Министерство образования Республики Беларусь

« LIII »

Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Условия и решения задач

Витебск 2003

УДК 372.851.046.14

Посвящается светлой памяти
Игоря Константиновича Жука

Приведены условия и решения задач заключительного тура 53 Республиканской математической олимпиады школьников.

Авторы задач

1. **Акулич И. Ф.** (8.1, 9.5, 10.3)
2. **Базылев Д. Ф.** (10.2, 11.2)
3. **Барабанов Е.А.** (7.4, 7.6, 7.7, 8.3, 8.7, 10.7, 10.8, 11.3, 11.7)
4. **Воронович И.И.** (7.5, 7.8, 8.3, 8.6, 8.8, 9.7,10.4,10.5,11.5,11.8)
5. **Дудко Д. В.** (11.1)
6. **Жук И.К.** (9.2, 9.3, 10.1)
7. **Змейков Д. Ю.** (8.5, 11.6)
8. **Каскевич В.И.** (7.1, 8.3, 8.4, 9.4, 10.8)
9. **Колбун В. В.** (11.4)
10. **Мазаник С.А.** (7.2, 7.3, 8.1, 8.2, 8.3, 9.8)
11. **Миротин А.Р.** (9.1, 10.6)
12. **Миротин Е. А.** (10.6)
13. **Романенко А.** (8.5, 11.6)
14. **Спивак А. В.** (10.3)
15. **Шамрук А. А.** (9.6)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили: Е.А.Барабанов, И.И.Воронович, В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1. У малышей Ани, Тани и Вани было поровну конфет. Но после того, как они вместе съели 30 конфет, у Ани конфет стало в 2 раза больше, чем у Тани, и в 3 раза больше, чем у Вани.

Сколько конфет было первоначально у каждого из малышей?

2. Существуют ли такие 11 различных натуральных чисел, что произведение трёх из них — наименьшего, наибольшего и среднего по величине — равно

а) сумме всех одиннадцати чисел ?

б) сумме всех остальных восьми чисел ?

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) высоты AD и CF пересекаются в точке H. Точка G — середина отрезка BD, точка P — точка пересечения отрезков AG и FD. Прямая, проходящая через точки H и P, пересекает сторону AB в точке Q, при этом P — середина отрезка HQ.

Докажите, что прямые HQ и BC параллельны.

4. Дан квадрат 4×4, клетки которого покрашены в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. За один ход разрешается, выбрав любой квадратик 2×2 клетки, поменять цвета всех его клеток на противоположные.

Докажите, что наименьшее число ходов, за которое можно перекрасить все клетки квадрата 4×4 в один цвет, равно 6.

5. Возле каждой вершины выпуклого четырёхугольника записано число, равное сумме расстояний от неё до трёх других вершин. Оказалось, что все 4 записанных числа равны.

Докажите, что этот четырёхугольник является прямоугольником.

6. Семиклассник Вася на листке бумаги отметил точку и провёл через неё три прямые. Оказалось, что среди двенадцати углов (меньших развёрнутого), образованных этими прямыми, углов с разной угловой мерой имеется ровно три.

Докажите, что какие-то две из проведённых Васей прямых перпендикулярны.

7. Дядя Фёдор, Кот Матроскин и Шарик наловили в речке, протекающей возле Простоквашино, рыбы для продажи. Они рассортировали её на большую (I сорт) и маленькую (II сорт). Узнав, что в городе килограмм рыбы I сорта стоит 950 руб., а II сорта — 800 руб., они решили её по этой цене и продавать. Утром в город продавать рыбу отправился Матроскин. По дороге он не удержался и съел 3 кг рыбы. Чтобы скрыть этот факт от товарищей, он, приехав в город, смешал рыбу обеих сортов и стал продавать эту смесь по цене I сорта, т. е. по 950 руб. за кг. Кроме того, сделав кое-что с весами, он при продаже недовешивал на каждом килограмме 50 граммов. В результате, продав к вечеру 95% довезённой до города рыбы, Матроскин выручил сумму, которую намеревались получить друзья за всю пойманную ими рыбу. „Перестарался,“ — подумал Матроскин и отдал оставшуюся рыбу городским бездомным котам.

Сколько килограммов маленькой рыбы поймали Дядя Фёдор, Кот Матроскин и Шарик ?

8. Бумажная полоска ширины 1 и длины больше 11 разбита на n клеток 1×1. Учитель выдал Пете и Феде по одному экземпляру такой полоски и дал задание вписать в клетки этих полосок единицы и нули так, чтобы в любых 11 подряд идущих клетках сумма всех чисел равнялась 8. Когда Петя и Федя выполнили задание (каждый на своей полоске), то оказалось, что суммы всех чисел в полосках у них различные.

На какое наибольшее число могут различаться эти суммы ?

8 класс

1. Натуральные числа a и b ($a > b$) имеют по 3 делителя, а их разность $a - b$ имеет только 2 делителя.

Найдите a и b.

2. В треугольнике ABC медиана AD и высота CF пересекаются в точке H. Точка G — середина отрезка BD, а P — точка пересечения отрезков AG и FD.

Докажите, что прямая, проходящая через точки H и P, параллельна стороне BC.

3. На координатной плоскости построены две параболы

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad y = cx^2 + bx + a,$$

где a, b и c — ненулевые числа, $a > c$. Кроме графиков на плоскости имеется ось Ox, но положение начала координат, точки O, на ней не указано и масштабные деления отсутствуют. Ось Oy полностью отсутствует.

Докажите, что с помощью циркуля и линейки всегда можно построить отрезки длины $|a|$, $|b|$ и $|c|$. (Опишите построения, не выполняя их фактически.)

4. Дана клетчатая доска 8×8 с шахматной раскраской клеток в чёрный и белый цвет. За пределами доски находится жук. Первым ходом жук вползает на какую-то крайнюю клетку доски (любую, по его усмотрению). Каждым следующим ходом жук переползает в любую соседнюю (по стороне) клетку с той клеткой,

в которой он до этого находился. С каждым ходом жук перекрашивает в противоположный цвет клетку, на которую вползает. Последним ходом жук должен покинуть доску.

Докажите, что жук, следуя указанным правилам, может перекрасить всю доску в чёрный цвет. Какое наименьшее число ходов ему для этого понадобится?

5. Натуральное число назовём своим, если его можно представить в виде среднего арифметического (не обязательно различных) чисел, каждое из которых является квадратом натурального числа.

Докажите, что все натуральные числа являются своими.

6. В треугольнике ABC отметили точку N, такую, что $NB = 2 \cdot AN$. Медиана AM пересекается с отрезком CN в точке O. Известно, что $\angle AOC = 120°$, $AM = 6$ и $CN = 4$.

Найдите BC. ($N \in AB$)

7. Имеется набор из N гирек, веса которых выражаются целым числом граммов, причем никакие две из гирек не имеют одинаковый вес. Известно, что какую бы гирьку ни выбросить из набора, все оставшиеся гирьки можно разложить на две группы одинакового веса (не обязательно равных по количеству гирек).

При каком наименьшем N такой набор существует?

8. На плоскости отмечены четыре различные точки. Возле каждой из них записано число, равное сумме расстояний от неё до трёх других точек.

Могут ли какие-то два из этих четырёх чисел равняться соответственно 8 и 25?

9 класс

1. а) Для каких натуральных $k \geqslant 3$ существует k натуральных чисел, обладающих тем свойством, что любые два из них не взаимно просты, а любые три — взаимно просты?

б) Существует ли бесконечное множество натуральных чисел с таким же свойством?

2. Докажите, что прямоугольный треугольник можно вписать в параболу $y = x^2$ так, чтобы его гипотенуза была параллельна оси абсцисс, тогда и только тогда, когда его высота, опущенная из вершины прямого угла, равна 1. (Треугольник вписан в параболу, если все три его вершины лежат на параболе.)

3. Диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ пересекаются в точке K.

Докажите, что если

$$A_2A_1 = A_2A_3 = A_2K,\ A_4A_3 = A_4A_5 = A_4K,\ A_6A_5 = A_6A_1 = A_6K,$$

то вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

4. Некоторые клетки доски $n \times m$ ($n, m \geqslant 2$) окрашены в белый цвет а остальные — в чёрный. За пределами доски находится жук. Первым ходом жук вползает на какую-то крайнюю клетку доски (любую, по его усмотрению). Каждым следующим ходом жук переползает в любую соседнюю (по стороне) клетку с той клеткой, в которой он до этого находился. С каждым ходом жук перекрашивает в противоположный цвет клетку, на которую вползает. Последним ходом жук должен покинуть доску.

Всегда ли (при любых размерах и любой начальной окраске доски) жук может совершить, следуя описанным правилам, такой обход доски, после которого все клетки доски окажутся чёрными?

5. Можно ли, используя все 10 различных цифр, причём каждую ровно по одному разу, записать натуральное число, его квадрат и его куб?

6. На одной стороне некоторого угла последовательно отмечены точки A_0, A_1, ..., A_{1000}, а на другой — точки B_0, B_1, ..., B_{1000} так, что

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{999}A_{1000}, \; B_0B_1 = B_1B_2 = \ldots = B_{999}B_{1000}.$$

Известно, что площадь четырёхугольника $A_0A_1B_1B_0$ равна 3, а площадь четырёхугольника $A_1A_2B_2B_1$ равна 5.

Найдите площадь четырёхугольника $A_{999}A_{1000}B_{1000}B_{999}$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что длина стороны AB в два раза больше длины стороны AD, а длина стороны BC в два раза больше длины стороны CD.

Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BAD = \alpha$, а длина диагонали AC равна d.

8. В волейбольном турнире приняло участие несколько команд. После того, как турнир закончился, выяснилось, что среди любых четырёх команд найдутся две, которые в играх между командами этой четвёрки набрали одинаковое число очков.

Какое наибольшее число команд могло участвовать в этом турнире? (За победу команде присуждается 1 очко, за поражение — 0, ничьих в волейболе не бывает.)

10 класс

1. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O.

Докажите, что

а) сумма диаметров окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, не превосходит $(2-\sqrt{2})\,(AC+BD)$;

б) если O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA соответственно, то

$$O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_4 + O_4O_1 < 2(\sqrt{2}-1)\,(AC+BD)\,.$$

2. Известно, что $\dfrac{\sin a}{\sin b} = \dfrac{\sin c}{\sin d} = \dfrac{\sin(a-c)}{\sin(b-d)}$, где a, b, c, $d \in (0,\pi)$.

Докажите, что $a = b$ и $c = d$.

3. Несколько охотников охотятся на зайца, который сидит в одной из вершин куба, но охотникам он не виден. Охотники стреляют по вершинам куба залпами, т. е. все одновременно делают по выстрелу — каждый в свою вершину (любую, по его выбору), и если в какой-то из них оказался заяц, то он будет убит. Если никто не попал в зайца, то до следующего залпа заяц либо перебегает в одну из соседних (по ребру) вершин (любую, по своему выбору), либо остаётся в той же вершине, в которой сидел.

Существует ли такое N, что у охотников есть способ наверняка убить зайца за N залпов, если количество охотников равно

а) трём? **б)** пяти? **в)** четырём?

4. В системе равенств $n = ab + cd = ef + gh$ все числа натуральные и попарно различные.

Найдите наименьшее возможное значение n.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что длины сторон AB и BC равны и равны сумме длин сторон AD и CD.

Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle BAD = \alpha$, а длина диагонали AC равна d.

6. Функция $f(x)$ определена при всех рациональных $x \geqslant 1$, принимает действительные значения и при любых рациональных $x, y \geqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$|\,f(x+y) - f(x) - f(y)\,| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое действительное число.

Докажите, что существует ~~рациональное~~ действительное число q такое, что при всех рациональных $x \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{x} - q \right| < 2\varepsilon.$$

$q \in \mathbb{R}$

7. Треугольник и прямоугольник назовём союзными, если равны как их периметры, так и их площади.

Докажите, что для прямоугольника тогда и только тогда существует союзный ему треугольник, когда этот прямоугольник — не квадрат и отношение его бо́льшей стороны к меньшей не меньше, чем $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$, где $\lambda = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Пятеро спортсменов проводят парный турнир по теннису. В первом матче встречаются две пары, составленные произвольно из каких-то четырёх участников. После этого, проигравшая пара расформировывается, а пара – победительница играет с новой парой, составленной произвольно. Следующая игра организовывается по такому же правилу, и т. д. Все участники турнира имеют рейтинги, среди которых нет равных. Суммарные рейтинги любых двух пар также различны. В каждом матче выигрывает та пара, у которой больший рейтинг. Игры проводятся до тех пор, пока не встретятся пары, которые уже между собой играли.

Какое наибольшее число матчей могло состояться в таком турнире?

11 класс

1. Дана таблица $n \times n$ $(n \geqslant 3)$, разбитая на n^2 клеток со стороной 1. В каждой клетке таблицы нарисован единичный вектор, середина которого совпадает с центром клетки; каждый вектор параллелен одной из сторон квадрата. Из любой клетки

можно перейти только в клетку, на которую указывает вектор. Известно, что, двигаясь по этому правилу, начав с любой клетки, через некоторое число шагов можно вернуться в эту клетку. Кроме того, векторы направлены так, что ни на каком шагу невозможно покинуть таблицу.

Может ли оказаться, что сумма векторов в любой строке (кроме первой и последней) есть вектор, параллельный этой строке, а сумма векторов в любом столбце (кроме первого и последнего) есть вектор, параллельный этому столбцу?

2. Пусть p и q — натуральные числа. Пусть запись многочлена $(x+1)^p(x-3)^q$ по убывающим степеням переменной x имеет вид

$$(x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0.$$

а) Докажите, что если $a_1 = a_2$, то число $3n$ является квадратом натурального числа.

б) Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел $(p; q)$, таких, что для многочлена

$$(x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

выполнено равенство $a_1 = a_2$.

3. Два треугольника назовём похожими, если один из них является изображением другого при некотором параллельном проектировании.

Докажите, что два треугольника похожи тогда и только тогда, когда либо у них есть по равной стороне, либо в каждом из них найдётся по равному отрезку, соединяющему вершину с внутренней точкой противолежащей ей стороны, такому, что отношения, в котором эти отрезки делят противолежащие стороны, соответственно равны.

4. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ удовлетворяют условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1$.

Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots\frac{a_n^2}{a_n+b_n}.$$

5. Пусть n и k — натуральные числа, $n > k$. Бумажная полоска ширины 1 и целой длины больше n разбита на клетки 1×1. Учитель дал Пете и Феде задание вписать в клетки этой полоски единицы и нули так, чтобы в любых n подряд идущих клетках сумма всех чисел равнялась k. Когда Петя и Федя выполнили задание (каждый на своей полоске), то оказалось, что суммы всех чисел у них различные.

На какое наибольшее число могут различаться эти суммы?

6. **а)** Натуральное число назовём своим, если его можно представить в виде среднего арифметического нескольких (не обязательно различных) натуральных чисел, каждое из которых является целой неотрицательной степенью числа 2.

Докажите, что все натуральные числа являются своими.

б) Натуральное число назовём чужим, если его нельзя представить в виде среднего арифметического нескольких попарно различных чисел, каждое из которых является целой неотрицательной степенью числа 2.

Докажите, что существует бесконечно много чужих натуральных чисел.

7. Постройте функцию f, определённую на множестве всех действительных чисел и принимающую все действительные значения, такую, что выражение $f(x+y)-f(x)-f(y)$ при всех действительных x и y принимает ровно два различных значения — 0 и 1.

8. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ длина стороны AB равна длине стороны BC, а длина стороны CD равна длине стороны DE; $\angle ABC = 150°$, $\angle CDE = 30°$, $BD = 2$.

Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

1. Ответ: 21.

Пусть у малышей первоначально было по x конфет. Из условия задачи следует, что после того, как малыши съели 30 конфет, число конфет, которые остались у Ани, делится на 6. Обозначим это число через $6a$, где a — некоторое целое положительное число. Тогда у Тани стало $3a$ конфет, а у Вани — $2a$ конфет. Подсчитывая число съеденных конфет и учитывая условие задачи, имеем уравнение $(x-6a)+$ $+(x-3a)+(x-2a)=20$, или

$$3x = 11a + 30. \qquad (*)$$

Поскольку число конфет, съеденных Аней, $x-6a \geqslant 0$, то $3x \geqslant 18a$, или, ввиду $(*)$, $11a+30 \geqslant 18a$, т. е. $7a \leqslant 30$. Из этого неравенства видно, что натуральное число $a \leqslant 4$. Кроме того, a делится на 3, иначе равенство $(*)$ не может быть верным. Значит, $a = 3$. Тогда из $(*)$ находим $3x = 11 \cdot 3 + 30 = 63$, откуда $x = 21$.

2. Ответ: а) да; **б)** нет.

а) Такие числа существуют. Например, для первых 11 натуральных чисел имеем:

$$1+2+\ldots+11=\frac{(11+1)\cdot 11}{2}=66=1\cdot 6\cdot 11.$$

б) Таких чисел не существует. Предположим противное: пусть числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$ удовлетворяют требуемому условию. Тогда

$$a_1a_6a_{11} = a_2+\ldots+a_5+a_7+\ldots a_{10} < 8a_{11} \quad\Longrightarrow\quad a_1a_6 < 8.$$

Поскольку $a_6 \geqslant 6$, то $a_1 = 1$. Значит, $a_6 < 8$, т.е. $a_6 \leqslant 7$. Тогда последовательно получаем $a_5 \leqslant 6$, $a_4 \leqslant 5$, $a_3 \leqslant 4$, $a_2 \leqslant 3$. Поэтому,

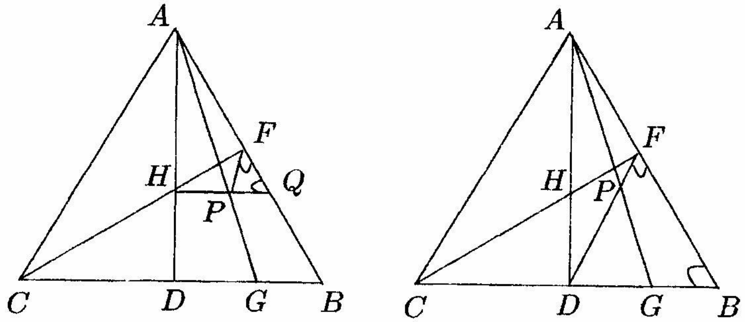
$$6a_{11} \leqslant 2+\ldots+7+a_7+\ldots+a_{10} = 27+a_{10}+a_9+a_8+a_7 \leqslant$$

$$\leqslant 27 + (a_{11} - 1) + (a_{11} - 2) + (a_{11} - 3) + (a_{11} - 4) =$$

$$= 27 + 4a_{11} - 10 = 17 + 4a_{11}.$$

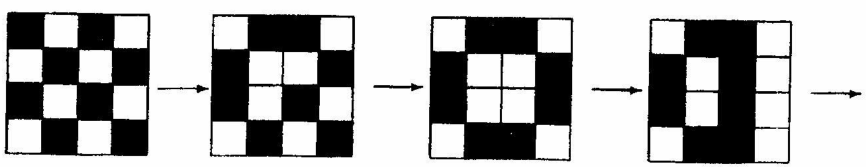
Следовательно, для числа a_{11} должно быть выполнено неравенство $2a_{11} \leqslant 17$, что невозможно, так как $a_{11} \geqslant 11$. Полученные противоречие и доказывают требуемое утверждение.

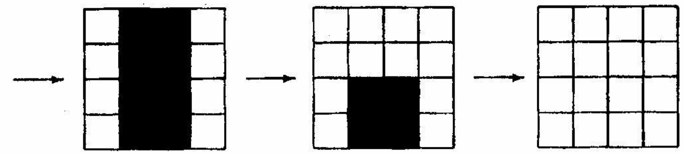
3. В прямоугольном ΔHFQ отрезок FP — медиана, проведённая к гипотенузе HQ. Поэтому $FP = PQ$, откуда $\angle PFQ = \angle PQF$. Поскольку ΔABC равнобедренный, то его высота AD является и медианой, т.е. $CD = DB$.



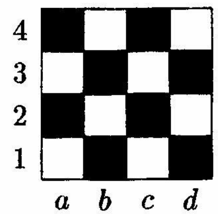
Поэтому в прямоугольном ΔCFB отрезок FD — медиана, проведённая к гипотенузе CB. Поэтому $FD = DB$, откуда $\angle DFB = \angle DBF$. Следовательно, получаем равенство $\angle HQF = \angle PQF = \angle PFQ = \angle DFQ = = \angle DFB = \angle DBF$, т.е. $\angle HQF = \angle DBF$. Следовательно, внешние односторонние углы при прямых HQ и BC и секущей AB равны, а, значит, прямые HQ и CB параллельны.

4. Покажем, как при помощи 6-ти ходов перекрасить клетки квадрата 4×4 в один цвет.





Докажем, что меньшим, чем шесть, числом ходов обойтись нельзя. Для клеток доски 4×4 будем использовать шахматную нотацию (см. рис.). Условимся квадрат 2×2 обозначать его левой верхней

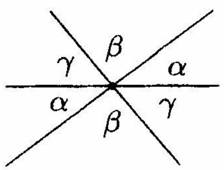


верхней клеткой (например, перекраске в решении подвергались последовательно следующие 2×2-квадраты: $a4$, $c2$, $c3$, $a3$, $b4$, $b2$). Про каждую клетку того квадрата 2×2, клетки которого перекрашиваются на некотором ходу, будем говорить, что она участвует в этом ходе. Без нарушения общности будем считать, что мы перекрашиваем клетки квадрата 4×4 в белый цвет. Все белые клетки, так как их цвет должен в результате остаться прежним, должны участвовать в чётном числе ходов (не исключается, что некоторые клетки — ни в каком, т. е. нулевом, числе ходов). Так как клетка $a4$ чёрная, то она должна быть перекрашена. Единственный квадрат 2×2, который эту клетку содержит, — квадрат $a4$. Но поскольку квадрат $a4$ содержит белую клетку $b4$, то эта клетка участвует хотя бы в одном, а значит, не менее чем в двух ходах. То же заключаем и относительно белой клетки $d2$. Далее, так как чёрная клетка $b1$ должна быть перекрашена, а её содержат только 2×2-квадраты $a2$ и $b2$, которые содержат белую клетку $b2$, то клетка $b2$ также должна участвовать не менее чем в двух ходах. Итак, каждая из клеток $b2$, $b4$ и $d2$ должна участвовать не менее чем в двух ходах. Поскольку любой квадрат 2×2 содержит только одну из этих клеток, то, следовательно, ходов должно быть не менее $2 + 2 + 2 = 6$, что и утверждалось.

5. Обозначим длины сторон и диагоналей данного четырёхугольника $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Так как числа, записанные возле вершин A и C, равны, то $a + d + e = b + c + e$, откуда $a + d = b + c$. Аналогично получаем равенство $a + b = d + c$.

Складывая эти два равенства, после очевидных преобразований получаем $c = a$. Тогда и $d = b$. Таким образом, $ABCD$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно равны. Далее, приравнивая числа, записанные возле вершин A и B, получим $a+d+e = a+f+b$, откуда с учётом $d = b$ следует, что $e = f$. Итак, у параллелограмма $ABCD$ диагонали равны. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник.

6. Две пересекающиеся прямые образуют 4 угла — две пары вертикальных. Так как из трёх прямых можно образовать ровно три различные пары и каждая даёт 4 угла, то всего углов $3 \cdot 4 = 12$ — по 6 пар вертикальных. Поэтому, если обозначить угловые меры углов, образованных соседними полупрямыми, через α, β и γ (см. рис.), то угловые меры остальных углов будут $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ и $\alpha+\gamma$. Без нарушения общности считаем, что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.



Неравенства $\alpha < \beta < \gamma$ невозможны, поскольку тогда углов с разной угловой мерой было бы больше трёх. Аналогично, невозможны и равенства $\alpha = \beta = \gamma$, поскольку тогда углов с разной угловой мерой было бы меньше трёх. Следовательно, остаётся рассмотреть только два случая: 1) $\alpha < \beta = \gamma$ и 2) $\alpha = \beta < \gamma$.

Случай 1) невозможен, так как в этой ситуации имеется четыре угла с разной угловой мерой: $\alpha < \beta < \alpha+\beta < \beta+\gamma$. В случае 2) пять (из шести) угловых мер углов упорядочены, как легко видеть, так: $\alpha = \beta < \gamma < \alpha+\gamma = \beta+\gamma$, — т. е. уже имеем три угла с разной угловой мерой. Значит, так как оставшаяся угловая мера $\alpha+\beta$ удовлетворяет неравенствам $\beta < \alpha+\beta < \alpha+\gamma$, то должно выполняться равенство $\alpha+\beta = \gamma$. Но $\alpha+\beta+\gamma = 180°$; значит, $2\gamma = 180°$, откуда $\gamma = 90°$, что и требовалось доказать.

7. Ответ: 16 кг.

Обозначим через x и y количества килограммов пойманной большой и маленькой рыбы соответственно. Тогда сумма, которую намеревались выручить Дядя Фёдор, Кот Матроскин и Шарик, равна $950x+$ $+800y$ рублей. То, что Матроскин недовешивал на каждом килограмме

50 граммов, означает, что он продавал 950 граммов рыбы за 950 руб., или, что то же, 1 кг по цене 1000 руб. Значит, продав 95% довезённой им до города рыбы, Матроскин выручил $0,95 \cdot 1000 \cdot (x+y-3)$ рублей. Согласно условию $950x + 800y = \ = 0,95 \cdot 1000 \cdot (x+y-3)$, или $950x + 800y = 950x + 950y - 2400$, т. е. $150y = 2400$, откуда $y = 16$ кг.

8. Ответ: 3 .

Пусть каждая полоска имеет длину $11n + r$, где r — остаток при делении n на 11, $0 \leqslant r \leqslant 10$. Мы можем отрезать от любого края полоски кусок длины $11(k-1)$ — от этого разность между Петиной и Фединой суммами не изменится, так как обе они уменьшатся на число $8(k-1)$. Обозначим суммы чисел на оставшихся кусках полосок через S_1 и S_2 соответственно. Пусть x_1 и x_2 — суммы чисел в клетках полосок с номерами $r+1$, $r+1$, ..., 11 (их всего $11 - r$), считая от левого края. (Все эти числа принадлежат как левым 11 клеткам, так и правым крайним 11 клеткам.) Тогда $S_1 = 8+8-x_1 = 16-x_1$ и $S_2 = 8+8-x_2 = 16-x_2$. Поэтому $S_1 - S_2 = x_2 - x_1$. Так как в первых 11 клетках стоит 8 единиц, а в первых r клетках — не более r единиц, то $x_1 \geqslant 8 - r$. Кроме того, $x_1 \leqslant 11 - r$, так как соответствующих клеток не более $11 - r$. Поэтому $x_2 - x_1 \leqslant 11 - r - (8 - r) = 3$. С другой стороны, из следующего примера видно, что разность может принимать значение 3.

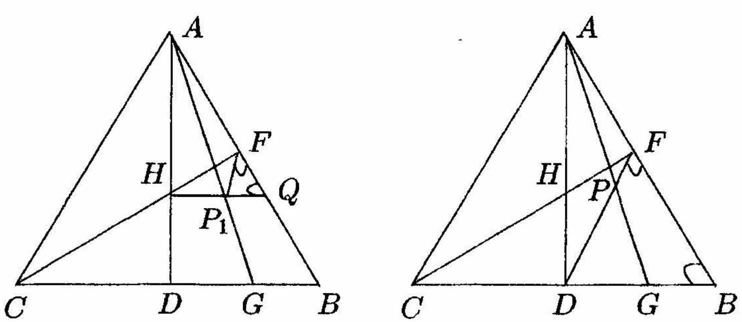
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	$S_1 = 11$

0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	$S_2 = 8$

8 класс

1. Всякое простое число имеет ровно 2 делителя. Поэтому числа a и b не являются простыми. Если число a имеет различные собственные делители: $a = xy$, где x и y — различные натуральные числа, большие 1, то у a по крайней мере 4 различных натуральных делителя: 1, x, y и само число a. Поэтому число a при разложении на простые множители может представляться, только как степень некоторого простого числа p, причем, эта степень не может быть больше второй (иначе число $a = p^n$ имеет различные собственные делители $x = p$ и $y = p^{n-1}$ и, значит, не менее четырёх делителей). Следовательно, $a = p^2$ и (по тем же соображениям) $b = q^2$, где q — другое простое число ($q < p$). Тогда разность данных чисел a и b имеет следующее разложение на множители $a - b = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$. Но $a - b$ — простое число, так как имеет 2 делителя. Поэтому меньший из множителей в полученном разложении $p - q = 1$, откуда в частности следует, что одно из простых чисел p и q является чётным. Единственное чётное простое число — это число 2. Значит, $q = 2$, а $p = 3$. В результате, $a = 3^2 = 9$, а $b = 2^2 = 4$. Нетрудно убедиться, что найденные числа действительно удовлетворяют условию задачи.

2. В прямоугольном ΔHFQ отрезок FP — медиана, проведённая к гипотенузе HQ. Поэтому $FP = PQ$, откуда $\angle PFQ = \angle PQF$.



Так как AD — медиана, то $CD = DB$. Поэтому в прямоугольном ΔCFB отрезок FD — медиана, проведённая к гипотенузе CB. Поэтому $FD = DB$, откуда $\angle DFB = \angle DBF$. Следовательно, получаем равенство внешних односторонних углов

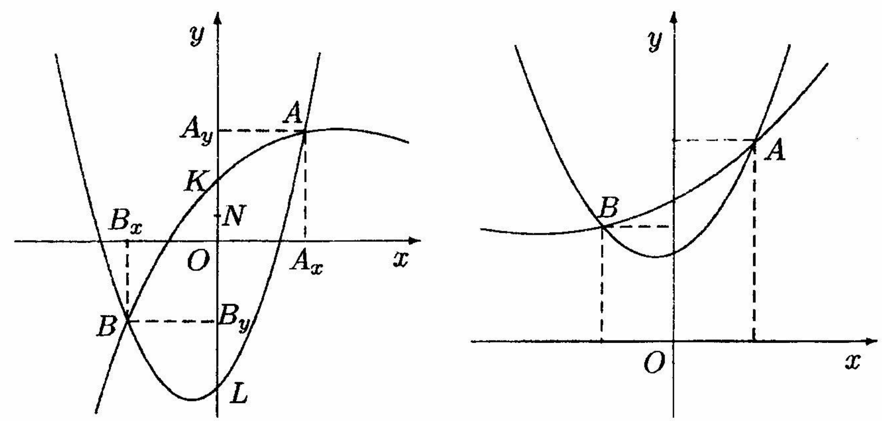
$$\angle HQF = \angle PQF = \angle PFQ = \angle DFQ = \angle DFB = \angle DBF,$$

которое и гарантирует параллельность HQ и CB.

3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = cx^2 + bx + a. \end{cases}$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, после приведения подобных получим $0 = (a - c)x^2 + c - a$, т. е. $(a - c)(x^2 - 1) = 0$. Так



как по условию $a - c \neq 0$, то $x^2 - 1 = 0$, откуда получаем два значения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Подставив их в правые части уравнений системы, получим $y_1 = a + b + c$ и $y_2 = a - b + c$ соответственно. Значит, данные параболы пресекаются в точках $A(1; a+b+c)$ и $B(-1;\ a - b + c)$ (см. рис., на котором изображён случай, когда a и c имеют разные знаки; в случае, когда a и c имеют одинаковые знаки, оба положительные или оба отрицательные, все вычисления и построения абсолютно аналогичны.)

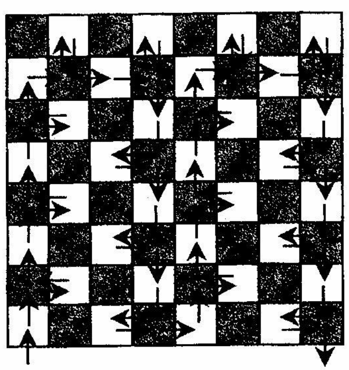
Из точек A B опустим перпендикуляры на ось Ox. Получим точки $A_x(1;\ 0)$ и $B_x(-1;\ 0)$. Значит, начало координат, точку O, мы получим построив середину отрезка B_xA_x. Далее, проведя перпендикуляр через O перпендикуляр к оси Ox, получим ось Oy. Подставляя в уравнения парабол $x = 0$, находим, что они пресекают ось Oy в точках $L(0;\ c)$ и $K(0;\ a)$ (учитывая, что $a > c$, точка K расположена на оси Oy выше точки L). Тогда отрезок OK имеет длину $|a|$, а отрезок OL — длину $|c|$.

Осталось построить отрезок длины $|b|$. Из точек A и B опустим перпендикуляры на ось Oy. Получим точки $A_y(0;\ a+b+c)$ и $B_y(0;\ a-b+c)$, расстояние между которыми равно $|(a+b+c)-$ $-(a-b+c)| = 2|b|$. Поэтому, чтобы найти отрезок длины $|b|$ достаточно построить середину отрезка A_yB_y, точку N. Тогда $A_yN =$ $= NB_y = |b|$.

4. Ответ: 65 ходов.

Следующий пример показывает, что жук может перекрасить все клетки доски в чёрный цвет. Здесь стрелками указаны ходы жука и, тем самым, весь его путь по доске.

Можно подсчитать, что в данном примере жук совершил 65 ходов.



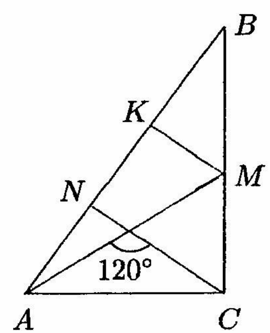
Покажем, что за меньшее число ходов, следуя всем правилам, жук не может перекрасить всю доску в чёрный цвет. Действительно, чтобы перекрасить все белые клетки в черный цвет, он должен побывать в каждой первоначально белой клетке нечётной число раз, по крайней мере, не меньше одного. Жук не может переползти из первоначально белой клетки сразу одним ходом в другую первоначально белую клетку, так как клетки одного цвета при шахматной раскраске не являются соседними (не имеют общей стороны). Значит, на пути жука будет происходить чередование первоначально белых клеток с первоначально черными. Если первая клетка чёрная, то видно, что ходов на черные (при исходной окраске) клетки не меньше, чем на белые. Поэтому число ходов на клетки доски не меньше, чем 64 (32 хода на белые клетки и столько же на чёрные). Ещё один ход нужен, чтобы покинуть доску. Всего — не менее 65 ходов. Если первый ход жук совершил на белую

клетку, то число ходов на черные клетки также не меньше 32, в частности жук покинет доску с первоначально чёрной клетки. Действительно, если бы последняя клетка была белая (при исходной раскраске), то, учитывая, что на пути жука цвет клеток чередуется, при минимально возможном числе ходов на белые клетки, равном 32, на чёрные клетки должно быть сделано нечётное число ходов — 31. Но тогда на какой-то чёрной клетке жук побывал бы нечётное число раз и, значит, эта клетка после того, как жук покинул бы доску, оказалась бы белой. Так что, и в этом случае минимальное число ходов не меньше, чем 65.

5. Заметим, что число 1 является своим, поскольку оно является, например, средним арифметическим самого себя. Пусть теперь $m > 1$ — произвольное натуральное число, и пусть n^2 — любой квадрат, больший числа m. Тогда число $\dfrac{1}{n^2-1}(1^2+\ldots+1^2+n^2+\ldots+n^2)$ есть среднее арифметическое n^2-1 чисел, n^2-m из которых равны 1^2, и $m-1$ из которых равны n^2. С другой стороны, это число равно $\dfrac{1}{n^2-1}(n^2-m+n^2(m-1)) = m$. Таким образом, число m своё. Тем самым утверждение доказано.

6. Ответ: 6.

Проведём $MK \| CN$ (см. рис.). Так как $CM = MB$ (согласно условию M — середина стороны BC), то по теореме Фалеса $NK = KB$ и, значит, $NK =$ $= \frac{1}{2}NB = AN$. Тогда снова по теореме Фалеса $AO = OM$ и, значит, $OM = \frac{1}{2}AM = 3$. Далее, так как KM — средняя линия треугольника NBC, то $KM = \frac{1}{2}NC = 2$. В свою очередь, так как NO — средняя линия треугольника NBC, то $NO = \frac{1}{2}KM = 1$. Тогда $OC = CN - NO = 3$. Получается, что в треугольнике OMC две стороны равны 3. Значит, он равнобедренный. Кроме того, в этом треугольнике $\angle MOC = 180° - \angle AOC = 60°$.



А всякий равнобедренный треугольник, один из углов которого равен $60°$, является равносторонним. Поэтому $MC = OC = OM = 3$ и, значит, $BC = 2 \cdot MC = 6$.

7. **Ответ**: 7 гирек.

Заметим, что если мы разделим все веса гирек на их общий делитель, то получим набор гирек, удовлетворяющий условию задачи. Значит, без нарушения общности можно считать, что среди гирек есть хотя бы одна гирька с нечётным весом. Поэтому N не может быть чётным. В самом деле, условие задачи означает, в частности, что какую бы гирьку из набора ни выбросить, вес оставшихся — чётное число граммов. Если в наборе нечётное число гирек с нечётным весом, то, поскольку N чётное, имеется гирька с чётным весом. Выбросив её, получим, что вес оставшихмя составляет нечётное число. Если же в наборе чётное число гирек с нечётным весом, то выбросив любую из этих гирек, получим нечётный вес оставшихся гирек.

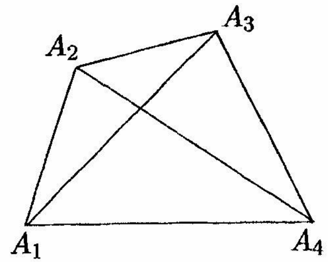
Следовательно, N — нечётное число. Ясно, что искомое $N \neq 3$, поскольку выбросив любую гирьку, получим, что веса двух оставшихся гирек должны быть равны. Докажем, что искомое $N \neq 5$. Допустим противное: пусть $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ — веса гирек набора, удовлетворяющего условию задачи. Выбросим гирьку веса b_5. Оставшиеся четыре гирьки, если и можно разложить на две группы равного веса, то только одним из двух способов: либо 1) $b_1 + b_2 + b_3 = b_4$, либо 2) $b_2 + b_3 = b_1 + b_4$. Способ 1) невозможен, поскольку если выбросить гирьку b_4, то гирьку веса b_5 уравновесить будет нельзя, так как $b_5 > b_1 + b_2 + b_3$.

Пусть поэтому уравновешивание произошло по способу 2). Если из набора выбросить гирьку веса b_4, то, поскольку $b_5 > b_4$, гирьку веса b_5 можно уравновесить только так: $b_5 = b_1 + b_2 + b_3$. Если мы из набора выбросим либо гирьку веса b_2, либо гирьку веса b_3, т. е. останутся гирьки весов $b_1 < b_i < b_4 < b_5$ (где $i = 2$ или $i = 3$), то, поскольку, как следует из предыдущего равенства, $b_5 < b_1 + b_i + b_4$, их уравновешивание возможно только такое: $b_5 + b_1 = b_4 + b_i$, откуда $b_i = b_5 + b_1 - b_4$, т. е. $b_2 = b_3$. Противоречие.

Остаётся на примере убедиться, что существует набор из 7 гирек попарно различного веса, удовлетворяющий условию задачи. Например, гирьки веса: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

8. **Ответ**: нет, не могут.

Докажем, что для любых двух записанных чисел, x и y, справедливо равенство $3x \geqslant y$. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 — отмеченные точки и a_1, a_2, a_3 и a_4 — числа, записанные рядом с ними соответственно. Тогда



$$a_1 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4,$$
$$a_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_4,$$
$$a_3 = A_1A_3 + A_2A_3 + A_3A_4,$$
$$a_4 = A_1A_4 + A_2A_4 + A_3A_4.$$

Используя неравенство треугольника, можно записать

$A_1A_2 + A_1A_3 \geqslant A_2A_3 \quad A_1A_3 + A_1A_4 \geqslant A_3A_4 \quad A_1A_2 + A_1A_4 \geqslant A_2A_4$.

Сложив эти неравенства, получим $2a_1 \geqslant A_2A_3 + A_3A_4 \geqslant A_2A_4$, откуда $4a_1 \geqslant 2(A_2A_3 + A_3A_4 \geqslant A_2A_4)$. Добавив к обеим частям этого неравенства величину $a_1 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4$, получим

$$5a_1 \geqslant (A_1A_2 + A_2A_3 + A_2A_4) + (A_1A_3 + A_2A_3 + A_3A_4) +$$
$$+ (A_1A_4 + A_2A_4 + A_3A_4),$$

т. е. $5a_1 \geqslant a_2 + a_3 + a_4$.

Пусть a_1 — наименьшее из чисел a_1, a_2, a_3 и a_4. Тогда наибольшее — одно из остальных чисел, скажем a_4. Сложив почленно последнее неравенство с неравенствами $a_2 \geqslant a_1$ и $a_3 \geqslant a_1$, получим $5a_1 + a_2 + a_3 \geqslant a_2 + a_3 + a_4 + a_1 + a_1$, откуда после упрощения $3a_1 \geqslant a_4$. Учитывая, что a_1 — минимальное, а a_4 — максимальное из чисел a_i, ($i = 1, 2, 3, 4$), то для любых других пар записанных чисел (x, y) неравенство $3x \geqslant y$ тем более верно. Поскольку для чисел 8 и 25 неравенство $3 \cdot 8 \geqslant 25$ — не верно, то среди четырёх записанных чисел не могут присутствовать числа 8 и 25.

9 класс

1. Ответ: **а)** для любого $k \geqslant 3$; **б)** нет, не существует.

а) *Первое решение.* Докажем индукцией по $k \geqslant 3$, что существует k натуральных чисел, таких, что любые два из них не взаимно просты, а любые три — взаимно просты.

Если $k = 3$, то такие числа указать легко, например, 6, 10, 15. Если $n \geqslant 3$ чисел $a_1, \ldots, a_n$ обладают требуемым свойством, то возьмём n попарно различных простых чисел $p_1, \ldots, p_n$, каждое из которых не делит никакое из чисел $a_1, \ldots, a_n$, и образуем $n+1$ число

$$a'_i = a_i \cdot p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad a'_{n+1} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Докажем, что числа a'_m, $m = 1, \ldots, n+1$, обладают требуемым свойством. Действительно, так как a_i и a_j не взаимно просты, то не взаимно просты и a'_i и a'_j, если $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Числа же a'_{n+1} и a'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, не взаимно просты, так как делятся на p_i. Если бы числа a'_i, a'_j, a'_m не были взаимно просты, то каждое из них делилось бы на какое-то (одно и то же) простое p_l, что в силу построения этих чисел невозможно.

Второе решение. Поставим в соответствие каждой (неупорядоченной) паре (m, n), где $m \neq n$, чисел множества $\{1, \ldots, k\}$ простое число $\varphi(m, n)$ (своё для каждой пары и отличное от простых, ставящихся в соответствие другим таким парам). Определим

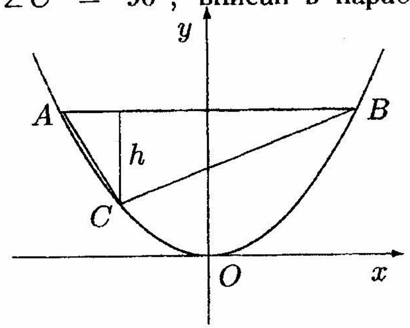
$$a_i = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{k} \varphi(i, n), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тогда множество $\{a_1, \ldots, a_k\}$ удовлетворяет требуемому условию. В самом деле, НОД$(a_i, a_j) = \varphi(i, j)$, но НОД$(a_i, a_j, a_l) = 1$, так как НОД$(a_i, a_j) = \varphi(i, j)$ и НОД$(a_i, a_l) = \varphi(i, l)$, а простые $\varphi(i, j)$ и $\varphi(i, k)$ различны.

б) Допустим противное, и пусть a_1, a_2, … — такая последовательность натуральных чисел. Тогда $a_1 > 1$, и пусть $a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$

— каноническое разложение на простые множители. Рассмотрим $s+1$ число a_2, a_3, …, a_{s+2}. Так как эти числа не взаимно просты с a_1, то каждое из них делится на какое-либо из чисел p_1, …, p_s. Следовательно, найдутся два числа, скажем, a_m и a_n, делящиеся на одно и то же p_i. Но тогда числа a_1, a_m и a_n не взаимно просты. Противоречие.

2. *Необходимость.* Пусть прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, вписан в параболу требуемым образом и h — его высота, опущенная на гипотенузу. Если a — абсцисса точки A, то $-a$ — абсцисса точки B. Обозначим через c абсциссу точки C. Тогда $A(a; a^2)$, $B(-a; a^2)$, $C(c; c^2)$, $\overrightarrow{AC} = (c - a, c^2 - a^2)$, $\overrightarrow{BC} = (c + a, c^2 - a^2)$. Нетрудно заметить, что $|c| < |a|$ и $h = a^2 - c^2$.



Условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ равносильно равенству нулю их скалярного произведения. Поэтому,

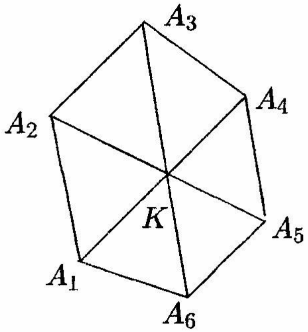
$$0 = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = (c - a)(c + a) + (c^2 - a^2)(c^2 - a^2) =$$
$$= (c - a)(c + a)(1 + (c - a)(c + a)) = (c - a)(c + a)(1 + c^2 - a^2) =$$
$$= (c - a)(c + a)(1 - h).$$

Следовательно, $h = 1$.

Достаточность. Покажем, что любой прямоугольный треугольник, у которого высота, опущенная на гипотенузу, равна 1, можно вписать в параболу $y = x^2$ требуемым образом. Пусть в прямоугольном треугольник ABC гипотенуза $AB = u$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна $h = 1$.

Очевидно, что $u \geqslant 2h = 2$. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1(-\frac{u}{2}; \frac{u^2}{4})$, $B_1(\frac{u}{2}; \frac{u^2}{4})$, $C_1(\frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2}; \frac{u^2 - 4}{4})$. Очевидно, что все три эти точки лежат на параболе $y = x^2$. Кроме того, тривиальная проверка показывает, что $A_1B_1 = u$, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, $h_1 = 1$, где h_1 — длина высоты, опущенной из вершины C_1 на сторону A_1B_1. Следовательно, $A_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза A_1B_1 равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABC, и высота h_1 равна высоте h. Но это означает, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны, что и доказывает требуемое утверждение.

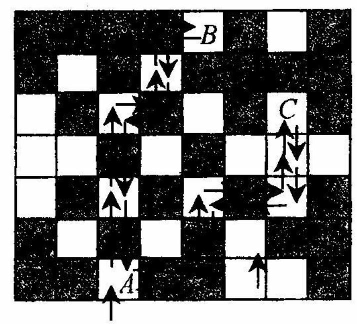
3. Рассмотрим четырёхугольник $A_2A_3A_4K$. В нём стороны A_2A_3 и A_2K равны, а также стороны A_4A_3 и A_4K равны. Треугольники



KA_2A_3 и KA_4A_3 равнобедренные, поэтому середина отрезка A_3K является основанием высот, опущенных на него из вершин A_2 и A_4. Иными словами, диагональ A_2A_4 делит отрезок A_3K пополам и перпендикулярна ему. В частности, A_6A_3 является высотой в треугольнике $A_2A_4A_6$. Из соображений аналогии заключаем, что K — точка пересечения высот треугольника $A_2A_4A_6$. Опишем окружность около треугольника $A_2A_4A_6$; докажем, что точки A_1, A_3 и A_5 принадлежат ей — тем самым утверждение задачи будет доказано. Заметим, что $\angle A_4A_2A_3 = \angle A_4A_2A_5$. С другой стороны, $\angle A_4A_2A_5 = \angle A_4A_6A_3$ (оба эти угла дополняют угол $\angle A_2A_4A_6$ до $90°$). Таким образом, равные углы $\angle A_4A_2A_3$ и $\angle A_4A_6A_3$ опираются на один отрезок A_3A_4 и лежат в одной полуплоскости относительно A_3A_4. Стало быть, точки A_2, A_3, A_4 и A_6 лежат на одной окружности .Это и означает, что точка A_3 принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника $A_2A_4A_6$. Аналогично доказывается, что точки A_1 и A_5 принадлежат этой окружности. Таким образом, утверждение доказано.

4. Ответ: да, всегда.

Покажем, что жук всегда может перекрасить доску в черный цвет. Это можно сделать, например следующим образом.



Первым ходом жук вползает на любую крайнюю клетку доски, которую будем называть *начальной* (на рисунке это клетка A). Пусть на доске (не считая, может быть, начальной клетки) имеются белые клетки. Рассмотрим одну из них. Пусть это клетка B . Тогда жук совершает некоторый путь в клетку B и возвращается обратно в начальную клетку тем же путем. В результате, клетка B окажется перекрашена в чёрный цвет, в все клетки на данном пути сохранят первоначальный цвет (так как в них жук побывал 2 раза и, значит дважды и перекрасил). Таким образом, после описанной процедуры число белых клеток уменьшается на 1. Если имеется ещё какая-то белая клетка C , то совершив аналогичный путь в C и вернувшись обратно в начальную клетку, жук ещё на 1 уменьшит число белых клеток на доске. Проделав такую процедуру со всеми белыми клетками, все клетки доски кроме, может быть, начальной окажутся чёрными. Если и начальная клетка после описанных процедур тоже чёрная, то вся доска чрная и жук может покинуть доску из клетки A . Если же в конце клетка A окажется белой, то жук может покинуть доску из соседней с A крайней клетки A^* , совершив предварительно путь $A \to A^* \to A \to A^*$.

5. Ответ : нельзя.

Заметим, что если два натуральных числа имеют m и n цифр соответственно, то их произведение имеет либо $(m+n-1)$, либо $(m+n)$ цифр. Действительно, если натуральные числа x и y имеют m и n цифр соответственно, то $10^{m-1} \leqslant x < 10^m$ и $10^{n-1} \leqslant y < 10^n$. Перемножив эти неравенства, получаем: $10^{m+n-2} \leqslant xy < 10^{m+n}$, а это как раз и означает, что xy имеет либо $(m+n-1)$, либо $(m+n)$ цифр. Итак, пусть указанное в условии натуральное число N существует. Тогда, если оно однозначное, то его квадрат - не более, чем двузначный, а куб - не более, чем трехзначный, так что общее количество цифр в них не превосходит $1+2+3=6$. Если же число N не менее, чем трехзначное, то его квадрат содержит не меньше 5 цифр, а куб - не меньше 7 цифр, и всего цифр не меньше $3+5+7=15$. В обоих случаях числа N, N^2 и N^3 нельзя записать с помощью 10 цифр. Таким образом, если указанное в условии число существует, то оно двузначное. В этом случае его квадрат содержит 3 или 4 цифры. Если бы число N^2 содержало 4 цифры, то поскольку N^3 содержит не менее 5 цифр, то всего цифр было бы не менее $2+4+5=11$, что опять же больше 10. Поэтому квадрат должен содержать 3 цифры. Но тогда куб может содержать только $10-2-3=5$ цифр. Итак, теперь известно, сколько цифр содержит число, его куб и квадрат: 2, 3 и 5 соответственно. Поэтому, $10 \leqslant N < 100$, $100 \leqslant N^2 < 1000$ и $10000 \leqslant N^3 < 100000$. Из второго неравенства получаем $10 \leqslant N \leqslant 31$, а из третьего $22 \leqslant N \leqslant 46$. Таким образом, интервал возможных значений N, удовлетворяющих всем трем неравенствам, таков: $22 \leqslant N \leqslant 31$. В принципе, можно перебрать все эти числа (их всего-то 10 штук), но можно существенно сократить перебор. Заметим, что сумма всех 10 цифр равна $0+1+2+\ldots+9=45$, т.е. делится на 9. Поэтому и число $N+100\cdot N^2+10000\cdot N^3$ также должно делится на 9. Но тогда и число $N+N^2+N^3=N(1+N+N^2)$ должно делиться на 9. Но нетрудно заметить, что это возможно лишь тогда, когда само число N делится на 9. Следовательно, единственным числом, которое может удовлетворять условию задачи, является число 27. Однако, $27^2=729$, т.е. число 27 имеет общую цифру со своим квадратом и, следовательно, так же не удовлетворяет условию.

6. Ответ: 2003.

Покажем, что площади S_k четырехугольников $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$, $k=1,2,\ \ldots,\ 1000$ образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, рассмотрим три последовательных четырёхугольника $A_{k-2}A_{k-1}B_{k-1}B_{k-2}$, $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$, $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$. Легко заметить, что

$$S(B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1})=\frac{1}{3}S(B_{k-2}A_{k-2}B_{k+1})$$

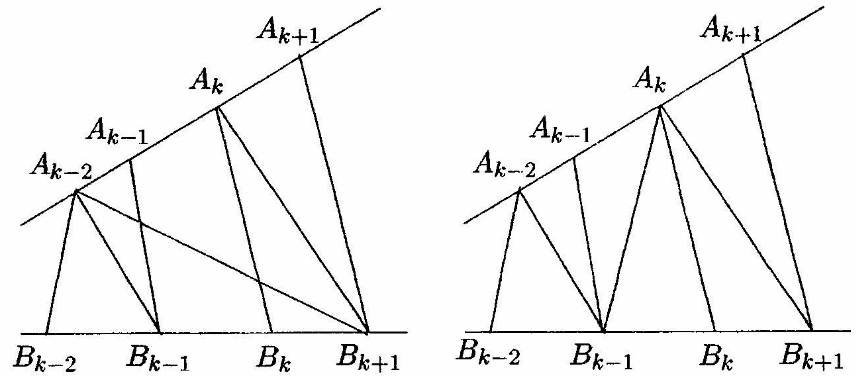
и

$$S(A_{k+1}B_{k+1}A_k)=\frac{1}{3}S(A_{k+1}B_{k+1}A_{k-2}).$$

Поэтому,

$$S(B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1})+S(A_{k+1}B_{k+1}A_k)=\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1}).$$

С другой стороны, $S(A_{k-2}B_{k-1}A_{k-1})=S(A_{k-1}B_{k-1}A_k)$ и так же $S(B_{k-1}A_kB_k)=S(B_kA_kB_{k+1})$.



Поэтому,

$$\begin{aligned}S_{k-1}+S_k+S_{k+1}&=(S(B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1})+S(A_{k+1}B_{k+1}A_k))+\\&+(S(A_{k-2}A_{k-1}B_{k-1})+S(A_{k-1}B_{k-1}A_k))+\\&+(S(B_{k-1}A_kB_k)+S(A_kB_kB_{k+1}))=\\&=\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+2\,(S(A_{k-1}B_{k-1}A_k)+S(A_kB_kB_{k-1}))=\\&=\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+2S_k.\end{aligned}$$

Следовательно,

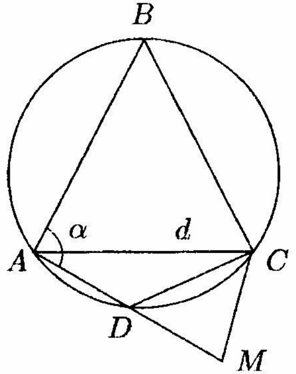
$$S_k=\frac{1}{2}(S_{k-1}+S_{k+1}),$$

откуда и следует, что последовательность площадей S_1, ..., S_{1000} образует арифметическую прогрессию. Очевидно, что разность этой прогрессии равна $S_1 - S_0 = 5 - 3 = 2$. Поэтому

$$S_{1000} = S_0 + 1000(S_1 - S_0) = 3 + 1000 \cdot 2 = 2003.$$

7. Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$.

Отметим на продолжении стороны AD за точку D точку M так, что $DM = AD$. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle ADC + \angle ABC = 180°$. Поэтому, $\angle CDM = 180° - \angle ADC = \angle ABC$. Кроме того, $AB : BC = 2AD : 2DC = AD : DC = DM : DC$. Поэтому, треугольники ABC и CDM подобны (по углу и пропорциональности сторон, его содержащих). Следовательно, $2CM = AC = d$. Заметим также, что $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta CDM}$ (так как CD — медиана в треугольнике ACM). Таким образом,



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2AD \cdot 2CD \cdot \sin(180° - \angle ADC) = 2AD \cdot CD \cdot \sin\angle ADC =$$

$$= 4S_{\Delta ADC} = 2S_{\Delta ACM}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников ABC и MDC следует равенство углов $\angle DCM = \angle BCD$. Тогда $\angle ACM = \angle ACD + \angle DCM = \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - \alpha$. Следовательно, $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACM} = AC \cdot CM \cdot \sin(\angle ACM) = d \cdot \frac{1}{2} d \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$.

8. Ответ: 7 команд.

Предположим, что найдётся команда , которая выиграла не менее четырех игр, например у команд B, C, D, E. Рассмотрим любые три команды, пусть это будут команды B, C, D, из этих четырех проигравших. Легко видеть, что, при выполнение условия задачи, команды B, C, D в играх между командами четверки B, C, D, должны были набрать ровно по одному очку каждая. Поэтому каждая из этих команд в играх между собой должна выиграть одну игру и одну игру проиграть. Очевидно, что это условие должно выполняться для любой тройки команд из четверки B, C, D, E. Но это означает, что в играх между командами этой четверки, каждая из них набрала одинаковое число очков, чего быть не может, ибо всего в играх между четверкой команд разыгрывается $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ очков, а 6 не делится на 4. Таким образом, не существует команды, набравшей в турнире более трех очков. Поэтом, если в турнире участвовало k команд, то общее число очков, набранных всеми командами не должно превышать $3k$. Поскольку всего в турнире было разыграно $\frac{k(k-1)}{2}$ очков, то $k(k-1) \leqslant 2 \cdot 3k$. Поскольку, очевидно, $k \geqslant 4$, то решение этого неравенства — $4 \leqslant k \leqslant 7$. Следовательно, в турнире участвовало не более 7 команд. Таблица турнира, в котором участвовало ровно 7 команд, удовлетворяющего условию задачи, приведена ниже.

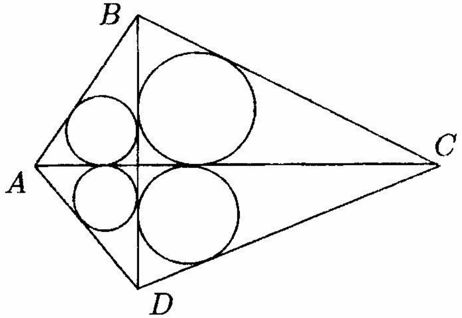
■	1	1	1	0	0	0
0	■	1	0	0	1	1
0	0	■	1	1	1	0
0	1	0	■	1	0	1
1	1	0	0	■	1	0
1	0	0	1	0	■	1
1	0	1	0	1	0	■

10 класс

1. а) Воспользуемся хорошо известной формулой для диаметра d окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, именно: $d = a + b - c$. Поскольку $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и для любых действительных чисел верно неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \geqslant \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, то, следовательно, для диаметра d выполнена оценка:

$$d \leqslant a+b-\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Стало быть, если обозначить через d_1, d_2, d_3 и d_4 диаметры окружностей, вписанных соответственно в треугольники Стало быть, если обозначить через d_1, d_2, d_3 и d_4 диаметры окружностей, вписанных соответственно в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, то верны неравенства



$$d_1 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AO+BO), \quad d_2 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}(CO+BO),$$

$$d_3 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}(CO+DO), \quad d_4 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AO+DO).$$

Почленно сложив их, получим

$$d_1+d_2+d_3+d_4 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(2\cdot AO+2\cdot CO+2\cdot BO+2\cdot DO) =$$

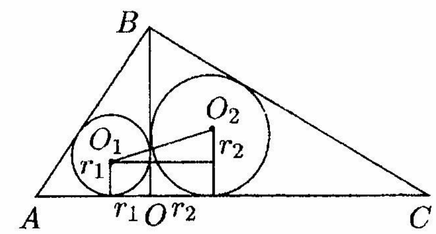
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(2\cdot AC+2\cdot BD) = (2-\sqrt{2})(AC+BD),$$

что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим треугольники AOB и BOC. Пусть, соответственно, r_1 и r_2 — радиусы вписанных в них окружностей. Тогда по теореме Пифагора (см. рис.) $O_1O_2^2 = (r_1+r_2)^2 + +(r_1-r_2)^2 = 2(r_1^2+r_2^2)$, или $O_1O_2 = \sqrt{r_1^2+r_2^2} < \sqrt{2}(r_1+r_2)$. Точно так же получаем, что

$$O_2O_3 < \sqrt{2}(r_2+r_3), \quad O_3O_4 < \sqrt{2}(r_3+r_4), \quad O_4O_1 < \sqrt{2}(r_4+r_1).$$

Почленно сложив четыре последних неравенства, придём к оценке: $O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+ +O_4O_1 < \sqrt{2}(d_1+d_2+d_3+ +d_4)$. Воспользовавшись теперь неравенством п. **а)**, получим требуемую оценку:



$$O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+O_4O_1 < 2(\sqrt{2}-1)(AC+BD).$$

2. *Первое решение.* Очевидно, что $a \neq c$. Пусть для определённости $a > c$. Тогда из условия получаем $b > d$. Имеем:

$$\frac{\sin(\pi-a)}{\sin(\pi-b)} = \frac{\sin c}{\sin d} = \frac{\sin(a-c)}{\sin(b-d)}.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ ($\angle A = \pi-a$, $\angle B = c$, $\angle C = a-c$) и $\triangle DEF$ ($\angle D = \pi-b$, $\angle E = d$, $\angle F = b-d$). Поскольку $\dfrac{\sin\angle A}{\sin\angle D} = \dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle E} = \dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle F}$, то согласно теореме синусов $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE}$. Следовательно, $\triangle ABC$ подобен $\triangle DEF$, поэтому $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, или $\pi-a = \pi-b$, $c = d$, т. е. $a = b$, $c = d$.

Второе решение. Поскольку $\sin a = \dfrac{\sin b\cdot\sin c}{\sin d}$, а $\sin(a-c) = \dfrac{\sin(b-d)\sin c}{\sin d}$, то $\dfrac{\sin(b-d)\cdot\sin c}{\sin d} = \sin a\cdot\cos c - \sin c\cdot\cos a = \dfrac{\sin b\cdot\sin c}{\sin d}\cos c - \sin c\cdot\cos a$, т. е. $\cos a = \dfrac{\sin b\cdot\cos c}{\sin d} - \dfrac{\sin(b-d)}{\sin d}$. Поэтому

$$1 = \sin^2 a+\cos^2 a = \left(\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin d}\right)^2 + \left(\frac{\sin b\cdot\cos c}{\sin d} - \frac{\sin(b-d)}{\sin d}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin^2 b}{\sin^2 d}\left(\sin^2 c+\cos^2 c\right) - 2\cdot\frac{\sin b\cdot\cos c}{\sin d}\cdot\frac{\sin(b-d)}{\sin d} + \frac{\sin^2(b-d)}{\sin^2 d},$$

т. е. имеем: $\sin^2 d = \sin^2 b - 2\cdot\sin b\cdot\cos c\cdot\sin(b-d) + \sin^2(b-d)$ и $2\sin b\cdot\cos c\cdot\sin(b-d) = \sin^2 b - \sin^2 d + \sin^2(b-d)$.

С другой стороны,

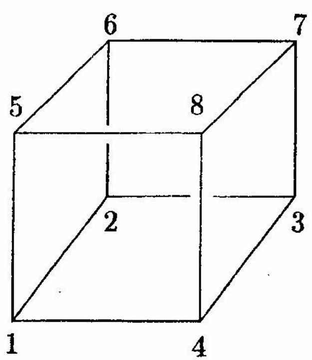
$$\sin^2 b - \sin^2 d + \sin^2(b-d) = \frac{1-\cos 2b}{2} - \frac{1-\cos 2d}{2} + \sin^2(b-d) =$$
$$= \frac{\cos 2d - \cos 2b}{2} + \sin^2(b-d) =$$
$$= \sin(b-d)\cdot\sin(b+d) + \sin^2(b-d) = 2\sin(b-d)\cdot\sin b\cdot\cos d.$$

Поэтому имеем: $2\sin b\cdot\cos c\cdot\sin(b-d) = 2\sin(b-d)\cdot\sin b\cdot\cos d$ и $2\sin(b-d)\cdot\sin b\cdot(\cos c - \cos d) = 0$. Так как $b, d \in (0,\pi)$, то $\sin b \neq 0$ и $\sin(b-d)\neq 0$. Значит, $\cos c = \cos d$. Учитывая то, что $c, d\in(0,\pi)$, получаем $c = d$.

Далее перепишем исходные соотношения в виде $\frac{\sin c}{\sin d} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin(c-a)}{\sin(d-b)}$. Аналогично получаем $a = b$.

3. Ответ: **а)** нет; **б)** да, $N = 4$; **в)** нет.

а) Будем считать, что заяц обладает телепатической способностью и каждый раз знает, в какие вершины собираются стрелять охотники при очередном залпе. Перед каждым залпом у зайца есть выбор из четырёх вершин, в которых он может оказаться: та вершина, в которой он сидит, и три соседние с ней по ребру. Из этих четырёх вершин 3 охотника при залпе могут поразить не более трёх, так что зайцу надо только оказаться в четвёртой.



б) Докажем, что пять охотников могут поразить зайца не более чем за 4 залпа. Обозначим вершины куба цифрами от 1 до 8, как на рисунке. Укажем стратегию охотников. Сначала они стреляют в вершины 1, 2, 3, 4 и 5. Если не попали, то, значит, заяц сидит в одной из вершин 6, 7 или 8. Следующий залп

охотники дают по вершинам 2, 3, 4, 5 и 6. Перебежать в вершину 1 перед этим залпом заяц не может, так как она — не соседняя ни с одной из вершин 6, 7 или 8. Поэтому заяц (если после второго залпа остался жив) должен был находиться в вершинах 7 или 8. Третий залп охотники дают по вершинам 3, 4, 5, 6 и 7. Перед этим залпом заяц, поскольку находился в вершинах 7 или 8, не мог перебежать в вершины 1 или 2. Поэтому его единственное спасение — вершина 8. Наконец, последний — четвёртый — залп по вершинам 4, 5, 6, 7 и 8.

в) Докажем, что ни при каком N у 4-х охотников нет последовательности из N залпов, такой, при которой заяц, в какой бы вершине он не находился первоначально и как бы он ни перемещался по допустимым вершинам куба, наверняка будет убит.

Для этого индукцией по N докажем следующее утверждение: для каждой последовательности из N залпов существует начальное положение зайца, такое, что после N-ого залпа заяц, оставаясь в живых, может по своему выбору находиться в любой из каких-то двух не поражённых при этом залпе вершинах.

Если $N = 1$, то утверждение очевидно, поскольку заяц может сидеть в любой из 4-х не поражённых этим залпом вершинах. Пусть утверждение доказано для $N = k$. Докажем его для $N = k+1$. По предположению индукции после k-ого залпа заяц, оставаясь живым, по своему выбору может находиться в любой из каких-то двух не поражённых при этом залпе вершинах. Но вершин куба, соседних по ребру хотя бы с одной из двух данных вершин и отличных от этих вершин, не менее 4-х; значит, всего вместе с данными вершинами имеем 6 вершин — и в любую из них заяц по своему желанию может попасть после k-ого залпа. По меньшей мере 2 из этих вершин не будут поражены при $(k+1)$-м залпе — и заяц может перейти в любую из них. Следовательно, утверждение верно и для $N = k+1$.

Таким образом, не существует последовательности N залпов, гарантирующей, что заяц непременно будет убит, поскольку для каждой такой последовательности можно вследствие доказанного утверждения указать такую начальную вершину и такие допустимые перемещения зайца, которые сохранят ему жизнь при всех N залпах.

4. Ответ: 31.

Докажем, что $n \geqslant 31$. Если ни одно из чисел $a, b, \ldots, h$ не равно 1, то имеем $2n = ab + cd + ef + gh \geqslant 4\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h} \geqslant$ $\geqslant 4\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 4\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7} = 4 \cdot 4 \cdot 3\sqrt[4]{\frac{35}{2}} >$ $> 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$, откуда $n \geqslant 48$.

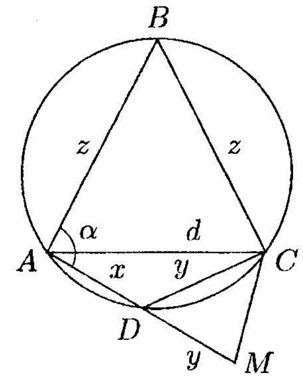
Пусть теперь одно из чисел равно 1, скажем, $h = 1$. Тогда $2n = ab + cd + ef + g$. Оценим выражение $ab + cd + ef + g$ снизу. Если это выражение принимает наименьшее значение, то наибольшим из всех чисел a, b, …, g является число g. Действительно, допустим противное: наибольшим из этих чисел является другое число, скажем, a. Тогда $ab + g > gb + a$ и, значит, $ab + cd + ef + g > bg + cd + ef + a$. Поэтому считаем, что g — наибольшее. Тогда имеем $2n = ab + cd + ef + g \geqslant g + 3\sqrt[3]{ab \cdot cd \cdot ef} \geqslant g + 3\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = g + 3\sqrt[3]{5040} >$ $> g + 3\sqrt[3]{4913} = g + 51$, т. е. $2n > g + 51$. Поскольку $g \geqslant 8$, то $2n \geqslant 60$, откуда $n \geqslant 30$. Если $g \geqslant 9$, то $2n \geqslant 61$, а значит, $n \geqslant 31$.

Предположим, что $n = 30$. Тогда $g = 8$, и множество чисел a, $b, \ldots, h$ совпадает с множеством $1, 2, \ldots, 8$. Однако из этих чисел ровно одно кратно 5 — это число 5. Пусть, например, $a = 5$. Тогда равенство $30 = ab + cd$ невозможно, так как cd не кратно 5, тогда как $30 - ab$ — кратно. Поэтому $n \geqslant 31$. Осталось заметить, что значение $n = 31$ достигается, так как $31 = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5$.

5. На продолжении стороны AD за точку D отметим точку M так, чтобы $DM = CD$. Обозначим $x = AD$, $y = CD$, $z = AB$. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle ADC + \angle ABC = 180°$. Поэтому $\angle CDM = 180° - \angle ADC = \angle ABC$. Кроме того, $AB : BC = DM : DC$. Поэтому треугольники CDM и ABC подобны (по углу и пропорциональности сторон, его содержащих), а коэффициент подобия равен $k = \frac{CD}{AB} = \frac{y}{z}$. Следовательно, $CM = k \cdot AC = kd$. Заметим также, что $S_{\triangle CDM} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$.

Рассмотрим $\triangle ACM$:

$$S_{\triangle CDM} = \frac{y}{x+y} \cdot S_{\triangle ACM} = \frac{y}{z} \cdot S_{\triangle ACM} = k \cdot S_{\triangle ACM}.$$



С другой стороны, из подобия треугольников ABC и MDC следует равенство углов $\angle DCM = \angle BCD$. Тогда

$$\angle ACM = \angle ACD + \angle DCM =$$

$$= \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD.$$

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, то

$$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 180° - \alpha.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{k^2} \cdot S_{\triangle DCM} = \frac{1}{k^2} \cdot k \cdot S_{\triangle ACM} =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CM \cdot \sin \angle ACM = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot k \cdot d \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha.$$

6. Докажем вначале, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех рациональных $x \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$nf(x) - (n-1)\varepsilon \leqslant f(nx) \leqslant nf(x) + (n-1)\varepsilon. \qquad (*)$$

Доказательство неравенства $(*)$ проведём индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ неравенство $(*)$ верно, поскольку превращается в равенство. Пусть оно верно при $n = k$. Докажем его при $n = k + 1$. По условию неравенство

$$f(x) + f(y) - \varepsilon < f(x+y) < f(x) + f(y) + \varepsilon \qquad (**)$$

выполнено при всех рациональных x и y, бо́льших 1. Поэтому, заменив в нём y на kx, получим верное неравенство

$$f(x)+f(kx)-\varepsilon<f((k+1)x)<f(x)+f(kx)+\varepsilon.$$

Воспользовавшись теперь для оценки $f(kx)$ неравенством $(*)$ при $n=k$ (верном по предположению индукции), получим неравенство $(*)$ при $n=k+1$. Неравенство $(*)$ доказано.

Полагая в $(*)$ $x=1$, имеем неравенство

$$nf(1)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(n)\leqslant nf(1)+(n-1)\varepsilon. \qquad ({}^{*}_{**})$$

Полагая же в $(*)$ $x=\frac{m}{n}$ (где $m,n\in\mathbb{N}$ и m — любое $\geqslant n$), получим неравенство $nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(m)\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)+(n-1)\varepsilon$, или, равносильно, $f(m)-(n-1)\varepsilon\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)\leqslant f(m)+(n-1)\varepsilon$. Из этого неравенства и неравенства $({}^{*}_{**})$ вытекает, что

$$mf(1)-(n+m-2)\varepsilon\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)\leqslant mf(1)+(n+m-2)\varepsilon.$$

Разделив все части последнего неравенства на m и обозначив $x=\frac{m}{n}$, получим

$$\left|\frac{f(x)}{x}-f(1)\right|\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)\varepsilon\leqslant 2\varepsilon,$$

т. е. в качестве рационального q из условия может быть взято $f(1)$.

7. По определению прямоугольник союзен треугольнику, если и только если длины его сторон x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+y=p,\\ x\cdot y=S,\end{cases} \qquad (*)$$

где p и S — соответственно полупериметр и площадь некоторого треугольника. Эта система имеет действительные решения, если и только

если $p^2\geqslant 4S$; и эти решения положительны, поскольку положительны p и S. Из системы $(*)$ получаем:

$$\frac{p^2}{S}=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2,$$

или, если обозначить $\frac{x}{y}=t$, то, равносильно,

$$t^2-\left(\frac{p^2}{S}-2\right)t+1=0. \qquad (**)$$

Легко проверить, что уравнение $(**)$ имеет действительные решения при том же условии, что и система $(*)$, т. е. при $p^2\geqslant 4S$. Стало быть, решая уравнение $(**)$, получаем, что прямоугольник является союзным некоторому треугольнику тогда и только тогда, когда не меньшее из отношений его сторон равно

$$t=\frac{p^2}{2S}-1+\sqrt{\frac{p^2}{2S}\left(\frac{p^2}{2S}-2\right)}, \qquad ({}^{*}_{**})$$

где p и S — соответственно полупериметр и площадь некоторого треугольника и $p^2\geqslant 4S$ (ниже мы убедимся, что это неравенство всегда справедливо).

Следовательно, для того чтобы найти, каким должно быть отношение сторон союзного прямоугольника, нужно найти множество значений, принимаемых отношением $\frac{p^2}{S}$, когда пара (p,S) пробегает по всем треугольникам. Для этого найдём вначале наименьшее возможное значение отношения $\frac{p^2}{S}$.

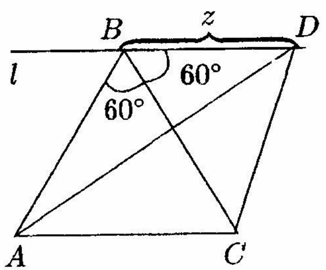
По формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — стороны треугольника. Так как $p=(p-a)+(p-b)+(p-c)$, то согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх чисел имеем:

$$\frac{p}{3}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$= \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}},$$

или, равносильно, $\frac{p^2}{S} \geqslant 3\sqrt{3}$. Это неравенство точное: равенство достигается для равностороннего треугольника.

Докажем теперь формально тот геометрически очевидный факт, что множество значений отношения $\frac{p^2}{S}$ составляет полуинтервал $[3\sqrt{3}; +\infty)$. Действительно, пусть $\triangle ABC$ — равносторонний треугольник со стороной 1, а прямая $l \parallel AC$ (см. рис.). Если точка D лежит на l, то площадь $\triangle ADC$ равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Пусть z — длина отрезка BD. По теореме косинусов, применённой к треугольникам ABD и BCD, получаем, что соответственно: $AD = \sqrt{z^2+z+1}$ и $CD = \sqrt{z^2-z+1}$. Значит, отношение $\frac{p^2}{S}$ для треугольника ADC равно $\frac{\left(\sqrt{z^2+z+1}+\sqrt{z^2-z+1}+1\right)^2}{\sqrt{3}}$. Так как эта функция — непрерывная функция переменной $z \geqslant 0$, стремящая к $+\infty$ при $z \to +\infty$, то она, а значит, и отношение $\frac{p^2}{S}$, принимает все значения из полуинтервала $[3\sqrt{3}; +\infty)$.



Таким образом, обозначив в $(**)$ $\frac{p^2}{2S}$ через λ получаем, что прямоугольник является союзным тогда и только тогда, когда не меньшее из отношений его сторон равно $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}$, где $\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поскольку функция $t = \lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}$ переменной

$\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ возрастает, то, следовательно, прямоугольник является союзным тогда и только тогда, когда не меньшее из отношений его сторон больше или равно $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda-1)}$, где $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что, как следует из доказанного, для любого треугольника существует дружественный ему прямоугольник.

8. Ответ: 8 матчей.

Обозначим мальчиков: A, B, C, D и E, — и пусть a, b, c, d и e — их рейтинги соответственно. Если пара, скажем, (A, B) проиграла паре, например, (C, D) (или, что то же, для сумм рейтингов в парах выполнено неравенство $a + b < c + d$), то это будем записывать так: $(A, B) \prec (C, D)$.

Рассмотрим какой-либо турнир, удовлетворяющий условию задачи, и определим пары p_1, p_2, $\ldots$, p_k следующим образом. Пара p_1 — пара, выигравшая первый матч турнира и, возможно, ещё какие-то матчи, пара p_2 — та пара, которая выиграла у пары p_1 и, возможно, ещё у каких-то пар, пара p_3 — та пара, которая выиграла у пары p_2 и, возможно, ещё у каких-то пар, и т. д. до пары p_k, у которой уже никто в турнире не выиграл. Иными словами,

$$p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_k, \qquad (*)$$

и это все пары, выигравшие в турнире хотя бы один матч. Ясно, что пары p_1, $\ldots$, p_k попарно различны, поскольку в противном случае сумма рейтингов некоторой пары была бы меньше себя самой. Для дальнейшего заметим, что любая пара могла сыграть в турнире не более трёх игр, так как для каждой пары имеется только три пары, с которыми она может играть, а по условию одни и те же пары не могут играть два матча.

Докажем, что $k \leqslant 4$. Без нарушения общности пусть пара $p_1 = (B, C)$, и пусть она (без нарушения общности) выиграла у пары (A, D) и проиграла (опять же без нарушения общности) паре $p_2 =$