УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2011 г.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

8 класс

Первый день

1. Найдите все тройки целых чисел $(a,\ b,\ c)$, таких, что

$$a^2b + b^2c + c^2a = 23, \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 = 25.$$

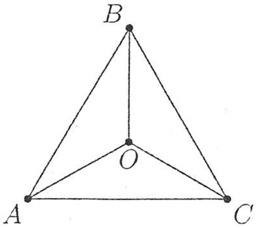
2. В 8"А"и 8"Б"классах некоторой школы вместе учится 50 школьников, более 10 школьников в каждом классе. Подводя итоги учебы за год, директор школы заметил, что среднегодовая оценка по математике у каждого ученика 8"А"одна и та же, причем весьма высокая. В 8"Б"классе также среднегодовая оценка по математике одна та же у всех учащихся этого класса, но заметно ниже, чем в 8"А"классе. Однако, после некоторых вычислений директор обнаружил, что можно перевести несколько школьников из 8"А"класса в 8"Б"класс и столько же школьников из 8"Б"класса в 8"А"класс так, что среднегодовые оценки по математике в этих классах выровняются: средняя оценка учащихся 8"А"класса станет равна средней оценке учащихся 8"Б"класса. (Сренегодовая оценка одного или нескольких школьников определяется как сумма всех их оценок за год, деленная на количество этих оценок, т. е. не обязательно является целой.)

Определите, сколько школьников из одного класса нужно перевести в другой класс, чтобы сренегодовые оценки по математике в этих классах выровнялись.

3. Внутри треугольника ABC отмечена точка M, расстояния от которой до сторон AB и BC равны соответственно 3 и 1.

Найдите расстояние между точками M и C, если $AB = 13$, $AC = 12$, $BC = 5$.

4. Внутри треугольника ABC взята точка O и соединена отрезками с его вершинами. Около каждого из отрезков AB, BC, AC, OA, OB, OC записали по числу. Оказалось, что для каждой точки A, B, C и O сумма чисел, которые записаны на отрезках, выходящих из этой точки, одна и та же для любой из этих точек. Известно, что около каких-то трёх отрезков записаны числа 1, 2 и 3.



Найдите числа, которые записаны около остальных трёх отрезков.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2011 г.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2011 года

9 класс

Первый день

1. Три действительных числа a, b и c удовлетворяют условиям

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5abc = 2, \quad (a + b + c)(ab + bc + ca) = 2.$$

Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.

2. Положительные попарно различные действительные числа a, b, c таковы, что квадратные уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $(b+3a)x^2+(c-b)x+a-c=0$ имеют по два различных корня, причём сумма всех четырёх корней этих уравнений равна их произведению.

Найдите меньший корень второго из этих уравнений.

3. BM, CK, CN – медианы треугольников ABC, CBM, CKM соответственно. P и Q – точки пересечения стороны AB с прямыми CN и CK соответственно.

Найдите отношения $AP : PQ$ и $AQ : QB$.

4. На рёбрах куба нужно расставить двенадцать чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и некоторое действительное число r (по одному числу на каждом ребре, и все эти числа должны быть расставлены), так, чтобы сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из любой вершины куба, была одна и та же для каждой вершины.

При каком наибольшем r это можно сделать?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2011 г.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

10 класс

Первый день

1. Три действительных числа a, b и c удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \quad \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=-4.$$

Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.

2. Различные натуральные числа b и c, большие 1, таковы, что каждое из уравнений $x^2+bx+c=0$ и $(b-1)x^2+(2c-b)x+(c-3b)=0$ имеет по два различных корня, причём сумма всех четырёх корней этих уравнений равна половине их произведения.

Докажите, что корни первого из этих уравнений являются целыми числами.

3. Пусть M – точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 треугольника ABC.

Может ли радиус вписанной в треугольник BB_1C окружности быть равен радиусу окружности, вписанной в треугольник BMC_1?

4. На каждом ребре треугольной пирамиды записано по одному числу.

Докажите, что следующие утверждения **а)** и **б)** равносильны:

а) для каждой вершины пирамиды сумма чисел, которые записаны на рёбрах, выходящих из этой вершины, одна и та же для любой вершины;

б) для каждой грани пирамиды сумма чисел, которые записаны на рёбрах этой грани, одна и та же для любой грани.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

19 декабря 2011 г.

LXII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

9 – 12 января 2012 года

11 класс

Первый день

1. Сумма четырех положительных чисел равна 22, сумма всех их попарных произведений равна 105, а произведение этих четырех чисел равно 64.

Докажите, что квадратный корень из одного из этих чисел равен сумме квадратных корней из остальных трех чисел.

2. Найдите все действительные числа a, при которых существует функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что при любом действительном x справедливо равенство

$$f(x) + axf(1-x) = x^2 - 2x.$$

3. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC.

Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника ABB_1 равен радиусу вписанной окружности треугольника BMC тогда и только тогда, когда радиус вписанной окружности треугольника CBB_1 в два раза больше радиуса вписанной окружности треугольника BMC_1.

4. На рёбрах куба нужно расставить двенадцать чисел $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ и некоторое действительное число r (по одному числу на каждом ребре, и все эти числа должны быть расставлены), так, чтобы сумма чисел, которые стоят на рёбрах, выходящих из любой вершины куба, была одна и та же для каждой вершины.

При каком наименьшем r это можно сделать?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов