LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: (1, 2, 3), (2, 3, 1) и (3, 1, 2).

Заметим, что $(ab^2+bc^2+ca^2)-(a^2b+b^2c+c^2a)=(a-b)(b-c)(c-a)$ (легко убедиться, раскрыв скобки в обеих частях данного равенства). Поэтому согласно условию $(a-b)(b-c)(c-a)=25-23=2$. Тогда, так как произведение трех целых чисел $a-b$, $b-c$ и $c-a$ равно 2, а их сумма, очевидно, равна 0, одно из этих чисел равно 2, а два других числа равны -1. Например, $a-b=-1$, $b-c=-1$, $c-a=2$. Тогда $a=b-1$, а $c=b+1$. Подставив вместо a и c выражения из правых частей этих равенств в первое уравнение из условия задачи, получим $(b-1)^2b+b^2(b+1)+(b+1)^2(b-1)=23 \Leftrightarrow b^3=8 \Leftrightarrow b=2$ и тогда $a=1$, $c=3$. Иными словами, тройка чисел (1, 2, 3) удовлетворяет условию задачи. Аналогично находим еще два решения: (2, 3, 1) и (3, 1, 2).

8.2. Ответ: 12 школьников.

Пусть в 8"А"классе учится n школьников, тогда согласно условию в 8"Б"учится $m=50-n$ школьников. Далее, пусть средняя оценка по математике школьников 8"А"класса равна a, средняя оценка в 8"Б"классе равна b. Если x учащихся из 8"А"класса перевести в 8"Б"класс и столько же школьников из 8"Б"класса перевести в 8"Б"класс, то 8"А"классе будет $n-x$ школьников со средней оценкой a по математике и x школьников со средней оценкой b. Тогда средняя оценка по математике всех школьников этого класса будет равна $\dfrac{(n-x)a+xb}{n}$. Аналогично, средняя оценка по математике всех школьников 8"Б"класса, где учится $50-n$ школьников, станет равна $\dfrac{(m-x)b+xa}{m}$. Приравнивая эти оценки получаем:

$$\frac{(n-x)a+xb}{n}=\frac{(m-x)b+xa}{m} \quad\Leftrightarrow\quad m(n-x)a+mbx=nb(m-x)+nax \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad nma+mx(b-a)=nmb-nx(b-a) \quad\Leftrightarrow\quad (n+m)x(b-a)=nm(b-a),$$

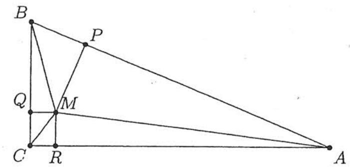
откуда, учитывая, что по условию $b-a\neq 0$, находим $x=\dfrac{nm}{n+m}=\dfrac{n(50-n)}{50}$. Так как число x — целое, то n — четное число. В противном случае, если n — нечетное, то $n(50-n)$ — произведение двух нечетных чисел — не делится на 2 и, значит, не может делиться на 50. Точно так же, n должно быть кратно 5. Иначе, если n не делится на 5, то и $(50-n)$ не делится на 5 и, значит, произведение $n(50-n)$ не делится на 5 и поэтому не может делиться на 50. Таким образом, n делится на 10 и, поскольку по условию $n>10$ и $50-n>10$, то $n=20$ или $n=30$. В обоих случаях получаем $x=12$, т. е. средние оценки по математике 8"А"класса и 8"А"класса можно уровнять, если перевести из одного класса в другой по 12 школьников.

8.3. Ответ 5/3.

Заметим, что треугольник ABC прямоугольный, поскольку $AB^2=169=25+144=BC^2+AC^2$. Следовательно, $\angle ACB=90°$. Пусть $MP\perp AB$, $MQ\perp BC$, $MR\perp AC$ (см. рис.). Вычислим площади $S(ABC)$, $S(AMB)$, $S(BMC)$, $S(AMC)$ треугольников ABC, AMB, BMC, AMC:

$$S(ABC)=0,5AC\cdot BC=30,\ S(AMB)=0,5MP\cdot AB=0,5\cdot 39,$$

$$S(BMC)=0,5MQ\cdot BC=0,5\cdot 5,\ S(AMC)=0,5MR\cdot AC=0,5MR\cdot 12.$$



Поскольку $S(ABC)=S(AMB)+S(BMC)+S(AMC)$, то $MR=4/3$. Четырехугольник $RMQC$ — прямоугольник, поэтому его диагональ MC может быть найдена по теореме Пифагора:

$$MC=\sqrt{MQ^2+CQ^2}=\sqrt{MQ^2+MR^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}.$$

8.4. Ответ: 1, 2, 3.

Пусть около отрезков записаны числа a, b, c, d, e, f так, как показано на рис. 1. Докажем вначале, что если два отрезка не имеют общей точки, то около них записаны одинаковые числа. Действительно, рассмотрим какие-либо два не имеющие общей точки отрезка — например, AB и OC. Тогда сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки B, равна $a+e+b$, а выходящих из точки O — равна $d+e+f$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+e+b=d+e+f$, или

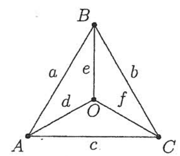


Рис. 1

$$a+b=d+f. \qquad (*)$$

Точно так же, сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки A, равна $a+d+c$, а выходящих из точки C — равна $b+f+c$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+d+c=b+f+c$, или

$$a+d=b+f. \qquad (**)$$

Сложив почленно равенства $(*)$ и $(**)$, получим $2a+b+d=b+d+2f$, или $a=f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа.

Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB. Пусть около отрезков AB и OC записано по числу a, около отрезков BC и OA — по числу b, и около отрезков AC и OB — по числу c (см. рис. 2). Итак, среди шести чисел, записанных около отрезков, не более трёх различных, а все шесть чисел разбиваются на пары равных. Следовательно, так как по условию нам известно, что среди записанных чисел имеются три различных — это 1, 2 и 3, то отличных от них чисел около отрезков записано быть не может, а значит, остальные записанные числа — это также 1, 2 и 3.

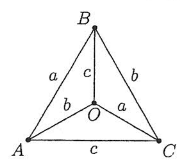


Рис. 2

9 класс

9.1. Достаточно доказать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. Заметим, что

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2+3abc.$$

Тогда

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2-2abc-a^3-b^3-c^3=$$

$$= (a^2b + ab^2 + b^2c + dc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc) - (a^3 + b^3 + c^3 + 5abc) = 2 - 2 = 0.$$

Поэтому какой-то из множителей $(a+b-c)$, $(b+c-a)$, $(c+a-b)$ равен 0, и, значит, $a+b=c$, или $b+c=a$, или $c+a=b$, что и требовалось доказать.

9.2. Ответ: -1.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $(3a+b)x^2+(c-b)x+a-c=0$. По теореме Виета получаем соответственно равенства

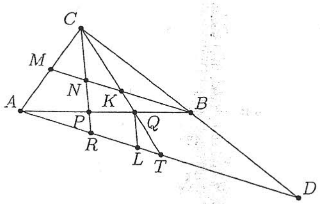
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_3+x_4=-\dfrac{c-b}{3a+b}, \\ x_3\cdot x_4=\dfrac{a-c}{3a+b}. \end{cases}$$

Поэтому сумма корней этих уравнений равна $-\dfrac{b}{a}-\dfrac{c-b}{3a+b}=\dfrac{-b^2-2ab-ac}{a(3a+b)}$, а их произведение $\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a-c}{3a+b}=\dfrac{-c^2+ac}{a(3a+b)}$. Так как по условию сумма корней уравнений равна их произведению, то $\dfrac{-b^2-2ab-ac}{a(3a+b)}=\dfrac{-c^2+ac}{a(3a+b)}$, или $b^2-c^2=-2a(b+c)$, т. е. $(b-c)(b+c)=-2a(b+c)$. Так как согласно условию $b+c\neq 0$, то сокращая последнее равенство на $b-c$, получим $b-c=-2a$, или $b=c-2a$. Поэтому второе уравнение принимает вид $(a+c)x^2+2ax+a-c=0$. Его корни, как легко убедиться, — числа -1 и $\dfrac{c-a}{c+a}$, меньший из которых равен -1, поскольку $\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{(-c-a)+2c}{c+a}=-1+\dfrac{2c}{c+a}>-1$.

Замечание. Хотя для решения задачи это не нужно, отметим, что числа a, b и c, для которых выполнены все условия задачи, существуют. Для этого достаточно взять $b=c-2a$, $a>0$ и $c>2a$.

9.3. Ответ: $AP:PQ=3:2$, $AQ:QB=2:1$.

Через точку A проведем прямую, параллельную медиане BM до ее пересечения с прямой CB в точке D. Пусть R и T — точки пересечения отрезка AL с прямыми CK и CN соответственно. Пусть также $QL \parallel CR$ (см. рис.).



Так как M — середина AC и $MB \parallel AD$, то BM — средняя линия треугольника ACD. Поэтому B — середина AD и, кроме того. MN, NK, KB — средние линии треугольников ACR, RCT, TCD соответственно. Следовательно, $AR=2NM=2NK=RT$ и $AT=AR+RT=2(MN+NK)=2KB=TD$. Значит, AB и CT — медианы треугольника ACD а Q — точка их пересечения. Следовательно, $AQ:QB=CQ:QT=2:1$ (свойство медиан треугольника). Поскольку $CR \parallel QL$, то по теореме Фалеса $RL:LT=CQ:QT=2:1$. Поэтому, если $LT=x$, то $LR=2x$, а $AR=RT=AL+LT=3x$. Тогда по теореме Фалеса $AP:PQ=AR:RL=3:2$.

9.4. Ответ: наибольшее $r=14$.

Допустим, что числа $1, 2, \ldots, 11$ и r расставлены на рёбрах куба так, как требуется в условии задачи. Через S обозначим сумму чисел на рёбрах, выходящих из произвольной вершины куба (согласно условию эта сумма одна и та же для каждой вершины).

Запишем в каждой вершине куба число, равное сумме чисел, стоящих на выходящих из неё рёбрах. Так как для каждой вершины куба это число равно S, то сумма чисел, записанных во всех восьми вершинах куба, равна $8S$. С другой стороны, как легко видеть, сумма $8S$ — это в точности такая сумма, в которой каждое число, стоящее на ребре, подсчитано дважды: для каждой из вершин ребра, на котором оно стоит. Поэтому

$$8S=2\cdot(1+2+\ldots+11+r), \quad \text{или} \quad 66+r=4S. \qquad (*)$$

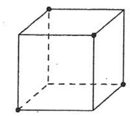


Рис. 1

К этому результату можно прийти и по-другому. Рассмотрим четыре вершины куба, обозначенные на рис. 1 жирными точками. Тогда, сумма чисел на рёбрах, выходящих из этих четырёх вершин, равна, с одной стороны, $4S$, а с другой, как легко видеть, она равна сумме всех чисел, стоящих на рёбрах куба, т. е.

$$4S=1+2+\ldots+11+r, \quad \text{или} \quad 66+r=4S.$$

Из равенства $(*)$ находим, что $r=4S-66=2(2S-33)$, а так как S — целое, то r — целое чётное число. (Можно утверждать даже больше: r — чётное число, не делящееся нацело на 4, поскольку $r=4(S-17)+2$, но этот факт нам не понадобится.)

Оценим теперь величину числа r сверху. Пусть число r стоит на ребре XY, а на остальных рёбрах, выходящих из вершин X и Y, стоят числа x_1, x_2, x_3 и x_4. Тогда сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из вершины X, и рёбрах, выходящих из вершины Y, равна, с одной стороны, $2S$, а с другой — она равна $2r+x_1+x_2+x_3+x_4$, т. е. поскольку в силу второго равенства в $(*)$ $2S=33+\dfrac{r}{2}$, имеем равенство

$$33+\frac{r}{2}=2r+x_1+x_2+x_3+x_4, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}r=33-(x_1+x_2+x_3+x_4). \qquad (**)$$

Но числа x_1, x_2, x_3 и x_4 — это какие-то попарно различные из чисел $1, 2, \ldots, 11$. Поэтому $x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 1+2+3+4=10$. Тогда из второго равенства в $(**)$ получаем неравенство $\dfrac{3}{2}r \leqslant 33-10=23$, а значит, $r \leqslant 15\dfrac{1}{3}$. Поскольку, как доказано выше, число r чётное, то $r \leqslant 14$.

Остаётся на рёбрах куба расставить числа $1, 2, \ldots, 11$ и 14, так, чтобы выполнялось условие задачи — см. рис. 2, на котором для большего удобства расстановки чисел на рёбрах куба вместо привычной параллельной проекции куба, как на рис. 1, изображена его центральная проекция. Для расстановки чисел $1, 2, \ldots, 11$ и 14, удовлетворяющей условию задачи, необходимо вначале из равенства $(*)$ при $r=14$ найти, что в этом случае $S=20$. После этого нужную расстановку несложно получить при помощи простых соображений и небольшого перебора.

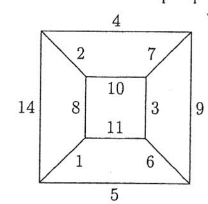


Рис. 2

10 класс

10.1. Достаточно доказать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. Имеем:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (ab+bc+ca)(a+b+c)=abc \ \Leftrightarrow \quad a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2+3abc=abc \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2=-2abc.$$

А также

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=-4 \quad \Leftrightarrow \quad a^3+b^3+c^3=-4abc.$$

Тогда

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2-$$
$$-(a^3+b^3+c^3)-2abc=(-2abc)-(-4abc)-2abc=0.$$

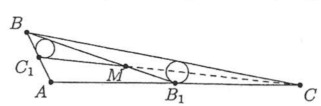
Поэтому какой-то из множителей $(a+b-c)$, $(b+c-a)$, $(c+a-b)$ равен 0, и, значит, $a+b=c$, или $b+c=a$, или $c+a=b$, что и требовалось доказать.

10.2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $(b-1)x^2+(2c-b)x+(c-3b)=0$. По теореме Виета получаем соответственно равенства

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b, \\ x_1\cdot x_2=c \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_3+x_4=-\dfrac{2c-b}{b-1}, \\ x_3\cdot x_4=\dfrac{c-3b}{b-1}. \end{cases}$$

Поэтому сумма корней этих уравнений равна $-b-\dfrac{2c-b}{b-1}=\dfrac{-b^2+2b-2c}{b-1}$, а их произведение $c\cdot\dfrac{c-3b}{b-1}=\dfrac{c^2-3bc}{b-1}$. Так как по условию сумма корней уравнений равна половине их произведения, то $\dfrac{-b^2+2b-2c}{b-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c^2-3bc}{b-1}$, или $c^2-3bc+2b^2=4(b-c)$, т. е. $(c-b)(c-2b)=4(b-c)$. Так как согласно условию $b-c\neq 0$, то сокращая последнее равенство на $b-c$, получим $c-2b=-4$, или $c=2b-4$. Поэтому первое уравнение принимает вид $x^2+bx+2b-4=0$. Его корни, как легко убедиться, — числа -2 и $2-b$, т. е. целые неположительные числа.

10.3. Ответ: нет. Обозначим $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $m_b=BB_1$, $m_c=CC_1$.



Пусть $r(CBB_1)$, $r(BMC_1)$ — радиусы вписанных окружностей треугольников ABB_1, BMC, CBB_1, BMC_1, соответственно, а $S(CBB_1)$, $S(BMC_1)$ — площади этих треугольников. Пусть также $S(ABC)$ — площадь треугольника ABC. Легко видеть, что

$$S(CBB_1)=\frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC_1)=\frac{1}{6}S(ABC). \qquad (1)$$

Кроме того,

$$S(CBB_1)=r(CBB_1)(a+\frac{1}{2}b+m_b)\frac{1}{2},\ S(BMC_1)=r(BMC_1)(\frac{1}{2}c+\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_c)\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Поэтому в силу (1) и (2) равенство $r(BB_1)=r(BMC_1)$ равносильно равенству

$$2(a+\frac{1}{2}b+m_b)=6(\frac{1}{2}c+\frac{2}{3}m_b+\frac{1}{3}m_c) \quad \Longleftrightarrow \quad m_b+m_c+\frac{3}{2}c=a+\frac{1}{2}b. \qquad (3)$$

Однако, из неравенства треугольника следует, что

$$\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c=BM+MC>BC=a$$

$$\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}m_c+\frac{1}{3}m_b=AC_1+C_1M+MB_1>AB_1=\frac{1}{2}b.$$

Следовательно, равенство (3) невозможно, а, значит, невозможно и равенство $r(BB_1C)=r(BMC_1)$.

10.4. Пусть на рёбрах треугольной пирамиды $OABC$ записаны числа a, b, c, d, e, f так, как показано на рис. 1.

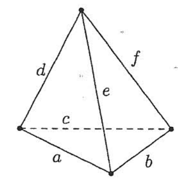


Рис. 1

Докажем, что каждое из утверждений **а)** и **б)** равносильно утверждению:

в) если два ребра не имеют общей точки (т. е. являются скрещивающимися), то на них записаны одинаковые числа.

Докажем вначале, что если утверждение **а)** верно, то верно и утверждение **в)**. Действительно, рассмотрим какие-либо два скрещивающихся ребра — например, AB и OC. Тогда сумма чисел, которые записаны на рёбрах, выходящих из вершины B, равна $a+e+b$, а выходящих из вершины O — равна $d+e+f$. Так как утверждение **а)** верно, то эти суммы равны, т. е. $a+e+b=d+e+f$, или

$$a+b=d+f. \qquad (1)$$

Точно так же, сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки A, равна $a+c+d$, а выходящих из точки C — равна $b+c+f$. Так как утверждение **а)** верно, то эти суммы равны, т. е. $a+c+d=b+c+f$, или

$$a+d=b+f. \qquad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим $2a+b+d=b+d+2f$, или $a=f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа.

Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB. Пусть около отрезков AB и OC записано по числу a, около отрезков BC и OA — по числу b, и около отрезков AC и OB — по числу c (см. рис. 2). Импликация **а)** $\Longrightarrow$ **в)** доказана. Обратная импликация **в)** $\Longrightarrow$ **а)** очевидно вытекает из рис. 2. Следовательно, утверждения **а)** и **в)** равносильны.

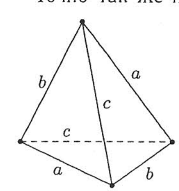


Рис. 2

Докажем теперь, что если утверждение **б)** верно, то верно и утверждение **в)**. Покажем, например, что на рёбрах AB и OC записаны одинаковые числа. Действительно, рассмотрим грани ABC и OAC

тетраэдра (см. рис. 1). Сумма чисел, стоящих на рёбрах грани AB, равна $a+b+c$, а стоящих на грани OAC – равна $d+f+c$. Так как утверждение **б)** верно, то эти суммы равны: $a+b+c=d+f+c$, или $a+b=d+f$, т. е. имеет место равенство (1). Рассмотрим две другие грани OAB и OBC тетраэдра (см. рис. 1). Сумма чисел, стоящих на рёбрах грани OAB, равна $a+d+e$, а стоящих на грани OBC – равна $b+e+f$. Так как утверждение **б)** верно, то эти суммы равны: $a+d+e=b+e+f$, или $a+d=b+f$, т. е. имеет место равенство (2). Сложив почленно равенства (1) и (2), получим $2a+b+d=b+d+2f$, или $a=f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа. Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB, т. е. числа записаны так, как показано на рис. 2. Импликация **б)** $\Longrightarrow$ **в)** доказана. Обратная импликация **в)** $\Longrightarrow$ **б)** очевидно вытекает из рис. 2. Следовательно, утверждения **б)** и **в)** равносильны.

Поскольку, как доказано, утверждения **а)** и **б)** порознь равносильны утверждению **в)**, то утверждения **а)** и **б)** равносильны.

11 класс

11.1. Пусть эти числа: x, y, z и t. Тогда по условию

$$x+y+z+t=22, \quad xy+xz+xt+yz+yt+zt=105, \quad xyzt=64.$$

Так как все числа $x,\ y,\ z,\ t>0$, то $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$, $t=d^2$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Нужно показать, что одно из них равно сумме трех остальных, т. е., что равносильно, $A=(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)=0$. Имеем:

$$A=((b+c)+(a-d))\cdot((b+c)-(a-d))\cdot((a+d)-(b-c))\cdot((a+d)+(b-c))=$$

$$=((b+c)^2-(a-d)^2)\cdot((a+d)^2)-(b-c)^2)=$$

$$=((2bc+2ad)+(b^2+c^2-a^2-d^2))\cdot((2bc+2ad)-(b^2+c^2-a^2-d^2))=$$

$$=2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-(a^4+b^4+c^4+d^4)+8abcd=$$

$$=4(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+8abcd=4B-C^2+8D,$$

где $B=a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2=xy+xz+xt+yz+yt+zt=105$, $C=a^2+b^2+c^2+d^2=x+y+z+t=22$, $D=abcd=\sqrt{xyzt}=\sqrt{64}=8$. В результате, $A=4\cdot105-22^2+8\cdot8=420-484+64=0$, что и требовалось доказать.

11.2. Ответ: $a\in(-2,2)$. проверить при $a=\pm2$ отдельно.

Пусть $a\in\mathbb{R}$ таково, что для него существует функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой равенство

$$f(x)+axf(1-x)=x^2-2x. \qquad (1)$$

выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$. Поскольку равенство (1) выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$, то, заменив в (1) x на $1-x$, получим равенство, также выполненное при всех $x\in\mathbb{R}$, т. е.

$$f(1-x)+a(1-x)f(x)=(1-x)^2-2(1-x) \qquad (2)$$

при всех $x\in\mathbb{R}$. Рассмотрим равенства (1) и (2) как систему линейных уравнений относительно $f(x)$ и $f(1-x)$ и решим её относительно $f(x)$. Умножив уравнение (2) на $-ax$ почленно сложив полученное уравнение с уравнением (1), придём после очевидных преобразований к равенству

$$(a^2x^2-a^2x+1)f(x)=-x(ax^2-x+2-a), \qquad (3)$$

верному при всех $x\in\mathbb{R}$.

Если квадратный трёхчлен $a^2x^2-a^2x+1$ не имеет действительных корней, т. е. если

$$a\neq0 \quad \text{и} \quad a^4-4a^2<0, \qquad (4)$$

то из (3) находим, что

$$f(x)=-\frac{x(ax^2-x+2-a)}{a^2x^2-a^2x+1} \quad \text{для всех} \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

С другой стороны, несложно убедиться, что функция (5), определённая при выполнении условия (4) при всех $x\in\mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению (1). Обстоятельством, облегчающим такую проверку, является то, что знаменатель дроби в (5) не меняется при замене x на $1-x$. Следовательно, так как условия (4) равносильны включению $x\in(-2,0)\bigcup(0,2)$ и очевидно, что при $a=0$ решением уравнения (1) является функция $f(x)=x^2-2x$, то при $a\in(-2,2)$ функциональное уравнение (1) имеет решения, определённые при всех $x\in\mathbb{R}$. При $a=\pm2$

Докажем теперь, что при $a\notin(-2,2)$ равенство (3) не может быть выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$. Для этого докажем вначале, что при $a\notin(-2,2)$ многочлен-сомножитель $a^2x^2-a^2x+1$ в левой части равенства (3) имеет корень, не являющийся корнем правой части равенства (3). В самом деле, так как при $a\notin(-2,2)$ квадратный трёхчлен $a^2x^2-a^2x+1$ имеет корни и оба они очевидно ненулевые, то если бы оба корня были и корнями многочлена $-x(ax^2-x+2-a)$ – правой части равенства (3) – то оба эти корня были бы корнями квадратного трёхчлена $ax^2-x+2-a$, а значит, квадратные трёхчлены $a^2x^2-a^2x+1$ и $ax^2-x+2-a$ отличались бы только вещественным множителем, т. е. отношения их коэффициентов при одинаковых степенях были бы равны. В частности, выполнялось бы равенство $\dfrac{a^2}{a}=\dfrac{-a^2}{-1}$, из которого находим $a=1$, что невозможно, поскольку $a\notin(-2,2)$. Следовательно, если x_a – корень трёхчлена $a^2x^2-a^2x+1$, не являющийся корнем правой части (3), то при $x=x_a$ левая часть (3) равна нулю, а правая нет. Поэтому при $a\notin(-2,2)$ равенство (3) не может быть выполнено при всех $x\in\mathbb{R}$.

11.3. Обозначим $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $m_b=BB_1$, $m_c=CC_1$. Пусть $r(ABB_1)$, $r(BMC)$, $r(CBB_1)$, $r(BMC_1)$ – радиусы вписанных окружностей треугольников ABB_1, BMC, CBB_1, BMC_1, соответственно, а $S(ABB_1)$, $S(BMC)$, $S(CBB_1)$, $S(BMC_1)$ – площади этих треугольников. Пусть также $S(ABC)$ – площадь треугольника ABC. Легко видеть, что

$$S(ABB_1)=\frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC)=\frac{1}{3}S(ABC), \qquad (1)$$

$$S(CBB_1)=\frac{1}{2}S(ABC), \quad S(BMC_1)=\frac{1}{6}S(ABC). \qquad (2)$$

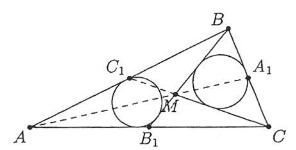


Рис. 1

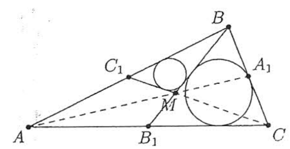


Рис. 2

Кроме того,

$$S(ABB_1)=r(ABB_1)(c+\frac{1}{2}b+m_b), \quad S(BMC)=r(BMC)(a+\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c), \qquad (3)$$

$$S(CBB_1) = r(CBB_1)(a + \frac{1}{2}b + m_b), \quad S(BMC_1) = r(BMC_1)(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c). \qquad (4)$$

Поэтому в силу (1) и (3) равенство $r(ABB_1) = r(BMC)$ равносильно равенству

$$2(c + \frac{1}{2}b + m_b) = 3(a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c) \iff 2m_c = 2c + b - 3a. \qquad (5)$$

Аналогично, в силу (2) и (4) равенство $r(CBB_1) = 2r(BMC_1)$ равносильно равенству

$$2(a + \frac{1}{2}b + m_b) = 3(\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c) \iff 2m_c = 4a + 2b - 3c. \qquad (6)$$

Используя формулу для вычисления длины медианы, получим, что (5) равносильно

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 = 4c^2 + b^2 + 9a^2 + 4bc - 12ac - 6ab \iff$$

$$7a^2 - b^2 + 5c^2 + 4bc - 12ac - 6ab = 0, \qquad (7)$$

при условии

$$2c + b - 3a > 0, \qquad (8)$$

а (6) равносильно

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 = 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 16ab - 24ac - 12bc \iff$$

$$7a^2 + b^2 + 5c^2 + 8ab - 12ac - 6bc = 0, \qquad (9)$$

при условии

$$4a + 2b - 3c > 0. \qquad (10)$$

Для завершения доказательства утверждения задачи нам осталось показать, что условия (7), (8) равносильны условиям (9), (10). Для этого заметим, что, если (5) и (6) равносильны, то $7a + b - 5c = 0$. Разложив левые части равенств (7) и (9) на множители, получим

$$7a^2 - b^2 + 5c^2 + 4bc - 12ac - 6ab = (7a + b - 5c)(a - b - c),$$

$$7a^2 + b^2 + 5c^2 + 8ab - 12ac - 6bc = (7a + b - 5c)(a + b - c).$$

Так как из неравенства треугольника следует, что $(a - b - c) \neq 0$ и $a + b - c) \neq 0$, то равенства (7) и (9) равносильны друг другу и равносильны равенству $7a + b - 5a = 0$. Но тогда из (8) следует (10), так как

$$2c + b - 3a > 0,\ 7a + b - 5c = 0 \implies 0 < (2c + b - 3a) + (7a + b - 5c) = 4a + 2b - 3c,$$

а из (10) следует (8), так как

$$4a + 2b - 3c > 0,\ 7a + b - 5c = 0 \implies 0 < (4a + 2b - 3c) - (7a + b - 5c) = 2c + b - 3a.$$

Таким образом, условия (7), (8) равносильны условиям (9), (10), что и требовалось доказать.

11.4. Ответ: наименьшее $r = -2$.

Допустим, что числа $1, 2, \ldots, 11$ и r расставлены на рёбрах куба так, как требуется в условии задачи. Через S обозначим сумму чисел на рёбрах, выходящих из произвольной вершины куба (согласно условию эта сумма одна и та же для каждой вершины).

Запишем в каждой вершине куба число, равное сумме чисел, стоящих на выходящих из неё рёбрах. Так как для каждой вершины куба это число равно S, то сумма чисел, записанных во всех восьми вершинах куба, равна $8S$. С другой стороны, как легко видеть, сумма $8S$ — это в точности такая сумма, в которой каждое число, стоящее на ребре, подсчитано дважды: для каждой из вершин ребра, на котором оно стоит. Поэтому

$$8S = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 11 + r), \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S. \qquad (*)$$

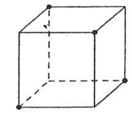


Рис. 1

К этому результату можно прийти и по-другому. Рассмотрим четыре вершины куба, обозначенные на рис. 1 жирными точками. Тогда, сумма чисел на рёбрах, выходящих из этих четырёх вершин, равна, с одной стороны, $4S$, а с другой, как легко видеть, она равна сумме всех чисел, стоящих на рёбрах куба, т. е.

$$4S = 1 + 2 + \ldots + 11 + r, \quad \text{или} \quad 66 + r = 4S.$$

Из равенства $(*)$ находим, что $r = 4S - 66 = 2(2S - 33)$, а так как S — целое, то r — целое чётное число. (Можно утверждать даже больше: r — чётное число, не делящееся нацело на 4, поскольку $r = 4(S - 17) + 2$, но этот факт нам не понадобится.)

Оценим теперь величину числа r снизу. Пусть число r стоит на ребре XY, а на остальных рёбрах, выходящих из вершин X и Y, стоят числа x_1, x_2, x_3 и x_4. Тогда сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из вершины X, и рёбрах, выходящих из вершины Y, равна, с одной стороны, $2S$, а с другой — она равна $2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, т. е. поскольку в силу второго равенства в $(*)$ $2S = 33 + \frac{r}{2}$, имеем равенство

$$33 + \frac{r}{2} = 2r + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad \text{или} \quad \frac{3}{2}r = 33 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \qquad (**)$$

Но числа x_1, x_2, x_3 и x_4 — это какие-то попарно различные из чисел $1, 2, \ldots, 11$. Поэтому $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 8 + 9 + 10 + 11 = 38$. Тогда из второго равенства в $(**)$ получаем неравенство $\frac{3}{2}r \geqslant 33 - 38 = -5$, а значит, $r \geqslant -3\frac{1}{3}$. Поскольку, как доказано выше, число r чётное, то $r \geqslant -2$.

Остаётся на рёбрах куба расставить числа $1, 2, \ldots, 11$ и -2, так, чтобы выполнялось условие задачи — см. рис. 2, на котором для большего удобства расстановки чисел на рёбрах куба вместо привычной параллельной проекции куба, как на рис. 1, изображена его центральная проекция. Для расстановки чисел $1, 2, \ldots, 11$ и -2, удовлетворяющей условию задачи, необходимо вначале из равенства $(*)$ при $r = -2$ найти, что в этом случае $S = 16$. После этого нужную расстановку несложно получить при помощи простых соображений и небольшого перебора.

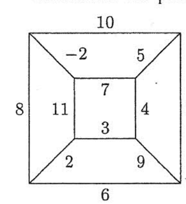


Рис. 2