УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИТЕБСКОГО ОБЛИСПОЛКОМА

З А Д А Н И Я
второго этапа (районного, городского) республиканской олимпиады <u>по математике</u> для учащихся 8 – 11 классов учреждений образования Витебской области (2014-2015 учебный год)

ВИТЕБСК • 2014

Республиканская олимпиада по математике
второй районный (городской) этап 2014-2015 учебный год

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя областного оргкомитета республиканской олимпиады, первый заместитель начальника управления образования Витебского облисполкома
Л.М.Степанов

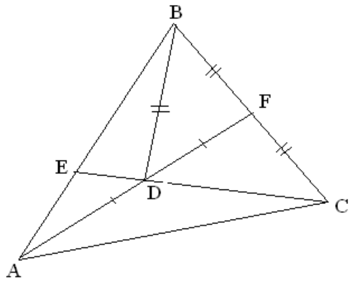
«05» ноября 2014

8 класс

1. На уроке физкультуры все ученики 8 «А» класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52% учеников 8 «А» класса – мальчики. Найдите количество девочек в 8 «А» классе. Не забудьте обосновать ответ.

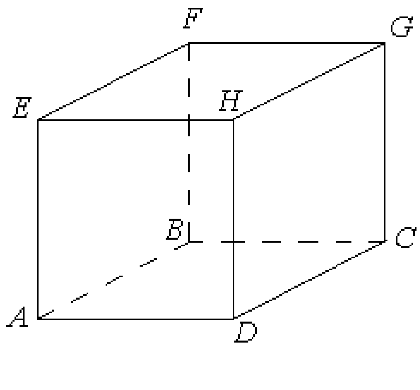
2. Доказать неравенство $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$, где $a > 0$ и $b > 0$.

3. AF – медиана треугольника ABC, D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD=BF=CF$. Докажите, что $AE=DE$.



4. Даны натуральные числа $a, b, c, d,$ где $a>b$ и $c>d$. Докажите, если $a+b+c+d=ab–cd,$ то число $a+c$ составное.

5. В одной из вершины куба сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа. (В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые стреляют охотники; объясните, почему эти тройки).



в

Республиканская олимпиада по математике
второй районный (городской) этап 2014-2015 учебный год

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя областного оргкомитета республиканской олимпиады, первый заместитель начальника управления образования Витебского облисполкома
Л.М.Степанов

«05» ноября 2014

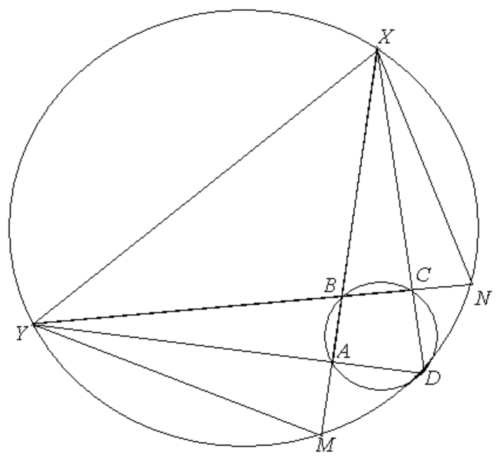
9 класс

1 Какое наименьшее значение может принимать величина $a^{2014}+a^4+\dfrac{1}{a^4+1}$, если a – произвольное действительное число?.

2. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

3. Даны натуральные числа a, b, c, d, где $a>b$ и $c>d$. Докажите, если $a+b+c+d=ab-cd$, то число $a+c$ составное.

4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и CD пересекаются в точке X, а лучи DA и CB в точке Y. Луч BA пересекает описанную окружность треугольника DXY в точке M, а луч BC пересекает ту же окружность в точке N. Докажите, что $NX+MY>XY$.



5. Квадрат 15×15 разбит на квадратики 1×1. Из этих квадратиков выбрали несколько и в каждом из выбранных провели одну или две диагонали. Оказалось, что никакие две проведенные диагонали не имеют общих концов. Какое наибольшее число диагоналей может быть проведено? (В решении приведите ответ, способ проведения диагоналей и доказательство того, что это число диагоналей действительно наибольшее возможное).

Республиканская олимпиада по математике
второй районный (городской) этап 2014-2015 учебный год

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя областного оргкомитета республиканской олимпиады, первый заместитель начальника управления образования Витебского облисполкома
Л.М.Степанов

«05» ноября 2014

10 класс

1. В некоторой средней школе работали штатные и внештатные педагоги, причем средняя зарплата штатных была равна 45 млн. бел. рублей в месяц, а внештатных – 11 млн. белорусских рублей в месяц. Для выполнения нацпроекта «Статистика» одного из штатных педагогов перевели во внештатные (не изменив его зарплату), в результате чего и у штатных, и у внештатных педагогов средняя зарплата увеличилась на 2 млн. в месяц. Сколько всего педагогов в школе?

2. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой.

3. $56a=65b$.Докажите, что $a+b$ – составное число.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3)+f(3x+1)=0$$

имеет ровно один корень. Найдите корень трёхчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

5. На доске в ряд выписаны 10 различных натуральных чисел. Саша вычислил сумму каждой пары подряд стоящих чисел. Затем он вычислил сумму каждых трёх подряд стоящих чисел, потом – каждых четырёх и т.д. и наконец сумму всех чисел на доске. Все найденные суммы, а также 10 исходных чисел Саша вперемешку записал в тетрадку. Мог ли у него получиться набор из первых 55 последовательных чисел?

Республиканская олимпиада по математике
второй районный (городской) этап 2014-2015 учебный год

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя областного оргкомитета республиканской олимпиады, первый заместитель начальника управления образования Витебского облисполкома
Л.М.Степанов

«05» ноября 2014

11 класс

1. В учительской средней школы сидят несколько педагогов. Некоторые из них пьют чай, а остальные – кофе. Средний возраст педагогов, пьющих чай – 22 года, а пьющих кофе – 45 лет. В один прекрасный момент педагог Иван Иванович поменял свой напиток. В результате оба средних возраста и пьющих чай, и пьющих кофе – увеличились ровно на 1 год. Сколько педагогов сидят в учительской?

2. Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+bx+c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение

$$f(2x-3)+f(3x+1)=0$$

имеет ровно один корень. Найдите b и c.

3. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – центр описанной окружности, G – точка, пересечения медиан. Докажите, что точка G лежит на отрезке OH, причем OG: GH=1:2.

4. Доказать неравенство

$$a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab},$$

если известно, что $a>0$, $b>0$, $\alpha\neq\pi n$.

5. Круг раздели на 6 секторов (см. рис.) в каждом из которых лежит по одной селедке. Разрешается за один ход сдвинуть любые две селедки в соседние с ним сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать всю селедку в одном секторе?