**Математика**

**8 класс**

1. Десять школьников получили в библиотеке *n* книг. Известно, что есть хотя бы один школьник, который взял ровно одну книгу, хотя бы один школьник, который взял ровно две книги и хотя бы один школьник, который взял ровно три книги. Найдите минимальное значение *n*, такое что обязательно найдется школьник, который получил в библиотеке не менее 10 книг.
2. Найти все тройки различных простых чисел, произведение которых в пять раз больше, чем сумма.
3. Мальчики решили сыграть против девочек в загадки на конфеты по следующим правилам. В начале игры у каждой из команд есть по 200 конфет. Сначала девочки задают свои загадки мальчикам и за каждую разгаданную загадку отдают по одной конфете мальчикам. После того, как девочки зададут все свои заготовленные загадки или у них закончатся конфеты, команды меняются ролями и мальчики начинают задавать свои заготовленные загадки и отдавать по одной конфете за каждую разгаданную загадку. После игры оказалось, что у каждой из команд снова по 200 конфет. При этом Игорь был очень недоволен игрой, т.к. разгадал всего 5 загадок, тогда как остальные мальчики разгадали по 10 загадок каждый. В команде девочек лишь Юля разгадала 6 загадок, а все остальные девочки разгадала по 13 загадок каждая. Найдите сколько загадок суммарно разгадали мальчики, сколько – девочки, а так же, сколько было мальчиков и девочек, если известно, что в игре был момент, когда у девочек оставалось меньше 100 конфет.
4. В прямоугольном треугольнике *ABC* из прямого угла проведены высота *CH*, медиана *CM* и биссектриса *CL*. Найти величину угла *MCH*, если угол *MCL* равен 11º.
5. Доказать, что для произвольных действительных чисел *a*, *b*, *c* справедливо неравенство:

*a*2*b*2 + *b*2*c*2 + *c*2*a*2 ≥ *abc* (*a*+*b*+*c*).

**Математика**

**9 класс**

1. Пусть *a, b, c* – длины сторон треугольника. Незнайка утверждает, что уравнение $b^{2}x^{2}+\left(b^{2}+c^{2}\right)x=a^{2}x-c^{2}$ имеет действительные корни. Прав ли Незнайка?
2. Существует ли натуральное число, записанное только цифрами 0 или 1, делящееся на 2017?
3. На встрече присутствовали все участники двух туристических походов (некоторые были в двух походах). В первом походе 60% участников были парнями, во втором – 75%. Доказать, что парней на встрече было не меньше чем девушек. Могло ли получиться так, что парней и девушек было поровну?
4. Какое число больше 1,000010,99999 ∙ 0,999991,00001 или 1?
5. Для выпуклого четырёхугольника *ABCD* соблюдено условие: *AB* + *CD* =
= *BC* + *DA*. Докажите, что окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается окружности, вписанной в треугольник *ACD*.

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2017/2018 учебный год.

**Математика**

**9 класс**

1. Пусть *a, b, c* – длины сторон треугольника. Незнайка утверждает, что уравнение $b^{2}x^{2}+\left(b^{2}+c^{2}\right)x=a^{2}x-c^{2}$ имеет действительные корни. Прав ли Незнайка?
2. Существует ли натуральное число, записанное только цифрами 0 или 1, делящееся на 2017?
3. На встрече присутствовали все участники двух туристических походов (некоторые были в двух походах). В первом походе 60% участников были парнями, во втором – 75%. Доказать, что парней на встрече было не меньше чем девушек. Могло ли получиться так, что парней и девушек было поровну?
4. Какое число больше 1,000010,99999 ∙ 0,999991,00001 или 1?
5. Для выпуклого четырёхугольника *ABCD* соблюдено условие: *AB* + *CD* =
= *BC* + *DA*. Докажите, что окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается окружности, вписанной в треугольник *ACD*.

**Математика**

**10 класс**

1. В ряд выписаны а) 2017·2018; б) 2017+2018 действительных чисел. Может ли так оказаться, что сумма любых пяти подряд идущих чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна?
2. Существует ли натуральное число вида 2*n*-1, делящееся на 2017?
3. Точка *H* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Известно, что радиус окружности, проходящей через точки *H*, *C*, *A*, равен 2017. Найти радиусы окружностей, проходящих: первая – через точки *H*, *A*, *B*, вторая – через точки *H*, *B*, *C*.
4. Карточки пронумерованы последовательными натуральными числами от 1 до 2017. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из номеров не был равен сумме каких-нибудь двух других номеров карточек?
5. Доказать неравенство .

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2017/2018 учебный год.

**Математика**

**10 класс**

1. В ряд выписаны а) 2017·2018; б) 2017+2018 действительных чисел. Может ли так оказаться, что сумма любых пяти подряд идущих чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна?
2. Существует ли натуральное число вида 2*n*-1, делящееся на 2017?
3. Точка *H* является точкой пересечения высот остроугольного треугольника *ABC*. Известно, что радиус окружности, проходящей через точки *H*, *C*, *A*, равен 2017. Найти радиусы окружностей, проходящих: первая – через точки *H*, *A*, *B*, вторая – через точки *H*, *B*, *C*.
4. Карточки пронумерованы последовательными натуральными числами от 1 до 2017. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из номеров не был равен сумме каких-нибудь двух других номеров карточек?
5. Доказать неравенство .

**Математика**

**11 класс**

1. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску 8Х8 так, чтобы они не били друг друга?
2. Докажите, что для любого нечетного натурального числа *m*, существует натуральное *n*, что 2*n*-1 делится на *m*.
3. Найти все трехзначные числа, сумма цифр которых уменьшается в три раза, если само число увеличить на 3.
4. Три равные окружности с центрами *O*1, *O*2, *O*3 пересекаются в одной точке. *A*1, *A*2, *A*3 – остальные точки пересечения. Доказать, что треугольники *O*1*O*2*O*3 и *A*1*A*2*A*3 равны.
5. Для любого натурального *n* доказать неравенство: .

Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2017/2018 учебный год.

**Математика**

**11 класс**

1. Какое наибольшее число коней можно поставить на шахматную доску 8Х8 так, чтобы они не били друг друга?
2. Докажите, что для любого нечетного натурального числа *m*, существует натуральное *n*, что 2*n*-1 делится на *m*.
3. Найти все трехзначные числа, сумма цифр которых уменьшается в три раза, если само число увеличить на 3.
4. Три равные окружности с центрами *O*1, *O*2, *O*3 пересекаются в одной точке. *A*1, *A*2, *A*3 – остальные точки пересечения. Доказать, что треугольники *O*1*O*2*O*3 и *A*1*A*2*A*3 равны.
5. Для любого натурального *n* доказать неравенство: .

Решение

11 класс

1. Преобразуем уравнение к виду

$$\left(1+3x\right)\left(1+3x+2x^{2}\right)=4\left(3+1+3x\right)\left(16+12x+2x^{2}\right)$$

Сделаем замену $u=1+3x;v=2x^{2}$. Получим $u\_{1}=-4, u\_{2}=\frac{-2v-24}{10}$. Возвращаясь к замене, получим: $x\_{1}=-\frac{5}{3};x\_{2,3}=\frac{-15\pm \sqrt{89}}{4}$

Ответ: $x\_{1}=-\frac{5}{3};x\_{2,3}=\frac{-15\pm \sqrt{89}}{4}$

1. Ответ: 24.
2. Точки A и B удовлетворяют системе $\left\{\begin{array}{c}y=\frac{1}{2}x^{2}\\y=kx+2\end{array}\right.$.

Значит, абсциссы точек A и B являются корнями уравнения $x^{2}-2kx-4=0$

$$OA^{2}=\left(k^{2}+1\right)x\_{1}^{2}+4kx\_{1}+4; OB^{2}=\left(k^{2}+1\right)x\_{2}^{2}+4kx\_{2}+4$$

$$AB^{2}=\left(k^{2}+1\right)\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}$$

По теореме косинусов для треугольника AOB косинус угла AOB равен 0, значит искомый угол равен $90^{°}$.

Ответ: $90^{°}$.

1. Обозначим $x+y=a;y=a-x.$

По условию 0=$x^{3}+y^{3}-27+9xy=x^{3}+\left(a-x\right)^{3}+9x\left(a-x\right)-27=$

$$=x^{3}+a^{3}-3a^{2}x+3ax^{2}-x^{3}+9ax-9x^{2}-27=$$

=$\left(a-3\right)\left(3x^{2}-3ax+a^{2}+3a+9\right)$

Поэтому возможны два случая:

1. a-3=0, a=x+y=3
2. $3x^{2}-3ax+a^{2}+3a+9=0$

$$D=-3\left(a+6\right)^{2}\geq 0;a=-6$$

Ответ: 3;-6.

1. Введем в рассмотрение три вектора $\vec{a}\left(sin^{2}x;1\right), \vec{b}\left(cos^{2}x;1\right),\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Тогда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{sin^{4}x+1},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{cos^{4}x+1}, \left|\vec{c}\right|=\sqrt{\left(sin^{2}x+cos^{2}x\right)^{2}+\left(1+1\right)^{2}}=\sqrt{5}$

По неравенству треугольника $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\geq \left|\vec{c}\right|$т. е. $\sqrt{sin^{4}x+1}+\sqrt{cos^{4}x+1}\geq \sqrt{5}$. Отсюда получаем равенство $\sqrt{sin^{4}x+1}+\sqrt{cos^{4}x+1}=\sqrt{5}$, из которого следует, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ коллинеарные. Следовательно, имеем $\frac{sin^{2}x}{cos^{2}x}=1;tgx=\pm 1, x=\frac{π}{4}\left(23k+1\right), k\in Z. $

Ответ: $\frac{π}{4}\left(23k+1\right), k\in Z.$