LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

РЕШЕНИЯ

Второй день

8 класс

8.5. Ответ : нет, не существуют.

Предположим, что такие числа существуют. Тогда легко видеть, что число y должно быть нечетным, и поэтому последняя цифра в десятичной записи числа $5y^3$ будет равна 5. Отсюда следует, что последняя цифра в десятичной записи числа $2x^2 = 2011 + 5y^3$ будет равна 6 (вне зависимости от того является ли число y положительным или отрицательным). Следовательно, последняя цифра в десятичной записи числа x^2 должна быть или 3, или 8. Однако легко проверить, что квадраты чисел не могут оканчиваться ни на 3, ни на 8. Таким образом, целых чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

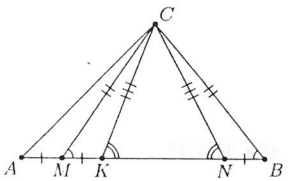
8.6. Так как данные числа положительные, то из условия имеем

$$ab \geqslant xa + yb \geqslant xb + yb, \quad \text{или} \quad ab \geqslant (x+y)b.$$

Сокращая на $b > 0$, получаем $a \geqslant x + y$, что и требовалось.

8.7. Ответ : 8 см.

По условию треугольник MCB равнобедренный, так как $CM = CB$. Поэтому $\angle CMK = \angle CBK$. Отметим на стороне AB точку N так, чтобы $BN = MK (= AM)$. Тогда $AN = MB$. Далее, $\Delta KMC = \Delta NBC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда, в частности, $CK = CN$, и



$$\angle ANC = \angle NKC = 180^\circ - (0,5\angle CAK + 90^\circ) =$$
$$= 90^\circ - 0,5\angle CAK.$$

Тогда в треугольнике ACN находим

$$\angle ACN = 180^\circ - \angle ANC - \angle CAK = 180^\circ - (90^\circ - 0,5\angle CAK) - \angle CAK =$$
$$= 90^\circ - 0,5\angle CAK = \angle ANC.$$

Следовательно, треугольник ACN равнобедренный, и тогда $AC = AN = MB = 8$.

8.8. Ответ : 5 побед и 2 очка, соответственно.

Покажем, что победитель турнира одержал не менее 5 побед. Предположим, что это не так, т. е. у победителя не более 4 побед. Тогда, так как он (как и каждый участник) сыграл 9 партий, то набрал не более $4 \cdot 1 + 5 \cdot 0,5 = 6,5$ очков. Тогда участник, занявший второе место, набрал не более 6 очков, третье место — не более 5,5 и т. д., наконец, аутсайдер — не более $6,5 - 9 \cdot 0,5 = 2$ очка. Тогда все спортсмены вместе набрали не более $6,5 + 6 + 5,5 + \ldots + 2 = 42,5$ очков.

Однако, так как каждый из 10 участников сыграл с каждым одну партию, то каждый сыграл 9 партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях, также равно 45. Получаем противоречие.

Итак, победитель выиграл не менее 5 партий. Следующая таблица показывает, что 5 выигранных партий у победителя такого турнира быть могло.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
1	×	·	·	·	·	1	1	1	1	1	7
2	·	×	·	·	·	·	1	1	1	1	6,5
3	·	·	×	·	·	·	·	1	1	1	6
4	·	·	·	×	·	·	·	·	1	1	5,5
5	·	·	·	·	×	·	·	·	·	1	5
6	0	·	·	·	·	×	·	·	·	·	4
7	0	0	·	·	·	·	×	·	·	·	3,5
8	0	0	0	·	·	·	·	×	·	·	3
9	0	0	0	0	·	·	·	·	×	·	2,5
10	0	0	0	0	0	·	·	·	·	×	2

Таким образом, наименьшее возможное число выигранных партий у победителя турнира равно 5. Приведенная таблица показывает, аутсайдер мог набрать 2 очка. Покажем, что это у него наибольшее возможное число очков. Действительно, если бы он набрал не менее 2,5 очка, то участник, занявший предпоследнее место имел бы не менее 3 очков, третий с конца — не менее 3,5 очка и т. д., наконец, победитель — не менее $2,5+9\cdot 0,5=7$ очков. Тогда у всех участников турнира вместе было бы не менее $2,5+3+3,5+\ldots+7=47,5$ очков. Но это невозможно, поскольку, как мы знаем, обще число очков, набранных всеми участниками, равно 45.

9 класс

9.5. Заметим, что

$$9=2^2+2^2+1^2 \quad \text{и} \quad 2\cdot 9=4^2+1^2+1^2. \qquad (*)$$

Из представлений $(*)$ вытекают представления чисел $2^m\cdot 9$ в виде суммы трёх квадратов при любом натуральном m. Действительно, если m чётно, т. е. $m=2k$, где $k\in\mathbb{N}$, то в силу первого равенства в $(*)$ получаем:

$$2^{2k}\cdot 9=(2^k\cdot 2)^2+(2^k\cdot 2)^2+(2^k\cdot 1)^2,$$

а если m нечётно, т. е. $m=2k-1$, где $k\in\mathbb{N}$, то в силу второго равенства в $(*)$ получаем:

$$2^{2k-1}\cdot 9=2^{2(k-1)}\cdot 2\cdot 9=(2^{k-1}\cdot 4)^2+(2^{k-1}\cdot 1)^2+(2^{k-1}\cdot 1)^2.$$

9.6. *Первое решение.* Применив к правой части данного по условию неравенства

$$ab\geqslant xa+yb \qquad (1)$$

неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$xa+yb\geqslant 2\sqrt{abxy}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что

$$ab\geqslant 2\sqrt{abxy},$$

откуда, сокращая на $\sqrt{ab}$ и возводя после этого получившееся неравенство в квадрат, получаем требуемое неравенство $ab \geqslant 4xy$.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$ab \geqslant xa + yb \qquad (*)$$

и a, b, x, y — положительные числа, то $x < b$. В самом деле, если $x \geqslant b$, то $xa + yb \geqslant$ $\geqslant ab + yb > ab$, что противоречит $(*)$. Так как $0 < x < b$, то $x = \dfrac{b}{k}$, где $k > 1$. Тогда $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$. Действительно, если $y > \dfrac{k-1}{k}a$, то $xa + yb > \dfrac{ab}{k} + \dfrac{k-1}{k}ab = ab$, что противоречит $(*)$. Итак, $x = \dfrac{b}{k}$ и $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}a$, где $k > 1$.

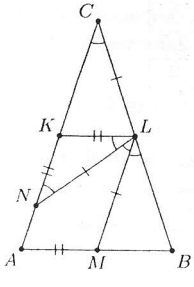
Поэтому $xy \leqslant \dfrac{k-1}{k^2}ab$, т. е. $ab \geqslant \dfrac{k^2}{k-1}xy$. Так как при всех $k > 1$ верно неравенство $\dfrac{k^2}{k-1} \geqslant 4$ (поскольку это неравенство очевидно равносильно верному неравенству $(k-2)^2 \geqslant 0$), то $ab \geqslant 4xy$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Почленно разделив неравенство $xa + yb \leqslant ab$ на b и перенеся первое слагаемое из левой части в правую, получим $y \leqslant -\dfrac{a}{b}x + a$. Тогда, так как по условию $x > 0$, $y > 0$, имеем

$$4xy \leqslant 4x\left(-\frac{a}{b}x + a\right) = -4\frac{a}{b}x(x-b). \qquad (*)$$

Поскольку $-x(x-b)$ — квадратный трёхчлен, корни которого 0 и b, а коэффициент при его старшем члене отрицателен, то максимум этого квадратного трёхчлена достигается при $x = \dfrac{b}{2}$ и равен $-\dfrac{b}{2}\cdot\left(\dfrac{b}{2} - b\right) = \dfrac{b^2}{4}$. Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, получаем $4xy \leqslant 4\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b^2}{4} = ab$, что и требовалось доказать.

9.7. Ответ: $36°$.



Пусть K — середина стороны AC. Так как M и L — середины сторон, то ML — средняя линия треугольника ABC, и $ML \parallel AC$, $ML = 0{,}5AC = AK$. Поэтому $\angle NLM = \angle CNL$ (как внутренние накрестлежащие углы) и $\angle MLB = \angle ACL$ (как односторонние углы). Кроме того, так как LK — средняя линия, то $LK = 0{,}5AB$, поэтому $NK = 0{,}5AC - NA = ML - NA = AM = 0{,}5AB = LK$. Следовательно, треугольник NKL равнобедренный и $\angle KNL = \angle KLN$. Заметим, что треугольник NLC также равнобедренный, поскольку $NL = ML = 0{,}5AC = 0{,}5BC = LC$. Значит $\angle CNL = \angle KCL = \angle ACB$.

Таким образом, $\angle BLM = \angle MLN = \angle NLK = \angle ACB$. Но $\angle ABC + 3\angle ACB = \angle ABC + \angle BLK = 180°$ (так как $LK \parallel AB$) и $180° = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = \angle ACB + 2\angle ABC$. Исключая из двух равенств $\angle ABC + 3\angle ACB = 180°$ и $\angle ACB + 2\angle ABC = 180°$ угол ABC, находим $5\angle ACB = 180°$, откуда $\angle NLM = \angle ACB = 36°$.

9.8. Ответ: 9

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В каждой

партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях также равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Так как все участники набрали разные числа очков, и последний (занявший последнее место) набрал 2 очка, то предпоследний набрал не менее $2,5$ очка, предпредпоследний — не менее 3 очков и т. д., наконец, первый (победитель) — не менее $2+\frac{n-1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 2+2,5+3+\ldots+(2+\frac{n-1}{2}). \qquad (1)$$

Вычислим сумму в правой части данного неравенства. Имеем:

$$2+2,5+3+\ldots+(2+\frac{n-1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot(4+5+6+\ldots+(4+n-1)) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4+(3+n)}{2}n = \frac{(7+n)n}{4}.$$

Поэтому неравенство (1) равносильно

$$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant \frac{(7+n)n}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n-1 \geqslant \frac{7+n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2n-2 \geqslant 7+n \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 9.$$

Итак, в турнире участвовало не менее 9 шахматистов. С другой стороны следующая таблица (с результатами игр, в которой точка означает $0,5$ очка) показывает, что существует турнир, в котором участвовало ровно 9 человек и который удовлетворяет всем условиям задачи.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
1	×	·	·	·	·	1	1	1	1	6
2	·	×	·	·	·	·	1	1	1	5,5
3	·	·	×	·	·	·	·	1	1	5
4	·	·	·	×	·	·	·	·	1	4,5
5	·	·	·	·	×	·	·	·	·	4
6	0	·	·	·	·	×	·	·	·	3,5
7	0	0	·	·	·	·	×	·	·	3
8	0	0	0	·	·	·	·	×	·	2,5
9	0	0	0	0	·	·	·	·	×	2

10 класс

10.5. Ответ: все нечётные натуральные m.

Пусть

$$2^m \cdot 7 = a^2+b^2+c^2, \quad \text{где} \quad a,b,c \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Так как число в левой части этого равенства чётно, то чётным должно быть и число в его правой части. Это возможно только в двух случаях: либо 1) среди чисел a, b, c два нечётных и одно чётно, либо 2) все три числа a, b, c чётные.

Покажем, что в случае 1) равенство (1) возможно только при $m=1$. Пусть, без нарушения общности, числа a и b нечётны, а число c чётно, т. е. $a=2k-1$, $b=2l-1$ и $c=2n$ для некоторых натуральных k, l и n. Тогда равенство (1) принимает вид

$$2^m \cdot 7 = 4(k^2+l^2-k-l+n^2)+2. \qquad (2)$$

Это равенство, если $m \geqslant 2$, невозможно, поскольку тогда его левая часть делится на 4, а правая нет. Если же $m = 1$, то равенство (2) выполняется, например, при $k = 2$, $l = n = 1$, т. е. при $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$.

Рассмотрим случай 2). Пусть 2^q — наибольшая степень двойки, на которую делится каждое из чисел a, b и c, т. е. $a = 2^q a_1$, $b = 2^q b_1$ и $= 2^q{}_1$, где среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечётно. Тогда равенство (1) принимает вид

$$2^{m-2q} \cdot 7 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \qquad (3)$$

Если $m - 2q \geqslant 2$, то, поскольку среди чисел a_1, b_1, c_1 хотя бы одно нечётное, а тогда нечётных среди них ровно два, такое же рассуждение, как и выше, показывает, что равенство (3) невозможно. Поэтому равенство (3) может выполняться только либо при $m - 2q = 0$, либо при $m - 2q = 1$. Если $m - 2q = 0$, то равенство (3) принимает вид $7 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, и простой перебор показывает, что оно невозможно. Если $m - 2q = 1$, то равенство (3) принимает вид $14 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, и его решения найдены выше: например, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $c_1 = 1$.

Таким образом, представление (1) имеет место только при нечётных m.

10.6. *Первое решение.* Разделив последовательно обе части данного по условию неравенства $ab \geqslant xa + yb$ на a и на b, получим соответственно неравенства

$$b \geqslant x + y\,\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad a \geqslant x\,\frac{a}{b} + y.$$

Сложив их почленно, придём к неравенству

$$a + b \geqslant x + y + \left(x\,\frac{a}{b} + y\,\frac{b}{a}\right). \qquad (*)$$

Применив к слагаемым в скобках в правой части неравенства $(*)$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$x\,\frac{a}{b} + y\,\frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{x\,\frac{a}{b} \cdot y\,\frac{b}{a}} = 2\sqrt{xy}.$$

Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, приходим к неравенству

$$a + b \geqslant x + y + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2,$$

откуда, извлекая квадратный корень из обеих его частей, получаем $\sqrt{a+b} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$ab \geqslant xa + yb \qquad (1)$$

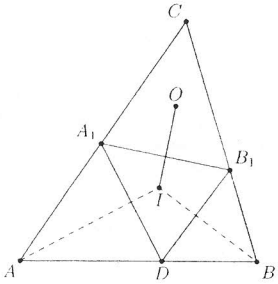
и a, b, x, y — положительные числа, то $x < b$. В самом деле, если $x \geqslant b$, то $xa + yb \geqslant$ $\geqslant ab + yb > ab$, что противоречит (1). Так как $0 < x < b$, то $x = \dfrac{b}{k}$, где $k > 1$. Тогда $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}\,a$. Действительно, если $y > \dfrac{k-1}{k}\,a$, то $xa + yb > \dfrac{ab}{k} + \dfrac{k-1}{k}\,ab = ab$, что противоречит (1). Итак, $x = \dfrac{b}{k}$ и $y \leqslant \dfrac{k-1}{k}\,a$, где $k > 1$.

Поэтому $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{b} + \sqrt{\dfrac{k-1}{k}}\sqrt{a}$. Следовательно, для доказательства требуемого неравенства достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{b} + \sqrt{\frac{k-1}{k}}\sqrt{a} < \sqrt{a+b}, \qquad (2)$$

если $k > 1$. Почленно умножив неравенство (2) на $\sqrt{k}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, после очевидных преобразований получим равносильное (2) неравенство $2\sqrt{(k-1)ab} \leqslant a + (k-1)b$, которое очевидно верно, поскольку является неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

10.7. Отметим на стороне AB точку D так, чтобы $AD = AA_1$. В силу данного в условии равенства получим, что $BD = BB_1$. Тогда треугольники DAA_1 и DBB_1 равнобедренные. Соединим точки A и B с точкой I. AI и BI — биссектрисы в равнобедренных треугольниках, поэтому AI и BI являются также серединными перпендикулярами к отрезкам A_1D и B_1D соответственно. Точка I, как точка пересечения этих перпендикуляров, являются поэтому центром описанной окружности треугольника A_1B_1D. В частности, точка I лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1. Но точка O также лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку как центр описанной окружности треугольника A_1B_1C. Поэтому прямая IO и есть серединный перпендикуляр отрезка A_1B_1. Тем самым $OI \perp A_1B_1$.



10.8. Ответ : 5 побед.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Если последний (аутсайдер) набрал 2,5 очка, то предпоследний — не менее 3 очков, предпредпоследний — не менее 3,5 очка и т. д., наконец, победитель турнира — не менее $2,5+0,5(n-1) = 2+0,5n$. С другой стороны, если победитель выиграл s партий и t партий свел вничью, то он набрал $s+0,5t$ очков. Поэтому $2+0,5n \leqslant s+0,5t$. Но так как победитель (как и каждый участник турнира) сыграл $n-1$ партию, то $t \leqslant (n-1)-s$. Поэтому $2+0,5n \leqslant s+0,5(n-1-s)$. Упрощая полученное неравенство, находим:

$$2+0,5n \leqslant 0,5s+0,5n-0,5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leqslant 0,5s-0,5 \quad \Leftrightarrow \quad s \geqslant 5.$$

Итак, победитель турнира выиграл не менее 5 партий. Покажем, что турнир, удовлетворяющий условию задачи, в котором победитель выиграл ровно 5 партий, существует. Для этого оценим предварительно число участников турнира.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что все участниками турнира вместе набрали не меньше $2,5+3+3,5+\ldots+(2+0,5n) = \dfrac{4,5+0,5n}{2}\cdot n$ очков. В то же время, так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях также равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$. В результате получаем неравенство $\dfrac{4,5+0,5n}{2}\cdot n \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$, упрощая которое находим $4,5+0,5n \leqslant n-1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 11$.

Теперь легко построить нужный пример. Пусть в турнире участвовало 11 спортсменов. Разобьем их на три группы (5 человек в первой группе, 1 — во второй и 5 — в третьей) и Обозначим соответственно: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Укажем только результативные партии, т. е. те, которые закончились не вничью. Пусть A_1 выиграл у всех из третьей группы, т. е. у C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Далее, пусть A_2 выиграл у C_2, C_3, C_4, C_5; спортсмен A_3 выиграл у C_3, C_4, C_5; спортсмен A_4 выиграл у C_4, C_5; спортсмен A_5 выиграл только у C_5. Спортсмен B свел все партии вничью. Все

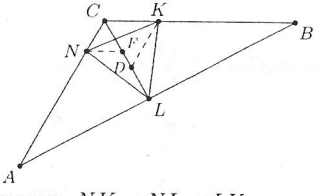
неуказанные партии также закончились вничью. Видим, что A_1 — победитель и выиграл 5 партий. Все спортсмены из группы A набрали разное число очков (у них разное число побед и нет поражений), большее, чем спортсмен B. У спортсменов из группы C также разное число очков (у них разное число поражений и нет побед), меньшее, чем у спортсмена B. Так-что, все условия выполняются.

11 класс

11.5. Ответ : нет, не существуют.

Заметим, что при делении на 9 третьей степени любого целого числа остатками могут быть только числа 0, 1 и 8. Следовательно, по модулю 9 число $2x^3$ сравнимо с одним из чисел $0, 2, -2$, а число y^3 – с одним из чисел 0, 1, -1. Поэтому сумма $2x^3 + y^3$ сравнима с одним из чисел $0, 1, -1, 2, 3, 1, -2, -1, -3$. Это означает, что сумма $2x^3 + y^3$ сравнима по модулю 9 с одним из чисел $0, 1, 2, 3, 6, 8$, в то время как $2011 \equiv 4 \pmod 9$. Заключаем, что ни при каких целых x и y равенство, указанное в условии не выполняется.

11.6. Отметим на биссектрисе BL точки F и D так, чтобы $CF = LD = CN$. Тогда в силу равенства из условия $FL = CD = CK$. По выбору этих точек заключаем, что треугольники NCF и DCK равносторонние, так как $\angle NCF = 60°$ и $CN = CF$, а $\angle DCK = 60°$ и $CD = CK$. Отсюда следует, что $\angle NFL = \angle LDK = 180° - 60° = 120°$. Стало быть, три треугольника: NCK, NFL, LDK равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $NK = NL = LK$, т.е. треугольник KLN действительно равносторонний.



11.7. *Первое решение.* Последовательно разделив обе части данного по условию неравенства $abc \geqslant ka + nb + mc$ на a, на b и на c, получим соответственно неравенства

$$bc \geqslant k + n\frac{b}{a} + m\frac{c}{a}, \quad ac \geqslant k\frac{a}{b} + n + m\frac{c}{b} \quad \text{и} \quad ab \geqslant k\frac{a}{c} + n\frac{b}{c} + m.$$

Почленно сложив эти три неравенства и перегруппировав члены в правой части получившегося неравенства, придём к неравенству

$$ab + bc + ac \geqslant k + n + m + \left(k\frac{a}{c} + m\frac{c}{a}\right) + \left(m\frac{c}{b} + n\frac{b}{c}\right) + \left(n\frac{b}{a} + k\frac{a}{b}\right). \qquad (*)$$

Применив к каждой паре слагаемых в скобках в правой части неравенства $(*)$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел (неравенство Коши), получим

$$k\frac{a}{c} + m\frac{c}{a} \geqslant 2\sqrt{k\frac{a}{c} \cdot m\frac{c}{a}} = 2\sqrt{km}, \quad m\frac{c}{b} + n\frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{m\frac{c}{b} \cdot n\frac{b}{c}} = 2\sqrt{mn}$$

и

$$n\frac{b}{a} + k\frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{n\frac{b}{a} \cdot k\frac{a}{b}} = 2\sqrt{nk}.$$

Поэтому, продолжая неравенство $(*)$, приходим к неравенству

$$ab + bc + ac \geqslant k + n + m + 2\sqrt{km} + 2\sqrt{mn} + 2\sqrt{nk} = \left(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}\right)^2. \qquad (**)$$

Как известно, для любых чисел a, b, c верно неравенство $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$ (действительно, это неравенство равносильно неравенству $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, а последнее неравенство верно: $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} + \dfrac{b^2+c^2}{2} + \dfrac{a^2+c^2}{2} \geqslant ab+bc+ac$). Из этого неравенства и неравенства $(**)$ вытекает неравенство

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)^2,$$

извлекая квадратный корень из обеих частей которого, получаем требуемое неравенство.

Второе решение. Заметим сначала, что если

$$abc \geqslant ka+nb+mc \tag{1}$$

и a, b, c, k, n, m – положительные числа, то $k < bc$. В самом деле, если $k \geqslant bc$, то $ka+nb+mc \geqslant abc+nb+mc > abc$, что противоречит (1). Так как $0 < k < bc$, то $k = \dfrac{bc}{\lambda}$, где $\lambda > 1$. Тогда из (1) получаем

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}\,abc \geqslant nb+mc. \tag{2}$$

Покажем, что $n < \dfrac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$. В самом деле, если $n \geqslant \dfrac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$, то

$$nb+mc \geqslant \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\,abc + mc > \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\,abc,$$

что противоречит (2). Так как $0 < n < \dfrac{ac(\lambda-1)}{\lambda}$, то $n = \dfrac{ac(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\dfrac{1}{\mu}$, где $\mu > 1$. Тогда $m \leqslant \dfrac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\dfrac{\mu-1}{\mu}$. Действительно, если $m > \dfrac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\dfrac{\mu-1}{\mu}$, то

$$nb+mc > \frac{abc(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu} + \frac{abc(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\,abc,$$

что противоречит (2). Итак,

$$k = \frac{bc}{\lambda}, \quad n = \frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\mu} \quad \text{и} \quad m \leqslant \frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}\cdot\frac{\mu-1}{\mu}.$$

Поэтому

$$\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m} \leqslant \sqrt{bc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}. \tag{3}$$

Докажем предварительно следующее неравенство: если $l > 1$ и $x > 0$, $y > 0$, то

$$\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{l}} + \sqrt{y}\,\sqrt{\frac{l-1}{l}} \leqslant \sqrt{x+y}. \tag{4}$$

Действительно, почленно умножив неравенство (4) на $\sqrt{l}$ и возведя обе части полученного неравенства в квадрат, после очевидных преобразований получим равносильное (4) неравенство $2\sqrt{(l-1)xy} \leqslant (l-1)x+y$, которое очевидно верно, поскольку является

неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел.

Оценим сверху правую часть неравенства (3) при помощи доказанного неравенства (4). Применяя к двум последним слагаемым правой части (3) неравенство (4), получаем

$$\sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}}\leqslant\sqrt{\frac{ac(\lambda-1)}{\lambda}+\frac{ab(\lambda-1)}{\lambda}}=$$

$$=\sqrt{ac+ab}\sqrt{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}}.$$

Значит, правая часть неравенства (3) не превосходит $\sqrt{bc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\sqrt{ac+ab}\sqrt{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}}$. Оценивая последнее выражение при помощи неравенства (4), получаем, что правая часть неравенства (3) не больше $\sqrt{ab+ac+bc}$. Но, в свою очередь, $\sqrt{3}\sqrt{ab+ac+bc}\leqslant$ $\leqslant a+b+c$, как легко убедиться, если возвести обе части этого неравенства в квадрат. Итак, $\sqrt{3}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)\leqslant a+b+c$, что и требовалось доказать.

11.8. Ответ: $2k$ побед.

Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Если последний (аутсайдер) набрал k очка, то предпоследний — не менее $k+0,5$ очка, предпредпоследний — не менее $k+1$ очка и т. д., наконец, победитель турнира — не менее $k+0,5(n-1)$. С другой стороны, если победитель выиграл s партий и t партий свел вничью, то он набрал $s+0,5t$ очков. Поэтому $k+0,5(n-1)\leqslant s+0,5t$. Но так как победитель (как и каждый участник турнира) сыграл $n-1$ партию, то $t\leqslant(n-1)-s$. Поэтому $k+0,5(n-1)\leqslant s+0,5(n-1-s)$. Упрощая полученное неравенство, находим:

$$k+0,5n-0,5\leqslant 0,5s+0,5n-0,5\quad\Leftrightarrow\quad s\geqslant 2k.$$

Итак, победитель турнира выиграл не менее $2k$ партий. Покажем, что турнир, удовлетворяющий условию задачи, в котором победитель выиграл ровно $2k$ партий, существует. Для этого оценим предварительно число участников турнира.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что все участниками турнира вместе набрали не меньше

$$k+(r+0,5)+(k+1)+\ldots+(k+0,5(n-1))=\frac{k+k+0,5(n-1)}{2}\cdot n=nk+\frac{n(n-1)}{4}$$

очков. В то же время, так как каждый сыграл с каждым, то каждый из n шахматистов сыграл $n-1$ партий и, значит, общее число партий (учитывая, что в каждой партии участвовало ровно два спортсмена) равно $\frac{n(n-1)}{2}$. В каждой партии при любом ее исходе участники на двоих получают 1 очко. Поэтому общее число очков, набранных всеми участниками во всех партиях также равно $\frac{n(n-1)}{2}$. В результате получаем неравенство

$$nk+\frac{n(n-1)}{4}\leqslant\frac{n(n-1)}{2},$$

упрощая которое, находим $nk\leqslant\frac{n(n-1)}{4}\quad\Leftrightarrow\quad k\leqslant\frac{n-1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad n\geqslant 4k+1$.

Теперь легко построить нужный пример. Пусть в турнире участвовало $4k+1$ или $2m+1$ спортсменов, где $m=2k$ — натуральное число. Разобьем данное количество

спортсменов на три группы (m человек в группе A , 1 — в группе B и m — в группе C) и Обозначим соответственно: A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_m , B , C_1 , C_2 , C_3 , ..., C_m . Укажем только результативные партии, т. е. те, которые закончились не вничью. Пусть A_1 выиграл у всех m спортсменов из группы C ; A_2 выиграл у всех $m-1$ спортсменов из группы C , начиная со второго; A_3 выиграл у всех $m-2$ спортсменов из группы C , начиная с третьего; и т. д., наконец A_m выиграл только у C_m . Спортсмен B свел все партии вничью. Все неуказанные партии также закончились вничью. Видим, что A_1 — победитель и выиграл $m = 2k$ партий. Все спортсмены из группы A набрали разное число очков (у них разное число побед и нет поражений), большее, чем спортсмен B . У спортсменов из группы C также разное число очков (у них разное число поражений и нет побед), меньшее, чем у спортсмена B . Так-что, все условия выполняются.