*УТВЕРЖДЕНО*

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

# LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

## III этап

*13 – 17 января 2014 года*

*8 класс*

*Первый день*

**1.** Существуют ли такие 100 различных натуральных чисел, что каждое из них является делителем суммы всех остальных (девяноста девяти) чисел?

**2.** Точка $M$ – середина стороны $AD$ параллелограмма $ABCD$. Отрезок $CM$ пересекает диагональ $BD$ в точке $K$, а прямая $AK$ пересекает сторону $CD$ в точке $N$.

Найдите отношение $CN : ND$.

**3. а)** Даны 8 отрезков. Верно ли, что из этих отрезков всегда можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник ?

**б)** Даны 8 отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Докажите, что из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

**4.** Клетчатая доска $7\times8$ замощается плитками двух типов: $L$-образными (см. рис. 1)

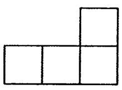


Рис. 1

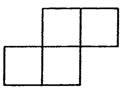


Рис. 2

и $Z$-образными (см. рис. 2). Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из четырёх клеток, равных по размеру клеткам доски.

Какое наименьшее число $L$-образных плиток может участвовать в замощении ?

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 4,5 часа

*УТВЕРЖДЕНО*

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

# LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

## III этап

*13 – 17 января 2014 года*

*9 класс*

*Первый день*

**1.** Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел $x$ и $y$, которые удовлетворяют равенству

$$x^4 - 9^y = 2400.$$

**2.** Точка $N$-середина стороны $BC$ прямоугольника $ABCD$. На диагонали $AC$ этого прямоугольника отмечена точка $K$ и на отрезке $AK$ отмечена точка $L$ так, что $\angle CKD = \angle NLD = 90°$.

Докажите, что точка $L$ — середина отрезка $AK$.

**3.** Существуют ли отличные от тождественно постоянных функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, определённые при всех действительных значениях аргумента, такие, что

$$f(g(x)) - g(f(x)) = 2014?$$

**4.** Даны $n \geqslant 4$ отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Найдите наименьшее значение $n$, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов

*УТВЕРЖДЕНО*

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

# LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

## III этап

*13 – 17 января 2014 года*

*10 класс*

*Первый день*

**1.** На боковых сторонах $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ отмечены точки $K$ и $L$ соответственно, так, что $\angle BCK = \angle ACK$ и $\angle CAL = \angle DAL$. Оказалось, что прямые $KL$ и $AD$ параллельны.

Найдите длину диагонали $AC$, если известно, что $BC = 4$, $AD = 9$.

**2.** Найдите все натуральные $k$, для которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y+z}{y^2+z+x} + \dfrac{y^2+z+x}{z^2+x+y} = k+2, \\ \dfrac{x^2-z^2+z-x}{z^2+x+y} = k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y;z)$ в целых попарно различных числах.

**3.** Найдите все функции $f$, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, которые при всех действительных $x$ и $y$ удовлетворяют равенству

$$f(x+xy) = f(x)(2y+1) + f(xy).$$

**4.** Даны $n \geqslant 4$ отрезков. Известно, что из любых четырёх из них можно составить выпуклый четырёхугольник.

Найдите наименьшее значение $n$, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить остроугольный треугольник.

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов

*УТВЕРЖДЕНО*

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

17 декабря 2013 г.

## LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*13 – 17 января 2014 года*

*11 класс*
*Первый день*

**1.** Диагонали трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ пересекаются в точке $M$. На стороне $DC$ отмечены точки $K$ и $L$, так, что $\angle CBK = \angle DBK$ и $\angle CAL = \angle DAL$. Оказалось, что $CK = DL$.

Докажите, что отрезки $CM$ и $MD$ равны.

**2.** Найдите все функции $f$, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, которые при всех действительных $x$ и $y$ удовлетворяют равенству

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x.$$

**3.** Даны $n$ отрезков ($n \geqslant 4$). Известно, что из любых $k$ ($4 \leqslant k \leqslant n$) из них можно составить выпуклый $k$-угольник.

Найдите наименьшее (в зависимости от $k$) значение $n$, при котором из данных отрезков заведомо можно выбрать три таких, из которых можно составить треугольник.

**4.** Клетчатая доска $10\times10$ замощается плитками двух типов: $L$-образными (см. рис. 1) и $T$-образными (см. рис. 2). Плитки разрешается поворачивать и переворачивать. Каждая плитка состоит из четырёх клеток, равных по размеру клеткам доски.

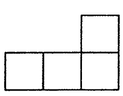


Рис. 1

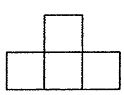


Рис. 2

Какое наибольшее число $L$-образных плиток может участвовать в замощении?

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXIV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*13 – 17 января 2014 года*

# Решения

## *Первый день*

### *8 класс*

**8.1.** Ответ: да, существуют.

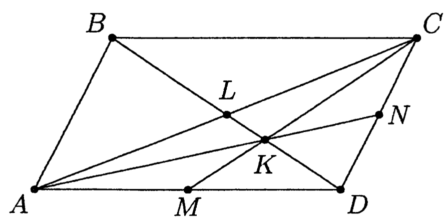
Докажем более общее утверждение: для любого $n \geqslant 3$ существуют $n$ различных натуральных чисел, таких, что каждое из них является делителем суммы всех остальных $(n-1)$ чисел.

Предположим, что имеется набор из $m$ таких чисел. Покажем, как этот набор можно увеличить, получив набор с бóльшим количеством чисел, удовлетворяющий сформулированному выше условию. Пусть сумма имеющихся $m$ чисел равна $S$. Добавим тогда к набору число $S$. Ясно, что оно отличается от всех имевшихся $m$ чисел, так как оно больше каждого из них. Кроме того, добавленное число $S$ делится на сумму всех остальных чисел, которая равна $S$. Пусть теперь $a$ — какое-то число, которое уже́ было в исходном наборе из $m$ чисел. Это значит, что $a$ делит $S-a$, а значит, делит и $S$. Тогда $a$ делит $2S-a$ — сумму всех чисел, кроме $a$, в новом наборе чисел. Таким образом, новый набор чисел удовлетворяет условию задачи.

Теперь заметим, что тройка чисел $1,\ 2,\ 3$ удовлетворяет условию задачи. Согласно доказанному выше, добавляя к этим числам их сумму $6$, затем сумму $12$ получившейся четвёрки чисел, затем сумму $24$ получившейся пятёрки чисел и т. д., будем получать наборы чисел, удовлетворяющие нужным условиям. Когда чисел станет $100$, получим в точности тот набор, о котором говорится в условии задачи.

**8.2.** Ответ: $CN : ND = 1 : 1$.

Пусть $L$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$. Поскольку диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам, то $L$ — середина $AC$, а значит, $DL$ — медиана треугольника $ACD$. Так как по условию $M$ — середина $AD$, то $CM$ — медиана треугольника $ACD$, т. е. $K$ — точка пересечения медиан $DL$ и $CM$ треугольника $ACD$. Поэтому, поскольку все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, отрезок $AN$ — также медиана треугольника $ACD$. Следовательно, $CN = ND$ и $CN : ND = 1 : 1$.




**8.3.** Ответ: **а)** нет, не верно.

Как хорошо известно, из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a + b$ (неравенство треугольника).

**а)** Возьмём восемь отрезков, длины которых, например, равны $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21$. Легко убедиться, что ни для каких трёх из них неравенство треугольника не выполняется, а значит, ни из каких трёх из них составить треугольник нельзя.

**б)** Пусть длины данных восьми отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_8$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков $a_1,\ a_2,\ a_3$ и $a_8$, а значит,

$$a_8 < a_1 + a_2 + a_3, \qquad (*)$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Докажем, что среди этих восьми отрезков обязательно найдутся три таких, из которых можно составить треугольник. Предположим противное. Тогда для любых трёх из этих отрезков должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника; в частности:

$$a_1 + a_2 \leqslant a_3, \quad a_2 + a_3 \leqslant a_4, \quad a_3 + a_4 \leqslant a_5, \quad a_4 + a_5 \leqslant a_6, \quad a_5 + a_6 \leqslant a_7, \quad a_6 + a_7 \leqslant a_8.$$

Почленно сложив эти неравенства, получим $a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leqslant a_8$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 < a_8$. Но это неравенство противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, среди данных восьми отрезков всегда найдутся три, из которых можно составить треугольник.

**8.4.** Ответ: 4.

Покрасим доску полосами в чёрный и белый цвет (см. рис. 1). В такой раскраске 32 клетки чёрные и 24 — белые. Легко видеть, что любая $L$-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через $d$), либо 3 чёрных и 1 белую клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через $f$). Кроме того, любая $Z$-образная плитка накрывает 2 белые и 2 чёрные клетки (обозначим число участвующих в замощении $Z$-образных плиток через $a$).

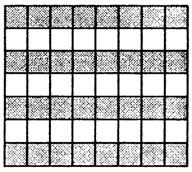


Рис. 1

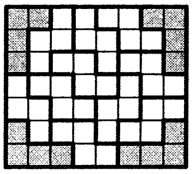


Рис. 2

Тогда общее число белых клеток на доске можно записать как $3d + f + 2a$, а общее число чёрных клеток — как $d + 3f + 2a$. Таким образом, имеем систему равенств $3d + f + 2a = 24$, $d + 3f + 2a = 32$. Вычитая первое равенство из второго, получим $2f - 2d = 8$, откуда $f = 4 + d \geqslant 4$. В частности, число $L$-образных плиток на доске не менее 4.

Пример на рисунке 2 показывает, что это число может быть равно 4.

## *9 класс*

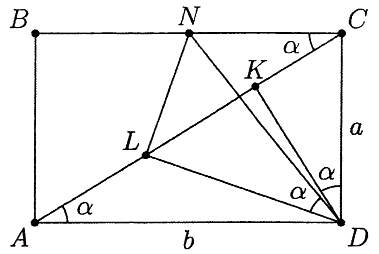
**9.1.** Ответ: $(7; 0)$ и $(-7; 0)$.

Заметим, что при $y \geqslant 1$ числа $9^y$ и 2400 делятся на 3, и, следовательно, $x^4 \vdots 3$. Поскольку 3 — простое число, то тогда и $x \vdots 3$, а значит $x^4 \vdots 3^4 = 81$. Поэтому левая часть исходного равенства $x^4 - 9^y \vdots 9$, в то время как его правая часть — число 2400 — на 9 не делится, противоречие.

Легко также видеть, что ни одно отрицательное $y$ не может удовлетворять данному в условии равенству, поскольку в этом случае левая часть этого равенства — число не целое.

Итак, остаётся рассмотреть случай $y = 0$. В этом случае $x^4 = 2401$ и тогда $x = 7$ или $x = -7$.

**9.2.** *Первое решение.* Пусть $a = CD$, $b = AD$, $\alpha = \angle CAD$. Тогда $\angle NCL = \angle CDK = \alpha$. Кроме того, поскольку $\angle NCD = \angle NLD = 90^\circ$, то точки $L$, $N$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности (с диаметром $ND$), и поэтому $\angle NCL = \angle NDL = \alpha$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). Теперь имеем




$$LK^2 = LD^2 - DK^2 = [LD = ND\cos\alpha] =$$
$$= ND^2\cos^2\alpha - DK^2 = [DK = a\cos\alpha, ND^2 = a^2 + b^2/4] =$$
$$(a^2 + b^2/4)\cos^2\alpha - a^2\cos^2\alpha = \frac{1}{4}b^2\cos^2\alpha =$$
$$= [AK = b\cos\alpha] = \frac{1}{4}AK^2,$$

откуда $LK = AK/2$, что и требовалось.

*Второе решение.* Заметим, что поскольку $\angle NCD + \angle NLD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то четырёхугольник $LNCD$ вписанный. Отсюда, в частности, следует, что $\angle NDL = \angle NCL$. Но $\angle NCL = \angle DAC$, так как $BC \parallel AD$. Таким образом, $\angle DAC = \angle NDL$. Далее, $\triangle ADN$, очевидно, равнобедренный ( $AN = ND$ ), поскольку точка $N$ — середина стороны $BC$. Поэтому $\angle NAD = \angle ADN$. Получаем, что

$$\angle NAL = \angle NAD - \angle DAC = \angle ADN - \angle NDL = \angle ADL.$$

Получаем, что $\triangle ALD \sim \triangle CNA$ по двум углам. Отсюда $\dfrac{AL}{AD} = \dfrac{CN}{AC}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники $AKD$ и $CBA$ подобны по острому углу, так что $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{CB}{AC}$. Но тогда $\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{2\cdot CN}{AC} = \dfrac{2\cdot AL}{AD}$. Следовательно, $AK = 2\cdot AL$, что и требовалось доказать.

**9.3.** Ответ: да, существуют.

Можно найти бесконечно много таких функций среди линейных. Пусть $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые числа. Тогда $f(g(x)) - g(f(x)) = a(cx + d) + b - c(ax + b) - d = ad + b - cb - d$. Легко подобрать такие значения $a$, $b$, $c$, $d$, чтобы выполнялось равенство $ad + b - cb - d = 2014$. Можно выбрать произвольные значения для трёх из этих коэффициентов, а значение четвёртого вычислить из получившегося уравнения. Например, пусть $b = c = d = 1$, тогда $a = 2015$. Это даёт функции $f(x) = 2015x + 1$ и $g(x) = x + 1$, удовлетворяющие условию задачи.

Разумеется, парами линейных функций далеко не исчерпываются пары $\big(f(\cdot), g(\cdot)\big)$ функций, доставляющие решение задачи. Из большого многообразия таких пар приведём ещё только два типа пар.

Пусть $f(\cdot)$ — произвольная периодическая функция с периодом 2014 (т. е. для всех действительных $x$ верно равенство $f(x + 2014) = f(x)$ ), а функция $g(x) = x - 2014$. Тогда $f(g(x)) - g(f(x)) = f(x - 2014) - f(x) + 2014 = 2014$ для всех действительных $x$.

Приведём примеры кусочно-постоянных функций. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 2015, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \begin{cases} -2015, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда, если $x \geqslant 0$, имеем $f(g(x)) - g(f(x)) = f(-2015) - g(2015) = -1 - (-2015) = 2014$. Если же $x < 0$, то $f(g(x)) - g(f(x)) = f(1) - g(-1) = 2015 - 1 = 2014$. Таким образом, $f(g(x)) - g(f(x)) = 2014$ при всех действительных $x$.

**9.4.** Ответ: 5.

Напомним вначале одно хорошо известное утверждение: из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a + b$ (неравенство треугольника). Перейдём к решению задачи.

Пусть длины данных $n$ отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков $a_1$, $a_2$, $a_3$ и $a_5$, а значит,

$$a_5 < a_1 + a_2 + a_3 \qquad (*)$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Докажем, что при $n \geqslant 5$ обязательно найдутся три отрезка, из которых можно составить треугольник. Предположим противное. Тогда, в частности, ни из каких трёх из первых пяти отрезков $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_5$ нельзя составить треугольник. Значит, должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника:

$$a_1 + a_2 \leqslant a_3, \quad a_2 + a_3 \leqslant a_4, \quad a_3 + a_4 \leqslant a_5.$$

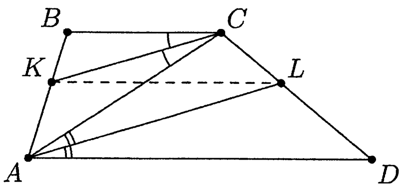
Почленно сложив эти неравенства, получим $a_1 + 2a_2 + a_3 \leqslant a_5$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 < a_5$. Но это неравенство противоречит неравенству $(*)$. Следовательно, если $n = 5$, среди данных отрезков найдутся три таких, из которых можно составить треугольник.

Для завершения решения остаётся лишь привести пример для $n = 4$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём четыре отрезка, длины которых равны, например, 1, 1, 2, 3. Так как $1 + 1 + 2 > 3$, то из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник. Легко убедиться, что ни из каких трёх из этих четырёх отрезков составить треугольник нельзя, поскольку ни для каких трёх из них не выполняется неравенство треугольника.

## *10 класс*

**10.1.** Ответ: 6.

Поскольку $CK$ является биссектрисой внутреннего угла $ACB$ в треугольнике $ABC$,




то $AK : KB = AC : BC$. Аналогично, поскольку $AL$ является биссектрисой внутреннего угла $DAC$ в треугольнике $ACD$, то $DL : LC = AD : AC$. Кроме того, из теоремы Фалёса следует, что $AK : KB = DL : LC$. Таким образом,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = \frac{AD}{AC},$$

откуда $AC^2 = AD \cdot BC$, или согласно условию $AC^2 = 9 \cdot 4$, т. е. $AC = 6$.

**10.2.** Ответ: $k = 1$.

Обозначим дроби в левой части первого из уравнений системы:

$$\frac{x^2 + y + z}{y^2 + z + x} = a \quad \text{и} \quad \frac{y^2 + z + x}{z^2 + x + y} = b. \qquad (1)$$

Тогда это уравнение примет вид: $a + b = k + 2$. Далее, так как

$$a \cdot b = \frac{x^2 + y + z}{y^2 + z + x} \cdot \frac{y^2 + z + x}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z}{z^2 + x + y},$$

а левая часть второго уравнения заданной системы преобразуется к виду

$$\frac{x^2 - z^2 + z - z}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z - z^2 - x - y}{z^2 + x + y} = \frac{x^2 + y + z}{z^2 + x + y} - 1 = ab - 1,$$

то второе её уравнение принимает вид: $ab = k^2 + 1$. Итак, в обозначениях (1) заданная в условии задачи система запишется в виде

$$\begin{cases} a+b=k+2, \\ ab=k^2+1. \end{cases} \tag{2}$$

По обратной теореме Виета решения $a$ и $b$ системы (2) совпадают с корнями квадратного относительно $t$ уравнения

$$t^2-(k+2)t+k^2+1=0. \tag{3}$$

Но квадратное уравнение (3) имеет действительные корни, если и только если его дискриминант $D$ неотрицателен: $D = (k+2)^2 - 4(k^2+1) = -3k^2+4k = k(-3k+4) \geqslant 0$. Для натуральных $k$ последнее неравенство имеет только при $k=1$. Итак, для того чтобы система из условия задачи имела решения, необходимо, чтобы $k=1$.

Докажем, что при $k = 1$ система из условия задачи имеет целочисленные попарно различные решения. При $k=1$ корни уравнения (3) равны 1 и 2; значит, могут представиться только две возможности: либо 1) $a=1$, $b=2$, либо 2) $a=2$, $b=1$. Для завершения решения достаточно показать, что, например, в случае 1) система (1) имеет целочисленные попарно различные решения $(x;y;z)$, а значит, такие решения имеет и система из условия задачи.

В случае 1) имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y+z}{y^2+z+x}=1, \\ \dfrac{y^2+z+x}{z^2+x+y}=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y+z=y^2+z+x, \\ y^2+z+x=2(z^2+x+y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ y^2-2y-x=2z^2-z. \end{cases}$$

Поскольку для искомых решений $x \neq y$, то первое уравнение примет вид: $x+y=1$, а последняя система перепишется в виде

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y^2-y=2z^2-z+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ (y-2)(y+1)=(z-1)(2z+1). \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы выполняется, например, если

$$\begin{cases} y-2=z-1, \\ y+1=2z+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=z+1, \\ z+2=2z+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ z=1. \end{cases}$$

Тогда $x=1-y=1-2=-1$. Таким образом, тройка $(x;y;z)=(-1;2;1)$ доставляет решение системы из условия задачи при $k=1$ в целых попарно различных числах.

*Замечание.* В случае $k=1$ найденные (далеко не единственные) значения $x$, $y$ и $z$ достаточно просто указать, не описывая способ их нахождения.

**10.3.** Ответ: $f(x)=ax^2$, где $a$ — любое действительное число.

Так как по условию равенство

$$f(x+xy)=f(x)(2y+1)+f(xy) \tag{1}$$

выполнено при всех действительных $x$ и $y$, то, подставляя в него $x=1$, получим, что при любом действительном $y$ имеет место равенство $f(y+1)=f(1)(2y+1)+f(y)$, или, переобозначая в нём $y$ через $x$, что

$$f(x+1)=f(1)(2x+1)+f(x) \tag{2}$$

при всех действительных $x$.

Далее, подставляя в равенство (1) $y = 1/x$, получим $f(x+1) = f(x)\Big(\dfrac{2}{x}+1\Big) + f(1)$ для любого $x \neq 0$. Сравнивая это равенство с равенством (2), находим

$$f(1)(2x+1) + f(x) = f(x)\Big(\frac{2}{x}+1\Big) + f(1) \quad\Longrightarrow\quad 2xf(1) = \frac{2}{x}f(x) \quad\Longrightarrow\quad f(x) = f(1)x^2$$

при всех $x \neq 0$. Обозначив $f(1) = a$, получим $f(x) = ax^2$ для любого $x \neq 0$. Поскольку при $y = 0$ из (1) получаем $f(x) = f(x) + f(0)$, то $f(0) = 0$. Следовательно, $f(x) = ax^2$ для любого действительного $x$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = ax^2$ действительно удовлетворяет равенству (1) при всех действительных $x$ и $y$.

**10.4.** Ответ: 7.

Отметим вначале, что из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить остроугольный треугольник, если и только если $c^2 < a^2 + b^2$. Действительно, в одну сторону: если треугольник со сторонами $a$, $b$, $c$ остроугольный, то $c^2 < a^2 + b^2$, — утверждение легко вытекает из теоремы косинусов. Пусть теперь $c^2 < a^2 + b^2$. Тогда $c < a + b$, а значит, из отрезков $a$, $b$, $c$ можно составить треугольник. Для этого треугольника по теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle(a,b)$, откуда $\cos(a,b) = (a^2+b^2-c^2)/2ab > 0$. Значит, угол $\angle(a,b)$ острый, а поскольку сторона $c$ в этом треугольнике не меньше любой другой, то угол $\angle(a,b)$ не меньше любого из двух других углов треугольника. Поэтому этот треугольник является остроугольным. Перейдём к решению задачи.

Докажем, что при $n \geqslant 7$ обязательно найдутся три отрезка, из которых можно составить остроугольный треугольник. Пусть длины данных $n$ отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию из любых четырёх из них можно составить (выпуклый) четырёхугольник, то, в частности, четырёхугольник можно составить из отрезков $a_1$, $a_2$, $a_3$ и $a_7$, а значит,

$$a_7 < a_1 + a_2 + a_3 \tag{1}$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка).

Предположим, что ни из каких трёх из этих $n \geqslant 7$ отрезков нельзя составить остроугольный треугольник. Тогда, в частности, ни из каких трёх из первых семи отрезков $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_7$ нельзя составить остроугольный треугольник. Значит, должны выполняться неравенства

$$a_1^2 + a_2^2 \leqslant a_3^2, \quad a_2^2 + a_3^2 \leqslant a_4^2, \quad a_3^2 + a_4^2 \leqslant a_5^2, \quad a_4^2 + a_5^2 \leqslant a_6^2, \quad a_5^2 + a_6^2 \leqslant a_7^2. \tag{2}$$

Почленно сложив эти пять неравенств, получим:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \leqslant a_7^2. \tag{3}$$

Возведём неравенство (1) в квадрат: $a_7^2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$. Из этого неравенства и неравенства (3) получаем:

$$a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 < 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3. \tag{4}$$

Оценим снизу левую часть неравенства (4), воспользовавшись неравенствами (2):

$$a_2^2 + a_4^2 + a_5^2 \geqslant a_2^2 + (a_2^2 + a_3^2) + (a_3^2 + a_4^2) = a_4^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant$$

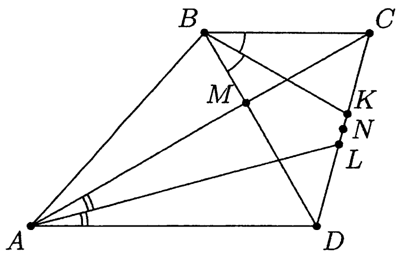
$$\geqslant (a_2^2 + a_3^2) + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 \geqslant 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3,$$

— получили противоречие с неравенством (4).

Для завершения решения остаётся лишь привести пример для $n = 6$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём шесть отрезков, длины которых, например, равны 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$. Сумма длин любых трёх из них больше длины любого четвёртого, а значит, из любых четырёх отрезков можно составить четырёхугольник. Однако любые три из них, из которых можно составить треугольник, образуют либо тупоугольный, либо прямоугольный треугольник.

## *11 класс*

**11.1.** *Первое решение.* Поскольку $BK$ является биссектрисой внутреннего угла $CBD$ в $\triangle CBD$, то по свойству биссектрисы $CK : KD = BC : BD$. Поскольку $AL$ является биссектрисой внутреннего угла $DAC$ в $\triangle DAC$, то, аналогично, $DL : LC = AD : AC$. Пусть точка $N$ — середина $CD$. Имеем




$$\frac{BC}{BD} = \frac{CK}{KD} = \frac{CN-KN}{ND+KN} = [CN = ND = 0,5CD] =$$

$$= \frac{0,5CD-KN}{0,5CD+KN} = [KN = CN - CK = DN - DL = NL] =$$

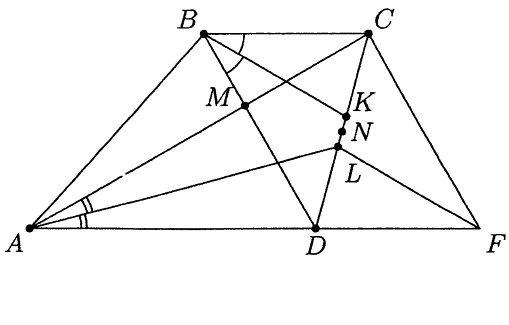
$$= \frac{0,5CD-NL}{0,5CD+NK} = \frac{ND-NL}{CN+NL} = \frac{DL}{LC} = \frac{AD}{AC}. \qquad (1)$$

Далее, $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{S(MCD)}{S(ACD)}$, так как высоты из вершины $D$ у треугольников $MCD$ и $ACD$ на стороны $MC$ и $AC$ равны. Аналогично, $\dfrac{MD}{BD} = \dfrac{S(MCD)}{S(BCD)}$, так как высоты из вершины $C$ у треугольников $MCD$ и $BCD$ на стороны $MD$ и $BC$ равны. Кроме того, $\dfrac{S(ACD)}{S(BCD)} = \dfrac{AD}{BC}$, так как высота из вершины $D$ треугольника $BCD$ равна высоте из вершины $C$ треугольника $ACD$ (и равна высоте трапеции). Следовательно,

$$\frac{MC}{AC} = \frac{S(MCD)}{S(ACD)} = \frac{S(MCD)}{S(BCD)} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{MD}{BD} \cdot \frac{BC}{AD}.$$

Поэтому $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{AC}{BD} \cdot \dfrac{BC}{AD} = [\text{в силу (1)}] = 1$, откуда и следует равенство $MC$ и $MD$.

*Второе решение.* Достроим треугольник $DBC$ до параллелограмма $DBCF$, проведя $CF \parallel BD$ до пересечения с $AD$ в точке $F$. Так как треугольники $DBC$ и $CFD$ центральносимметричны относительно точки $N$, и $BK$ — биссектриса угла $B$, то $FL$ — биссектриса угла $F$. Таким образом, $L$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ACF$. Поэтому $CD$ — тоже биссектриса, и тогда $\angle ACD = \angle FCD = \angle BDC$, т.е. треугольник $DMC$ равнобедренный, $MD = MC$.




**11.2.** Ответ: $f(x) = a \sin x$, где $a$ — любое действительное число.

Подставляя $y = 0$ в исходное равенство

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x, \tag{1}$$

находим, что при любом действительном $x$ имеет место равенство $f(x) = f(x) + f(0)\cos x$, откуда $f(0) = 0$. Подставляя в (1) $y = x$, получим $f(2x) = 2f(x)\cos x$, откуда

$$f(\pi) = f(2\cdot\pi/2) = 2f(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0. \tag{2}$$

Далее, подставляя в (1) $y = \pi$, получаем $f(x+\pi) = f(x)\cos\pi + f(\pi)\cos x = [\text{см. } (2)] = -f(x)$ при всех действительных $x$.

Окончательно,

$$f(x) = -f(x+\pi) = -f((x+\pi/2)+\pi/2) =$$

$$= -f(x+\pi/2)\cos(\pi/2) - f(\pi/2)\cos(x+\pi/2) = -f(x+\pi/2)\cdot 0 + f(\pi/2)\sin x = f(\pi/2)\sin x$$

при всех действительных $x$. Значит, обозначив $f(\pi/2) = a$, получим, что $f(x) = a\sin x$ при всех действительных $x$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = a\sin x$ действительно удовлетворяет равенству (1) при всех действительных $x$ и $y$.

**11.3.** Ответ: $k+1$.

Напомним, что из трёх отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно составить треугольник, если и только если выполняется неравенство $c < a+b$ (неравенство треугольника).

Пусть длины данных отрезков равны $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Так как по условию из любых $k$ из них можно составить (выпуклый) $k$-угольник, то, в частности, $k$-угольник можно составить из отрезков $a_1$, $a_2$, …, $a_{k-1}$ и $a_n$, а значит,

$$a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \tag{$*$}$$

(длина ломаной, соединяющей концы отрезка, больше длины этого отрезка). Докажем, что при $n \geqslant k+1$ обязательно найдутся три отрезка, образующих треугольник. Предположим противное. Тогда для любых трёх из этих отрезков должны выполняться неравенства, противоположные неравенству треугольника; в частности: $a_1 + a_2 \leqslant a_3$, $a_2 + a_3 \leqslant a_4$, …, $a_{n-2} + a_{n-1} \leqslant a_n$. Сложим эти $n-2$ неравенств: $a_1 + 2a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} \leqslant a_n$. Но согласно неравенству $(*)$ $a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$. Видим, что при $n \geqslant k+1$ это приводит к противоречию.

Для завершения решения остаётся только привести пример для $n = k$, когда такие отрезки выбрать нельзя. Возьмём $k$ отрезков, длины которых, например, равны 1, 1, 2, 3, …, $F_k$, где $F_m$ - $m$-ое по счёту число Фибоначчи. Поскольку $1 + 1 + \ldots + F_{k-1} > F_k$ при $k \geqslant 4$, то из этих отрезков можно составить выпуклый $k$-угольник. С другой стороны, очевидно, что ни для каких трёх из этих отрезков неравенство треугольника не выполняется, а значит, ни из каких трёх из них составить треугольник нельзя.

**11.4.** Ответ: 23.

Покрасим доску в шахматном порядке (см. рис. 1). Тогда всякая $T$-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через $a$), либо 3 чёрных и 1 белую клетку (обозначим число участвующих в замощении таких плиток через $b$). Пусть $c$ — число $L$-образных плиток, участвующих в замощении; очевидно, что каждая такая плитка накрывает 2 белых и 2 чёрных клетки доски.

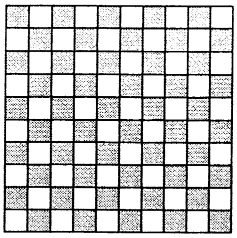


Рис. 1

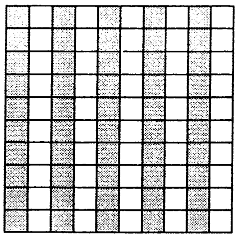


Рис. 2

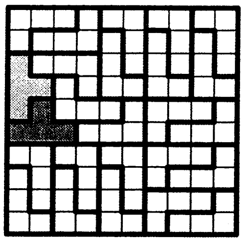


Рис. 3

Тогда общее число белых клеток на доске (оно равно $0,5 \cdot 10^2 = 50$) можно записать как $3a + b + 2c$, а общее число чёрных клеток — как $3b + a + 2c$. Получаем $3a + b + 2c = = 50 = a + 3b + 2c$, откуда $a = b$. В частности, число $T$-образных плиток на доске $a + b$ чётно.

Теперь рассмотрим другую раскраску доски — полосатую (см. рис. 2). Легко видеть, что любая $L$-образная плитка накрывает либо 3 белых и 1 чёрную клетку (пусть таких плиток $d$ штук), либо 3 чёрные и 1 белую клетку (пусть таких плиток $f$ штук). Допустим, что в замощении нет ни одной $T$-образной плитки. Тогда $d + f = 100/4 = 25$. Далее, общее число белых клеток в таком замощении равно $50 = 3d + f = 2d + (d + f) = 2d + 25$, откуда $2d = 25$ — противоречие.

Таким образом, число $T$-образных плиток в замощении (так как оно чётное) не меньше двух. Поэтому общее число $L$-образных плиток не более $25 - 2 = 23$. Пример на рисунке 3 показывает, что это число может быть равно 23.