УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

23 декабря 2011 г.

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

8 класс

Первый день

1. Сколько среди натуральных чисел от 1 до 999 существует таких чисел n, что сумма цифр в их десятичной записи равна наибольшему общему делителю чисел n и $n+6$? (Ответ обоснуйте.)

2. В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенных к катетам, равны 19 и 22.

Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

3. В классе четное число школьников. Каждый дружит не менее, чем с половиной одноклассников. В начале очередного учебного года учительница произвольным образом рассадила их по два за парты. Но оказалось, что нет ни одной парты, за которой сидели бы друзья. Поэтому учительница разрешила школьникам делать пересадки. В одной пересадке могут участвовать два школьника, сидящих за разными партами.

Всегда ли школьники могут с помощью таких пересадок сесть так, чтобы за каждой партой сидели друзья? (Ответ обоснуйте.)

4. Каждая клетка таблицы 7×7 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток.

Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

9 класс

Первый день

1. Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа n, что

а) $n - S(n) = 3 \cdot 2010$?

б) $n - S(n) = 3 \cdot 2011$?

2. Три различных действительных числа удовлетворяют следующему условию: квадрат любого из них равен сумме числа 1 и произведения двух других чисел.

Какому числу может равняться сумма трех попарных произведений этих чисел?

3. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $AK = KL = LB$. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Пусть X – точка пересечения отрезков AN и CK, а Y – точка пересечения отрезков BM и CL.

Найдите длину отрезка XY, если длина стороны AB равна 36.

4. Каждая клетка таблицы 7×8 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток.

Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте и приведите соответствующий пример (примеры).

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

10 класс

Первый день

1. Для некоторых ненулевых действительных чисел a, b и c выполняется равенство

$$\frac{ab}{b-c}+\frac{bc}{c-a}+\frac{ca}{a-b}=\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}+6abc.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{1}{(a^2-b^2)^2}+\frac{1}{(b^2-c^2)^2}+\frac{1}{(c^2-a^2)^2}\,?$$

2. Пусть K – точка пересечения медиан AL, BM и CN треугольника ABC.

Докажите, что $\angle ABM=\angle CAL$, если $\angle BLA=\angle CNA$.

3. Существует ли функция f, определённая на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном x выполняется равенство

а) $f(\sin x)+f(\cos x)=1$?

б) $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x$?

4. Каждая клетка таблицы 8×9 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток.

Какое наибольшее и какое наименьшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

11 класс

Первый день

1. Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числом $3/4$.

Найдите произведение этих чисел.

2. Существует ли функция f, определённая на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 2$?

б) $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x$?

3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки: M – середина стороны BC, N и K – основания высот AN и CK, H – точка пересечения высот. Биссектриса угла ACB пересекает отрезок AH в точке T. Оказалось, что $CT \parallel MH$, $TH = 10$.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника NBK.

4. Каждая клетка таблицы 9×10 окрашена в один из трех цветов: красный, синий или зеленый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа зеленых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа зеленых клеток.

Какое наибольшее и какое наименьшее число зеленых клеток может быть в такой таблице?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

РЕШЕНИЯ

Первый день

8 класс

8.1. Ответ : 25.

Поскольку НОД(a, b)=НОД$(a - b, b)$ для любых чисел a и b, то НОД$(n + 6, n)$ =НОД$(6, n)$. Следовательно, НОД$(n + 6, n)$ может принимать лишь четыре значения: 1, 2, 3, 6.

Если НОД$(6, n) = 1$, то число n нечетное, и единственным числом с суммой цифр, равной 1, является число 1 (числа 10 и 100 четные).

Если НОД$(6, n) = 2$, то число n четное, но не делится на 6. Следовательно, последняя цифра числа n четная, т.е. 0,2,4,6,8. Но так как сумма цифр числа n равна 2, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 2, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 0. Поэтому двузначные числа — 20, трехзначные — 200, 110.

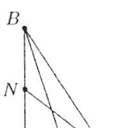
Если НОД$(6, n) = 3$, то число n нечетное, так как не должно делиться на 6. Следовательно, последняя цифра числа n нечетная, т.е. 1,3,5,7,9. Но так как сумма цифр числа n равна 3, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 3, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 1. Поэтому двузначные числа — 21, трехзначные — 201, 111.

Если НОД$(6, n) = 6$, то число n четное. Следовательно, последняя цифра числа n четная, т.е. 0,2,4,6,8. Но так как сумма цифр числа n равна 6, то среди однозначных чисел есть только одно число, это число 6, а все двухзначные и трехзначные числа могут оканчиваться лишь 0, 2 или 4. Поэтому двузначные числа — 60, 42, 24, трехзначные — 600, 510, 420, 330, 240, 150,402, 312, 222, 132, 204, 114.

Других чисел, удовлетворяющих условию, нет. Следовательно, всего требуемых чисел 25.

8.2. Ответ : 26.

Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Пусть $AN = 19$, $BM = 22$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам MBC и ANC, получаем



$$a^2 + \frac{b^2}{4} = AN^2 = 19^2 = 361, \quad b^2 + \frac{a^2}{4} = BM^2 = 22^2 = 484.$$

Складывая эти равенства, получим $\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = 845 = 5 \cdot 169$. Отсюда $a^2 + b^2 = 4 \cdot 169$. Поэтому искомая гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26$.

8.3. Ответ : да, всегда.

Будем называть парту плохой, если за ней сидят не друзья, и хорошей — если за ней сидят друзья. Таким образом, в начале все парты плохие. Покажем, что при любом имеющемся количестве плохих парт их число можно уменьшить с помощью одной пересадки. Пусть в классе $2n$ школьников (и, значит, они занимают n парт). Пусть за плохой партой сидят A и B, это, в частности, означает, что A и B не друзья. Но согласно условию у A не менее n друзей и поэтому они сидят не менее, чем за $\frac{n}{2}$ партами. Точно так же, и друзья B сидят не менее, чем за $\frac{n}{2}$ партами. При этом все они, друзья A и друзья B, сидят за $n-1$ партами (все парты, кроме одной, где сидят A и B), или меньшим числом парт. Поэтому (принцип Дирихле) найдется парта, за которой сидит друг школьника A (пусть, это C) и и друг школьника B (пусть, это D). Пересадим B и C. Получим две хорошие парты: $A \& C$ и $B \& D$. Видим, что в начале после первой же пересадки число плохих парт уменьшается на две. После этого снова выберем какую-либо плохую парту. Для нее снова, рассуждая так же, находим парту (она может оказаться уже хорошей), за которой сидят друзья выбранной плохой парты. Осуществив такую же пересадку, которая описана выше, превратим две рассматриваемые парты в хорошие. Число плохих парт уменьшится по крайней мере на одну. Продолжим этот процесс. Но так как число плохих парт конечно и после каждой такой пересадки оно уменьшается, то рано или поздно не останется ни одной плохой парты.

8.4. Ответ : 7 зеленых клеток.

Заметим, что поскольку в любой строке число красных клеток не меньше числа синих, то общее число красных клеток во всей таблице не меньше числа синих клеток. Точно так же, поскольку в любом столбце число синих клеток не меньше числа красных, то и во всей таблице число синих клеток не меньше числа красных. Тем самым, количества красных клеток и синих клеток во всей таблице одинаковы. Далее, если бы хоть в одной строке число красных клеток было строго больше числа синих, то число красных клеток во всей таблице было бы больше числа синих клеток — противоречие. Поэтому в каждой строке таблицы число красных клеток равно числу синих. Отсюда с учетом условия следует единственная возможность: в каждой строке 3 красных клетки, 3 синих и 1 зеленая. Поэтому число зеленых клеток равно 7. Следующий пример показывает, что окрасить клетки так, как сказано в условии задачи (при этом зеленых клеток действительно 7), можно.

з	с	к	с	к	с	к
к	з	с	к	с	к	с
с	к	з	с	к	с	к
к	с	к	з	с	к	с
с	к	с	к	з	с	к
к	с	к	с	к	з	с
с	k	с	к	с	к	з

9 класс

9.1. Ответ : а) не существуют; б) существуют, например, $n = 6048$.

а) Такие числа не существуют. Действительно, хорошо известно, что число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Поэтому число $n - S(n)$ делится на 9, а число 2011 не делится на 9.

б) Таким числом, например, является число 6048, так как $S(6048) = 18$ и $6048 - 18 = 6030 = 3 \cdot 2010$.

9.2. Ответ : -1.

Обозначив данные числа через a, b и c, получим согласно условию задачи систему равенств:

$$a^2 = bc + 1, \qquad b^2 = ac + 1, \qquad c^2 = ab + 1. \qquad (*)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^2 - b^2 = c(b - a)$. Так по условию $a \neq b$, то можно сократить обе части полученного равенства на $a - b$. Получим: $a + b = -c$, или $a + b + c = 0$. После возведения этого равенства в квадрат получим: $a^2 + b^2 + c^2 +$