УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИТЕБСКОГО ОБЛИСПОЛКОМА

О Т В Е Т Ы
второго этапа (районного, городского)
республиканской олимпиады
по математике
для учащихся 8 – 11 классов
учреждений образования Витебской области
(2014-2015 учебный год)

ВИТЕБСК • 2014

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ

При проверке и оценивании работ учащихся жюри руководствуется следующими критериями оценки:

1. Решение каждой задачи оценивается **7 баллами**. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Все оценки должны быть **целыми** числами. Задача считается решенной, если решение оценено не ниже, чем в 5 баллов и нерешенной, если оценка не превосходит 3 баллов. Оценка в 4 балла может толковаться по-разному, в зависимости от конкретной ситуации.

2. Оценки выставляются на основе следующих критериев:

Оценка в баллах	Критерии оценки
7	Верное решение
6	Верное решение с недочетами
5	Решение в целом верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
4	Рассуждения содержат большую часть решения, но в них есть существенные пробелы или ошибки
1 – 3	Решения в целом нет, но есть более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается ***неполным***, если:

- оно содержит все необходимые идеи, но не доведено до конца;
- оно в целом верное, но содержит более или менее легко устранимые пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;
- оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых рассмотрена, но некоторые, аналогичные рассмотренным, упущены.

3. При оценке решения на олимпиаде учитываются только его *правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность.* Нельзя снижать оценку за нерациональность решения (кроме редких случаев, когда это прямо предусмотрено указаниями по проверке задачи), нетиповое его оформление, исправления, помарки и т.п.

4. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических. К последним относятся, например, вычислительные ошибки в невычислительной задаче (алгебраические ошибки в вычислительной задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, как правило, следует относить к недочетам.

5. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Однако не следует требовать от них большего уровня строгости изложения, чем принято в школьной практике. На олимпиаде умение хорошо *догадываться* должно цениться выше, чем умение хорошо излагать решение.

6. Ответ, найденный логическим путем, обычно оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

Ответы, решения, указания

8 класс

1. Ответ: 12.

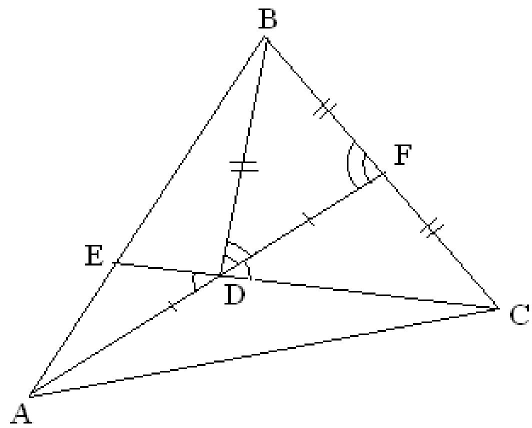
Решение: Мальчики и девочки чередуются, но при этом мальчиков в классе больше. Значит, мальчиков на 1 больше, чем, девочек. Поэтому шеренга начинается и кончается мальчиком. Приходим к уравнению

$\frac{x}{2x-1}=0.52$, где x – количество мальчиков.

Решая данное уравнение, находим, что $x = 13$, т.е. мальчиков. Следовательно, девочек 12.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше. Поэтому $\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ и $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$. Отсюда следует, что $\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

3. Требуется доказать, что треугольник EAD равнобедренный. Для этого достаточно проверить, что $\angle EAD=\angle EDA$. А так как $\angle EDA=\angle FDC$, то докажем, что $\angle EAD=\angle FDC$. Заметим, что треугольник DBF равнобедренный. Значит, $\angle BDF=\angle BFD$. Тогда $\angle ADB=\angle DFC$. Теперь мы видим, что треугольники ADB и DFC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle EDA=\angle FDC$, что и требовалось доказать.



4. <u>Способ I.</u> Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)–d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$$b+d\equiv a(b+d)(\text{mod } p).$$

Следовательно, $(a–1)(b+d) \vdots p$. Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a–1$ или $b+d$ делится на p. Но оба этих числа меньше p, и при этом $a>1$, (так как $a>b\geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

<u>Способ II</u>. (Удачное разложение). Из условия следует, что

$$(b–1)(a–1) = ab–a–b+1=cd+c+d+1=(c+1)(d+1).$$

Поэтому найдутся такие натуральные числа u_1, u_2, v_1, v_2, что $a–1 = u_1u_2$, $b–1 = v_1v_2$, $c+1 = u_1v_1$ и $d+1 = u_2v_2$. Тогда $a+c = u_1u_2+u_1v_1 = u_1(u_2+v_1)$. Чтобы доказать, что $a+c$ составное, достаточно проверить, что $u_1 \neq 1$. Предположим, что $u_1 = 1$. Тогда $a–1 = u_2$, $c+1 = v_1$ и $a+c = u_2+v_1 \leq v_1v_2+u_2v_2=b+d$, что противоречит условию.

Способ III. Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)–d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$–(b+d)+a(b+d) = (a+c)+d(a+c)$ или $(b+d)(a–1) = (a+c)(1+d)$. Тогда правая часть делится на $a+c=p$, т.е. и $(b+d)(a–1)$ делится на p.

Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a–1$ или $b+d$ делится на p. Но оба этих числа меньше p, и при этом $a>1$, (так как $a>b\geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

5. Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (*CFH*), (*BDE*), (*DEG*), (*ACF*).

Решение. Покрасим вершины *A*, *C*, *F*, *H*, в красный цвет, а остальные вершины – в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в 1 вершину другого цвета.

Сделаем первый залп по вершинам *C*, *F*, *H*.

Если заяц находился в красной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине *A*. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (*BDE*) обязательно достигнет цели.

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (*DEG*), а потом (*ACF*) обязательно поразят зайца.

9 класс

1. Ответ: наименьшее значение равно 1 (равенство достигается при $a=0$).

Решение: Пользуясь известным неравенством $x+\frac{1}{x}\geq 2$, справедливым для всех положительных чисел, заключаем, что

$$a^{2014}+a^4+\frac{1}{a^4+1}\geq a^4+\frac{1}{a^4+1}=(a^4+1)+\frac{1}{a^4+1}-1\geq 2-1=1.$$

2. Ответ: за 365 дней.

Решение: Если обозначить через v объем воды в озере, через w – объем воды, поступающий за сутки из родников, а через z – объем воды, выпиваемой в сутки одним слоном, то условие задачи можно записать в виде системы двух уравнений $v+w=183z$, $v+5w=5\cdot 37z$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим, что $4w=2z$, значит, $v=365w$. Пусть один слон выпивает озеро за x дней, тогда $v+xw=xz$. Подставляя $z=2w$, получим $v=xw$. Но мы уже знаем, что $v=365w$, поэтому слон осушит озеро за 365 дней, после чего понадобится еще два года, чтобы озеро вновь наполнилось из родников.

3. <u>Способ I.</u> Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)–d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$$b+d \equiv a(b+d) \pmod p.$$

Следовательно, $(a–1)(b+d) \vdots p$. Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a–1$ или $b+d$ делится на p. Но оба этих числа меньше p, и при этом $a>1$, (так как $a>b\geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

<u>Способ II</u>. (Удачное разложение). Из условия следует, что

$$(b–1)(a–1) = ab–a–b+1=cd+c+d+1=(c+1)(d+1).$$

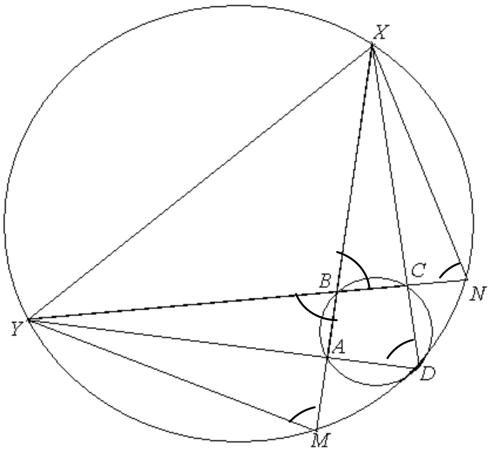
Поэтому найдутся такие натуральные числа u_1, u_2, v_1, v_2, что $a–1 = u_1u_2$, $b–1 = v_1v_2$, $c+1 = u_1v_1$ и $d+1 = u_2v_2$. Тогда $a+c = u_1u_2+u_1v_1 = u_1(u_2+v_1)$. Чтобы доказать, что $a+c$ составное, достаточно проверить, что $u_1 \neq 1$. Предположим, что $u_1 = 1$. Тогда $a–1 = u_2$, $c+1 = v_1$ и $a+c = u_2+v_1 \leq v_1v_2+u_2v_2=b+d$, что противоречит условию.

<u>Способ III.</u> Запишем данное равенство в виде $b+d+(a+c) = a(b+d)–d(a+c)$. Обозначим через p число $a+c$, т.е. $a+c=p$. Тогда

$–(b+d)+a(b+d) = (a+c)+d(a+c)$ или $(b+d)(a–1) = (a+c)(1+d)$. Тогда правая часть делится на $a+c=p$, т.е. и $(b+d)(a–1)$ делится на p.

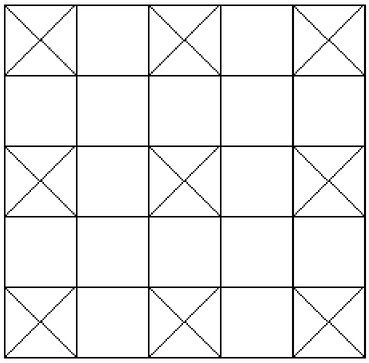
Если число p – простое, то хотя бы одно из чисел $a–1$ или $b+d$ делится на p. Но оба этих числа меньше p, и при этом $a>1$, (так как $a>b\geq 1$). Значит, указанная делимость невозможна и число $a+c$ составное.

4. Решение. На хорду XY опираются равные углы $\angle YMX$, $\angle YDX$, $\angle YNX$. Кроме того, в силу вписанности четырехугольника $ABCD$ равны углы $\angle YBM$, $\angle XBN$, $\angle YDX$. Таким образом, в треугольниках MYB и BXN есть пары равных углов. Следовательно, они равнобедренные. Тогда $NX+MY=YB+XB>XY$.



5. Ответ:128 диагоналей.

Решение. Достаточно провести по две диагонали в клетках $a1$, $a3$, $a5$, $a7$, $a9$, $a11$, $a13$, $a15$, $c1$, $c3$, $c5$, …, $e1$, $e3$, $e5$, …



Докажем, что диагоналей не может быть больше 128. Квадрат 15×15 содержит $16^2=256$ углов сетки. Поскольку концы диагоналей не пересекаются и у каждой диагонали 2 конца, количество диагоналей не превосходит 256/2=128.

10 класс

1. Ответ: В школе 17 педагогов.

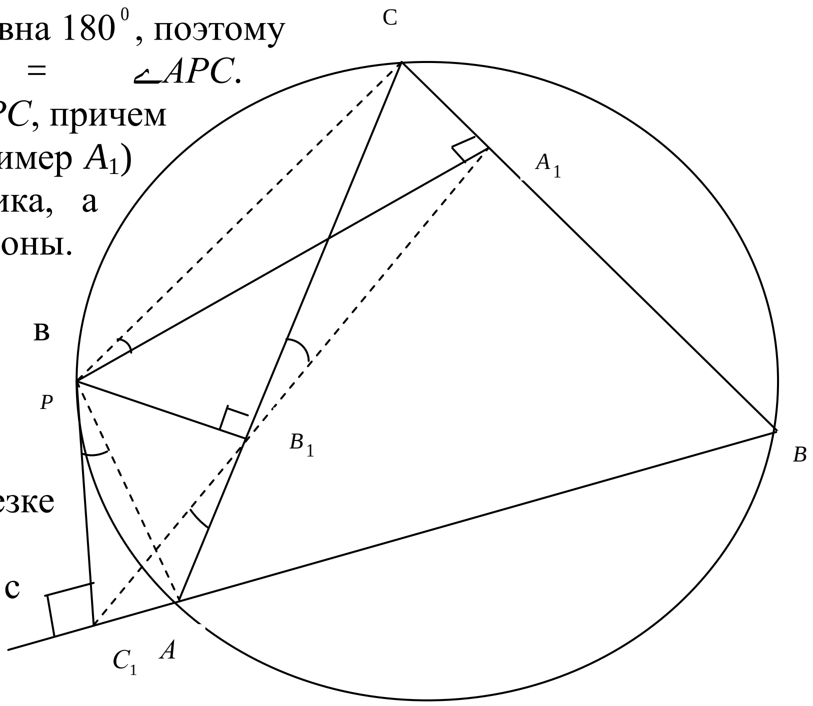
Решение: Пусть после перевода имелось m штатных педагогов, их суммарная зарплата равна $47m$ млн. рублей, и n внештатных педагогов с суммарной зарплатой $13n$ млн. рублей. Пусть зарплата педагога переведенного во внештатные, составляла x млн. рублей.

Ситуация до перевода описывается уравнениями

$$\frac{47\cdot \mathrm{m}+\mathrm{x}}{\mathrm{m}+1} = 45, \qquad \frac{13\cdot n-x}{n-1}=11$$

Умножив первое уравнение на m+1, второе на n–1 и сложив, получим $2\cdot(m+n)= 34$, т.е. $m+n=17$.

2. Решение: Пусть точка P лежит на дуге AC описанной окружности треугольника ABC; A_1, B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB. Сумма углов при вершинах A_1 и C_1 четырёхугольника A_1BC_1P равна 180^0, поэтому $\angle A_1PC_1=180^\circ - \angle B = \angle APC$. Следовательно, $\angle APC_1= \angle A_1PC$, причем одна из точек A_1 или C_1 (например A_1) лежит на стороне треугольника, а другая на продолжении стороны. Четырёхугольники AB_1PC_1 и A_1B_1PC можно вписать в окружность, поэтому $\angle AB_1C_1= \angle APC_1=$ $= \angle A_1PC= \angle A_1B_1C$, а значит, точка B_1 лежит на отрезке A_1C_1.



Если точка P совпадает с одной из вершин треугольника, то доказательство очевидно.

3. Решение: К левой и правой части равенства $56a= 65b$ прибавим $56b$. Получим $56\cdot(a+b)= 121\ b$. Так как НОД(56,121)= 1, то $(a+b) \vdots 121$. Это означает, что $a+b$ – составное число.

4. Ответ: -11

Решение: <u>Способ I.</u> Пусть для определенности трехчлен $f(x)$ – неотрицательный, a – его корень. Тогда часть данного уравнения неотрицательна и равенство возможно, только если

$2x$-3=$3x$ +1= а . Отсюда находим $x= –4$, $a = –11$.

Способ II. Пусть $f(x)= ax^2+bx+c$. Можно считать a=1. В противном случае поделим все коэффициенты трехчлена на a, от этого не изменятся ни его корни, ни корни уравнения

$f(2x\text{-}3)+f(3x+1)=0$. По условию трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень, значит, его дискриминант равен нулю, т.е $b^2 = 4c$. Выражение $g(x)= f(2x–3)+f(3x+1)$ также представляет собой квадратный трехчлен $g(x) = (2x–3)^2+b(2x–3) + c+(3x+1)^2+ b(3x+1)+c=13x^2 +(5b–6)x+(10–2b+2c)= 13x^2+(5b–6)x+(20–4b+b^2)/2$.

Он также имеет ровно один корень, следовательно, и его дискриминант равен нулю. Таким образом,

$0=(5b–6)^2 – 4\cdot13\cdot(20–4b+b^2)/2= b^2– 44b + 484$.

Мы получили квадратное уравнение относительно b, оно имеет единственное решение b=22. Стало быть $c = (b/2)^2$=121 и $f(x)= x^2+22x+121$. Единственным корнем трехчлена $f(x)$ является число –11.

5. Решение:

Способ I. Пусть a_1, a_2,…., a_{10} – это написанные на доске натуральные числа (в порядке возрастания). Поскольку среди них нет равных, из полученных 55 чисел самое маленькое – это a_1, самое большое – это сумма всех. Следовательно, $a_1+ a_2+ … + a_{10}$=54 и числа на доске – это просто 1, 2, … , 10. Заметим, что единица должна стоять с краю, иначе не может получится сумма 54. Аналогично с краю должна стоять и двойка ибо нам надо также получить и сумму 53. Далее надо получить сумму 51, поэтому рядом с единицей должна стоять тройка. Но тогда невозможно получить сумму 50.

Способ II. Аналогично устанавливаем, что на доске написаны числа 1, 2, … , 10. Поскольку всего возможных сумм 55 – столько же, сколько получившихся последовательных натуральных чисел, то все суммы должны быть различны. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим единицу. Рядом с ней может стоять только 10, поскольку если рядом будет число n≤9, то сумма чисел в паре с 1 и n равна n+1≤10. А такую же “сумму” даёт и одиночное число n+1. Значит, единица стоит с краю и рядом с ней 10. Рассмотрим теперь двойку. По аналогичным причинам рядом с ней может стоять только 9 или 10. Но если рядом стоит 9, то в паре с двойкой получаем 2+9=11=1+10, а такая сумма уже есть. Следовательно, двойка также стоит с краю и рядом с ней 10. Но это невозможно.

11 класс

1. Ответ: в учительской сидят 23 педагога

Решение:

Способ I. Пусть x педагогов пили чай, y – пили кофе, а возраст педагога Иван Ивановича равен s. Тогда суммарный возраст пьющих чай равен 22x, а после присоединения к ним Ивана Ивановича – 22x+s. Следовательно,

$\dfrac{22 \cdot x + s}{x+1}$ – средний возраст пьющих чай (вместе с Иваном Ивановичам). Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{22 \cdot x + s}{x+1}$=23, или, $x = s$–23.

Аналогично суммарный возраст пьющих кофе равен 45y, а без Ивана Ивановича – 45y–s. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{45 \cdot y - s}{y-1} = 46$ или, что тоже самое, y= 46-s.

Стало быть, x+y = (s–23) + (46–s)=23.

Способ II. (креветки).

Удобнее ввести рассуждения не с возрастами, а с какими-нибудь штучными объектами. Допустим, что каждый педагог купил себе количество креветок, равное его возрасту. По условию, можно полагать, что пьющие кофе и пьющие чай поровну распределили своих креветок.

Итак, за большим столом сидят s педагогов, пьющих кофе, перед каждым педагогом стоит чашка кофе и тарелка с 45 креветками. И тут один из них, Иван Иванович, встает, забирает своих креветок и идет за другой стол! Оставшиеся за столом педагоги вдруг видят, что теперь перед каждым лежит не 45, а 46 креветок! Что такое, откуда? Оказывается Иван Иванович, взяв со своей тарелке всех своих креветок, обнаружил, что на тарелке остались s-1 креветки, и он их по штучке разложил каждому сидящему за его столом.

Далее, подходит Иван Иванович к молодёжи, пьющей чай. Там за столом у педагогов, у каждого – чашка чая, тарелка с 22 креветками. Молодёжь удивилась, после прихода Ивана Ивановича у каждого на тарелке-то не 22 креветки, а 23. А это Иван Иванович оказывается, увидел, что креветок у него 22+k+1 штук, и он по одной каждому из k педагогов подложил (и у самого Ивана Ивановича тоже как раз 23 креветки осталось).

Вот и получается, что 45–(s–1)=22+k+1, откуда k+s=23.

2. Ответ: -11

Решение: Способ I. Пусть для определенности трехчлен $f(x)$ – неотрицательный, a – его корень. Тогда часть данного уравнения неотрицательна и равенство возможно, только если

2x-3=3x +1= a . Отсюда находим x= –4, a = –11.

Способ II. Пусть $f(x)= ax^2+bx+c$. Можно считать, a=1. В противном случае поделим все коэффициенты трехчлена на a, от этого не изменятся ни его корни, ни корни уравнения

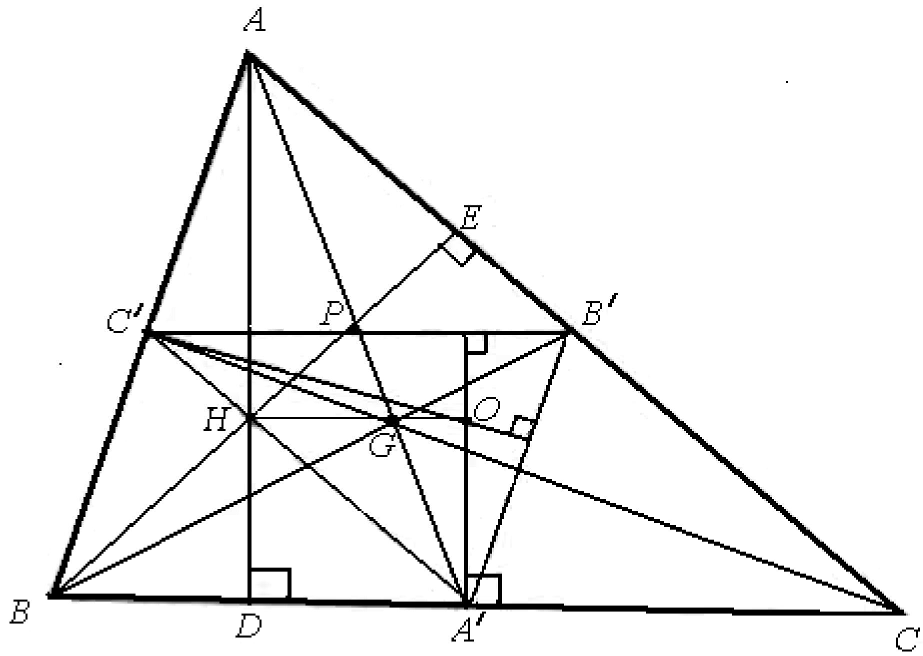
$f(2x\text{-}3)+f(3x+1)=0$. По условию трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень, значит, его дискриминант равен нулю, т.е b^2 = 4c. Выражение $g(x)= f(2x–3)+f(3x+1)$ также представляет собой квадратный трехчлен $g(x) = (2x–3)^2+b(2x–3) + c+(3x+1)^2+ b(3x+1)+c=13x^2 +(5b–6)x+(10–2b+2c)= 13x^2+(5b–6)x+(20–4b+b^2)/2$.

Он также имеет ровно один корень, следовательно, и его дискриминант равен нулю. Таким образом,

$0=(5b–6)^2 – 4\cdot 13\cdot(20–4b+b^2)/2= b^2– 44b + 484$.

Мы получили квадратное уравнение относительно b, оно имеет единственное решение b=22. Стало быть, $c = (b/2)^2$=121 и $f(x)= x^2+22x+121$. Единственным корнем трехчлена $f(x)$ является число –11.

3. Решение: (в нашем случае BC не параллельна HO)



Способ I (подробное). Точки C', B', A' – середины сторон AB, AC и BC треугольника ABC. Рассмотрим две медианы AA' и BB', пересекающиеся в точке G, две высоты ΔABC, пересекающиеся в точке H, и две высоты $\Delta A'B'C'$, пересекающиеся в точке О.

$\Delta A'B'C'$~$\Delta A'B'C'$ с коэффициентов подобия 1/2. Отрезки $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ разбивают ΔABC на четыре равных треугольника. Точка P – середина отрезка $B'C'$ и является серединой отрезка AA'.

Не сложно доказать, что $AC'A'B'$ – параллелограмм. Следовательно, прямая AA' делит пополам отрезок $B'C'$. Поэтому медианы $\Delta A'B'C'$ на медианах ΔABC, а это означает, что оба треугольника имеют один и тот же центроид (точка пересечения медиан) G.

Высоты $\Delta A'B'C'$, изображенные нами на рисунке, являются серединными перпендикулярами сторон AB и BC ΔABC. Отсюда делаем вывод, что точка O – ортоцентр (точка пересечения высот) $\Delta A'B'C'$ – является в то же время и центром окружности, описанной вокруг ΔABC, т.к. точа H – ортоцентр ΔABC, а точка O – ортоцентр подобного ему $\Delta A'B'C'$, то AH= 2OH'. Известно, что AG= 2GA'. И, наконец, так как оба отрезка AD и OA' перпендикулярны стороне BC, то они параллельны. Следовательно, $\angle HAG=\angle OA'G$, ΔHAG~$\Delta OA'G$ и $\angle AGH= \angle A'GO$. Этим показано, что точки O, G, H коллинеарные (то есть лежат на одной прямой) и HG=2GO

Способ II. Пусть A', B', C' – середины сторон BC, CA и AB. Треугольники $A'B'C'$ и ABC подобные, причем коэффициент подобия равен 2. Высоты треугольника $A'B'C'$ пересекаются в точке O, поэтому OA': HA = 1:2. Пусть G' –точка пересечение отрезков OH и AA' тогда OG': $G'H$= OA':HA= 1:2 и AG': $G'A'$= OA':HA=1:2, т.е. G'= G.

4 .Решение: Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел a_1 и a_2: $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Положим в этом неравенстве $a\sin^2\alpha = a_1$, $\frac{b}{\sin^2\alpha} = a_2$. Получим: $\frac{a \cdot \sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \sin^2\alpha \frac{b}{\sin^2\alpha}}$, откуда $a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}$, что и требовалось доказать.

5. Решение: Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6 (см. рис.1) и для любого расположения селедки рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых лежат данные нам 6 селедок (с учетом кратности).

Пример. Для расположения на рис. 2. S=2+2+4+4+5+6=23

Очевидно, что при сдвиге селедки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность. Значит, если сдвигаются одновременно две селедки, то четность величины S не меняется – она инвариантна. Но для расстановки на рис.1 S=21. Если же все селедки находятся в одном секторе с номером A, то S= $6 \cdot A$ – это четное число (а 21 – число нечетное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 селедок находятся в одном секторе.

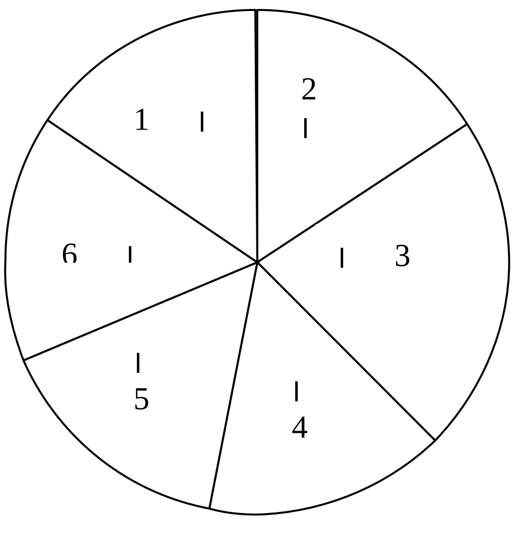


Рис.1

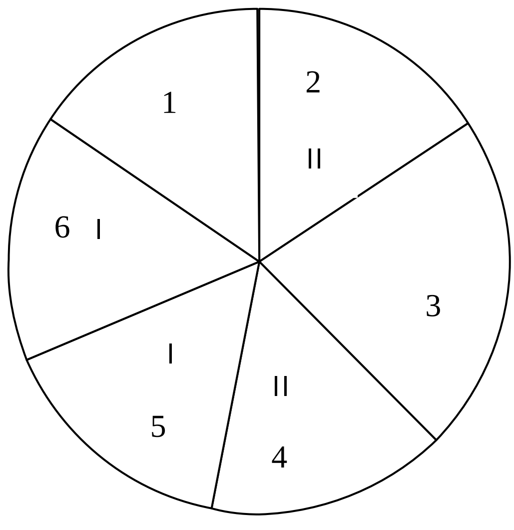


Рис.2