УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

23 декабря 2011 г.

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

8 класс

Второй день

5. Существуют ли такие целые числа x и y, что $2x^2 - 5y^3 = 2011$?

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенствам $ab \geqslant xa + yb$ и $a \geqslant b$, то они удовлетворяют и неравенству $x + y \leqslant a$.

7. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки M и K. Оказалось, что $AM = MK$, $CM = CB$, $\angle AKC = 0,5\angle CAK + 90°$.

Найдите длину стороны AC, если длина отрезка MB равна 8 см.

8. В шахматном турнире участвовало 10 шахматистов. Каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за ничью — 0,5 очка.)

Какое наименьшее число побед могло могло быть у победителя этого турнира и какое наибольшее число очков мог набрать участник, занявший последнее место?

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 4,5 часа

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

9 класс

Второй день

5. Докажите, что при любом натуральном m число $2^m \cdot 9$ можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенству $ab \geqslant xa + yb$, то они удовлетворяют и неравенству $ab \geqslant 4xy$.

7. Пусть M и L – середины основания AB и боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC соответственно ($BC = AC$). На стороне AC отмечена точка N. Оказалось, что $NA + AM = LN = LM$.

Найдите величину угла NLM.

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за ничью — 0,5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил 2 очка.

Какое наименьшее число шахматистов могло участвовать в этом турнире?

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

10 класс

Второй день

5. Найдите все натуральные m, при которых число $2^m \cdot 7$ можно представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.

6. Докажите, что если положительные числа a, b, x, y удовлетворяют неравенству $ab \geqslant xa+yb$, то они удовлетворяют и неравенству $\sqrt{a+b} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

7. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и B_1 такие, что $AA_1 + BB_1 = AB$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а O — центр описанной окружности треугольника A_1B_1C.

Докажите, что прямая OI перпендикулярна прямой A_1B_1.

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за ничью — 0.5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил 2,5 очка.

Какое наименьшее число побед могло быть у победителя этого турнира?

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов

LXI Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

10 – 13 января 2011 года

11 класс

Второй день

5. Существуют ли такие целые числа x и y, что $2x^3 + y^3 = 2011$?

6. В треугольнике ABC угол ACB равен $120°$. Точка L на стороне AB такова, что CL – биссектриса угла ACB. На сторонах AC и BC выбраны точки N и K соответственно, так, что $CN + CK = CL$.

Докажите, что треугольник KLN равносторонний.

7. Докажите, что если положительные числа a, b, c, k, n, m удовлетворяют неравенству $abc \geqslant ka + nb + mc$, то они удовлетворяют и неравенству

$$a + b + c \geqslant \sqrt{3}\left(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}\right).$$

8. В шахматном турнире каждый из участников сыграл с каждым другим одну партию. Никакие два участника не набрали одинакового числа очков. (В шахматах за победу в партии присуждается 1 очко, за проигрыш — 0 очков, за ничью — 0,5 очка.) Участник, занявший последнее место, получил k очков.

Какое наименьшее число побед могло быть у победителя этого турнира?

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов