возникла из символической динамики. Функция *f* (*x*) = 1 - | 1 - 2*x*| называется "палаточным отображением".

**Условие**

Докажите, что

| *x*| + | *y*| + | *z*|$\displaystyle \le$| *x* + *y* - *z*| + | *x* - *y* + *z*| + |-*x* + *y* + *z*|,

где *x*, *y*, *z* — действительные числа.

**Решение**

  Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей (см. комментарий), имеем:

| *x* + *y* - *z*| + | *x* - *y* + *z*|$\displaystyle \ge$|(*x* + *y* - *z*) + (*x* - *y* + *z*)| = 2| *x*|.

Аналогично получаются неравенства

| *x* - *y* + *z*| + | - *x* + *y* + *z*| $\displaystyle \ge$2| *z*|,   
| - *x* + *y* + *z*| + | *x* + *y* - *z*| $\displaystyle \ge$2| *y*|.

Сложив все три неравенства и разделив получившееся неравенство на 2, получим требуемое неравенство.

Комментарий. Неравенство | *x* + *y*|$ \le$| *x*| + | *y*| можно доказать разбором случаев. Приведем элегантное доказательство. Так как обе части неравенства неотрицательны, их можно возвести в квадрат, и неравенство заменится на равносильное. То есть достаточно доказать, что

| *x* + *y*|2$\displaystyle \le$(| *x*| + | *y*|)2.

Пользуясь тем, что для любого *a* выполняется равенство | *a*|2 = *a*2 и раскрывая скобки, приходим к неравенству:

*x*2 + 2*xy* + *y*2$\displaystyle \le$*x*2 + 2| *x*| | *y*| + *y*2.

Но это очевидно.

Заметим, также, что неравенство верно и для векторов. Доказательство сохраняется с небольшими изменениями. На плоскости это неравенство равносильно неравенству треугольника.

**Условие**

По окружности стоит 6 чисел; каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1.

a) Найдите набор чисел, удовлетворяющий данному условию.

б) Сколько различных таких наборов существует? Решения, получающиеся друг из друга поворотом окружности, считаются одинаковыми.

**Решение**

Поскольку каждое из выписанных чисел равно модулю разности двух других, а модуль любой величины всегда неотрицателен, то все числа должны быть неотрицательны. Пусть наибольшее из них равно x. Два следующих за ним числа должны быть не больше x и различаться на x. Это возможно лишь в случае, когда одно из них равно x, а другое — нулю. Итак, в каком-то месте должны стоять либо числа x, x, 0, либо числа x, 0, x. Двигаясь по окружности против часовой стрелки, мы однозначно восстановим остальные числа. В обоих случаях получается один и тот же набор — x, x, 0, x, x, 0. Из условия, что сумма всех чисел равна 1, находим x = ¼.

**Условие**

Решить уравнение:

| *x* + 1| - | *x*| + 3| *x* - 1| - 2| *x* - 2| = *x* + 2.

**Решение**

**Ответ:** *x* = - 2 или *x*$ \ge$2. Если *x*$ \ge$2, получаем тождество. Если 1$ \le$*x* < 2, получаем уравнение 4*x* = 8, которое не имеет корней на данном интервале. Если 0$ \le$*x* < 1, получаем уравнение -2*x* = 2, которое не имеет корней на данном интервале. Если -1$ \le$*x* < 0, получаем 0 = 2, чего не может быть. Если *x* < - 1, получаем корень *x* = - 2.

**Условие**

Докажите, что

$\displaystyle \left\vert\vphantom{ \frac{x-y}{1-xy}}\right.$$\displaystyle {\frac{x-y}{1-xy}}$$\displaystyle \left.\vphantom{ \frac{x-y}{1-xy}}\right\vert$ < 1,

если | *x*| < 1 и | *y*| < 1.

**Решение**

По условию 1 - *x* > 0, 1 + *x* > 0, 1 - *y* > 0 и 1 + *y* > 0. Поэтому (1 - *x*)(1 + *y*) > 0 и (1 + *x*)(1 - *y*) > 0, т.е. 1 - *x* + *y* - *xy* > 0 и 1 + *x* - *y* - *xy* > 0. Следовательно, 1 - *xy* > *x* - *y* и 1 - *xy* > *y* - *x*. Кроме того, 1 - *xy* = | 1 - *xy*|.

**Условие**

Докажите, что ни для каких чисел *x*, *y*, *t* не могут одновременно выполняться три неравенства: |*x*| < |*y* − *t*|, |*y*| < |*t* − *x*|, |*t*| < |*x* − *y*|.

**Решение**

Предположим, что указанные неравенства имеют место. Возведём почленно в квадрат каждое неравенство, перенесём влево все правые части и разложим на множители полученные разности квадратов. Получим:

(*x* − *y* + *t*)(*x* + *y* − *t*) < 0,  
(*y* − *t* + *x*)(*y* + *t* − *x*) < 0,  
(*t* − *x* + *y*)(*t* + *x* − *y*) < 0.

Перемножив почленно все эти неравенства, получаем противоречие:

((*x* − *y* + *t*)(*x* + *y* − *t*)(*y* + *t* − *x*))2 < 0.

**Условие**

Все значения квадратного трёхчлена *ax*2 + *bx* + *c* на отрезке [0, 1] по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина |*a*| + |*b*| + |*c*|?

**Решение**

**Ответ:** максимальное значение величины |*a*| + |*b*| + |*c*| равно 17.  
Докажем это. Сначала докажем, что эта величина не может быть больше 17. Так как значения трёхчлена *f* (*x*) = *ax*2 + *bx* + *c* на отрезке [0, 1] по модулю не превосходят единицы, то |*f* (0)| ≤ 1, |*f* ($ {\frac{1}{2}}$)| ≤ 1, |*f* (1)| ≤ 1, то есть |*c*| ≤ 1, |*a* + 2*b* + 4*c*| ≤ 4, |*a* + *b* + *c*| ≤ 1. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

|*a*| = |2(*a* + *b* + *c*) − (*a* + 2*b* + 4*c*) + 2*c*| ≤ 2|*a* + *b* + *c*| + |*a* + 2*b* + 4*c*| + 2|*c*| ≤ 8,  
|*b*| = |(*a* + 2*b* + 4*c*) − 3*c* − (*a* + *b* + *c*)| ≤ |*a* + 2*b* + 4*c*| + 3|*c*| + |*a* + *b* + *c*| ≤ 8.

Следовательно, |*a*| + |*b*| + |*c*| ≤ 8 + 8 + 1 = 17. Осталось заметить, что квадратный трёхчлен 8*x*2 − 8*x* + 1 удовлетворяет условию задачи и для него величина |*a*| + |*b*| + |*c*| равна 17.

**Условие**

Докажите, что если *a* + *b* + *c* + *d* > 0, *a* > *c*, *b* > *d*, то | *a* + *b*| > | *c* + *d*|.

**Решение**

Так как *a* > *c* и *b* > *d*, то *a* + *b* > *c* + *d*. Кроме того, *a* + *b* > − (*c* + *d* ). Следовательно, |*a* + *b*| ≥ *a* + *b* ≥ max(*c* + *d*, −(*c* + *d* )) = |*c* + *d*|, ч. т. д.

### Условие

На отрезке [0,1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d.   
Докажите, что найдётcя точка x, принадлежащая [0,1], такая, что   
(1/|x-a|)+(1/|x-b|)+(1/|x-c|)+(1/|x-d|)<40.

**Решение**

Точки *a*, *b*, *c*, *d* делят отрезок [0, 1] не более чем на пять частей; хотя бы одна из этих частей является интервалом длины не меньше 0,2. Возьмём за *x* центр этого интервала. Расстояние от *x* до концов этого интервала не меньше 0,1, а до других точек из числа *a*, *b*, *c*, *d* — больше 0,1. Поэтому два из чисел |*x* – *a*|, |*x* – *b*|, |*x* – *c*|, |*x* – *d*| не меньше 0,1, а остальные два строго больше 0,1. Так что все обратные величины не больше 10, а две из них строго меньше 10. Тогда сумма обратных величин меньше 40, что и требуется.

**Условие**  *В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту меньше 100 м. Докажите, что этот лес можно огородить забором длиной 200 м.*

**Решение.** Пусть деревья высотой  растут в точках . Тогда по условию . Следовательно, длина ломаной  не превосходит м. Эту ломаную можно огородить забором, длина которого не превосходит 200 м.



**Условие**  *На отрезке  числовой оси расположены четыре точки: , , , . Докажите, что найдётcя точка , принадлежащая , такая, что .*

**Решение.** Точки , , ,  делят отрезок  не более чем на пять частей; хотя бы одна из этих частей является интервалом длины не меньше . Возьмём за  центр этого интервала. Расстояние от  до концов этого интервала не меньше , а до других точек из числа , , ,  --- больше . Поэтому два из чисел , , ,  не меньше , а остальные два строго больше . Так что все обратные величины не больше 10, а две из них строго меньше 10. Тогда сумма обратных величин меньше 40, что и требуется.

**Условие**  *Из пункта  в пункт  вышел пешеход. Не позже чем через 40 мин вслед за ним вышел второй. Известно, что в пункт  один из них пришел раньше другого не менее, чем на 1 час. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы пришли в пункт  с интервалом не более чем в 20 мин. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от  до , если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.*

**Решение.** Пусть  и  (мин) --- время, затраченное соответственно первым и вторым пешеходом на путь из  в , и пусть второй пешеход вышел позже первого на  минут. Рассмотри 2 возможности 1)  и 2) . В случае  имеем равенство  и систему



Из первого и третьего неравенства получим , учитывая второе условие получим, что , и это в свою очередь дает равенства  и . Т.о. , , .

В случае  имеем  и сиcтему



Но так как , то система не совместна, и, следовательно, случай 2 не может иметь места.

*Ответ.* , , .

**Условие**  *По расписанию автобус должен проходить путь , состоящий из отрезков , ,  длиной 5, 1, 4 км соответственно, за 1 час. При этом выезжая из пункта  в 10 ч, он проходит пункт  в 10 ч 10 мин, пункт  в 10ч 34 мин. С какой скоростью  должен ехать автобус, чтобы время за которое автобус проходит половину пути от  до  (со скоростью ), сложенное с суммой абсолютных величинотклонения от расписания при прохождении пунктов  и , превышало абсолютную величину отклонения от расписания при прохождении пункта  не более, чем на 28 мин.*

**Решение.** Условие задачи приводит к системе



которая имеет единственное решение .

*Ответ.* 30 км/ч.

**Условие**  *Согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из  в  длиной 15 км за 1 час. При этом выходя из пункта  в 12ч, он прибывает в пункты  и , отстоящие от  на растояние 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч 20 мин и в 12 ч 40 мин. Известно, что если бы катер двигался из  в  без остановок с постоянной скоростью  (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты , ,  не превышало бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью  в стоячей воде. Какой из пунктов находится выше по течению:  или ?*

**Решение.** Рассмотрим 2 случая 1) пункт  находится выше по течению 2) пункт  находится ниже по течению.

В первом случае получаем систему



которая не имеет решения. Тогда выполняется второй случай.

*Ответ.* .