LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1)$ и $(3,\ 1,\ 2)$.

Заметим, что $(ab^2+bc^2+ca^2)-(a^2b+b^2c+c^2a)=(a-b)(b-c)(c-a)$ (легко убедиться, раскрыв скобки в обеих частях данного равенства). Поэтому согласно условию $(a-b)(b-c)(c-a)=25-23=2$. Тогда, так как произведение трех целых чисел $a-b$, $b-c$ и $c-a$ равно 2, а их сумма, очевидно, равна 0, одно из этих чисел равно 2, а два других числа равны -1. Например, $a-b=-1$, $b-c=-1$, $c-a=2$. Тогда $a=b-1$, а $c=b+1$. Подставив вместо a и c выражения из правых частей этих равенств в первое уравнение из условия задачи, получим $(b-1)^2b+b^2(b+1)+(b+1)^2(b-1)=23 \ \Leftrightarrow\ b^3=8 \ \Leftrightarrow\ b=2$ и тогда $a=1$, $c=3$. Иными словами, тройка чисел $(1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяет условию задачи. Аналогично находим еще два решения: $(2,\ 3,\ 1)$ и $(3,\ 1,\ 2)$.

8.2. Ответ: 12 школьников.

Пусть в 8"А"классе учится n школьников, тогда согласно условию в 8"Б"учится $m=50-n$ школьников. Далее, пусть средняя оценка по математике школьников 8"А"класса равна a, средняя оценка в 8"Б"классе равна b. Если x учащихся из 8"А"класса перевести в 8"Б"класс и столько же школьников из 8"Б"класса перевести в 8"Б"класс, то 8"А"классе будет $n-x$ школьников со средней оценкой a по математике и x школьников со средней оценкой b. Тогда средняя оценка по математике всех школьников этого класса будет равна $\dfrac{(n-x)a+xb}{n}$. Аналогично, средняя оценка по математике всех школьников 8"Б"класса, где учится $50-n$ школьников, станет равна $\dfrac{(m-x)b+xa}{m}$. Приравнивая эти оценки получаем:

$$\frac{(n-x)a+xb}{n}=\frac{(m-x)b+xa}{m} \quad\Leftrightarrow\quad m(n-x)a+mbx=nb(m-x)+nax \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad nma+mx(b-a)=nmb-nx(b-a) \quad\Leftrightarrow\quad (n+m)x(b-a)=nm(b-a),$$

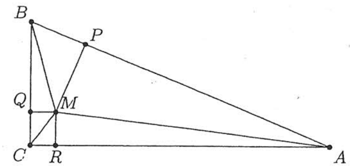
откуда, учитывая, что по условию $b-a\neq 0$, находим $x=\dfrac{nm}{n+m}=\dfrac{n(50-n)}{50}$. Так как число x — целое, то n — четное число. В противном случае, если n — нечетное, то $n(50-n)$ — произведение двух нечетных чисел — не делится на 2 и, значит, не может делиться на 50. Точно так же, n должно быть кратно 5. Иначе, если n не делится на 5, то и $(50-n)$ не делится на 5 и, значит, произведение $n(50-n)$ не делится на 5 и поэтому не может делиться на 50. Таким образом, n делится на 10 и, поскольку по условию $n>10$ и $50-n>10$, то $n=20$ или $n=30$. В обоих случаях получаем $x=12$, т. е. средние оценки по математике 8"А"класса и 8"А"класса можно уровнять, если перевести из одного класса в другой по 12 школьников.

8.3. Ответ $5/3$.

Заметим, что треугольник ABC прямоугольный, поскольку $AB^2=169=25+144=BC^2+AC^2$. Следовательно, $\angle ACB=90°$. Пусть $MP\perp AB$, $MQ\perp BC$, $MR\perp AC$ (см. рис.). Вычислим площади $S(ABC)$, $S(AMB)$, $S(BMC)$, $S(AMC)$ треугольников ABC, AMB, BMC, AMC:

$$S(ABC)=0,5AC\cdot BC=30,\ S(AMB)=0,5MP\cdot AB=0,5\cdot 39,$$

$$S(BMC)=0,5MQ\cdot BC=0,5\cdot 5,\ S(AMC)=0,5MR\cdot AC=0,5MR\cdot 12.$$



Поскольку $S(ABC)=S(AMB)+S(BMC)+S(AMC)$, то $MR=4/3$. Четырехугольник $RMQC$ — прямоугольник, поэтому его диагональ MC может быть найдена по теореме Пифагора:

$$MC=\sqrt{MQ^2+CQ^2}=\sqrt{MQ^2+MR^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}.$$

8.4. Ответ: 1, 2, 3.

Пусть около отрезков записаны числа a, b, c, d, e, f так, как показано на рис. 1. Докажем вначале, что если два отрезка не имеют общей точки, то около них записаны одинаковые числа. Действительно, рассмотрим какие-либо два не имеющие общей точки отрезка — например, AB и OC. Тогда сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки B, равна $a+e+b$, а выходящих из точки O — равна $d+e+f$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+e+b=d+e+f$, или

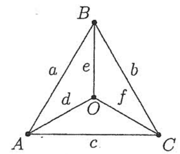


Рис. 1

$$a+b=d+f. \qquad (*)$$

Точно так же, сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из точки A, равна $a+d+c$, а выходящих из точки C — равна $b+f+c$. Так как по условию эти суммы равны, то $a+d+c=b+f+c$, или

$$a+d=b+f. \qquad (**)$$

Сложив почленно равенства $(*)$ и $(**)$, получим $2a+b+d=b+d+2f$, или $a=f$, т. е. около отрезков AB и OC записаны одни и те же числа.

Точно так же получаем, что одни и те же числа записаны около отрезков BC и OA и что одни и те же числа записаны около отрезков AC и OB. Пусть около отрезков AB и OC записано по числу a, около отрезков BC и OA — по числу b, и около отрезков AC и OB — по числу c (см. рис. 2). Итак, среди шести чисел, записанных около отрезков, не более трёх различных, а все шесть чисел разбиваются на пары равных. Следовательно, так как по условию нам известно, что среди записанных чисел имеются три различных — это 1, 2 и 3, то отличных от них чисел около отрезков записано быть не может, а значит, остальные записанные числа — это также 1, 2 и 3.

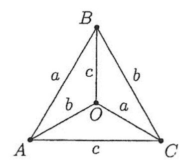


Рис. 2

9 класс

9.1. Достаточно доказать, что $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$. Заметим, что

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2+3abc.$$

Тогда

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=a^2b+ab^2+b^2c+dc^2+c^2a+ca^2-2abc-a^3-b^3-c^3=$$