УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

7 класс

Первый день

1. В триседьмом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две или три головы.

а) Может ли у 40% драконов быть 60% голов?

б) Может ли у 40% драконов быть 70% голов?

2. Три различных натуральных числа a, b и c обладают таким свойством, что $a+b$ делится на c, $b+c$ делится на a и $c+a$ делится на b.

Докажите, что $a+b+c$ делится на 6.

3. На плоскости проведено несколько прямых. Для каждой прямой подсчитали число прямых, которые она пересекает, и записали рядом с данной прямой. Может ли сумма всех чисел равняться

а) 99, б) 100?

4. Можно ли в клетки таблицы 4×5 вписать числа от 1 до 20 так, чтобы произведение чисел в каждом квадрате 2×2, состоящем из четырех клеток таблицы, делилось

а) на 80, б) на 90?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

8 класс

Первый день

1. В четыревосьмом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две, три или четыре головы.

а) Может ли у 30% драконов быть 60% голов?

б) Может ли у 30% драконов быть 65% голов?

2. Три различных натуральных числа a, b и c обладают таким свойством, что $a+b$ делится на c, $b+c$ делится на a и $c+a$ делится на b.

Может ли так оказаться, что

а) $a+b+c=2004$?   б) $a+b+c=2005$?

3. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и F соответственно так, что $AD=8$, $BF=6$. Точки M и N — середины гипотенузы AB и отрезка DF соответственно.

Найдите длину отрезка MN.

4. В клетки таблицы 10×10 вписаны целые числа, так, что каждое число равно произведению чисел в соседних по стороне клетках. (У угловых клеток таблицы — по 2 соседних клетки; у не угловых клеток таблицы, но расположенных с краю, — по 3 соседних; у внутренних клеток — по 4 соседних.)

Каким может быть произведение всех чисел в таблице?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

9 класс

Первый день

1. Найдите все целые n, для которых уравнение

$$(n^2+1)x^2+2n(n^2+1)x+3n^2=1$$

имеет рациональные решения.

2. Окружность Γ_1 проходит через вершины A и B остроугольного треугольника ABC и касается прямой AC в точке A, окружность Γ_2 проходит через вершины B и C и касается прямой AB в точке B, а окружность Γ_3 проходит через вершины C и A и касается прямой BC в точке C.

Докажите, что окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3 пересекаются в одной точке.

3. Найдите все действительные числа a, для которых справедливо следующее утверждение: если x и y — произвольные ненулевые действительные числа, то по крайней мере одно из чисел x, y или $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ не превосходит числа a.

4. Однажды в классе, где учатся 27 учеников, был проведен турнир в "крестики – нолики". Каждый мальчик сыграл по разу с каждым другим мальчиком, и каждая девочка сыграла по разу с каждой другой девочкой. За выигрыш каждый школьник получал по 1 очку, а за проигрыш — 0 очков (ничьих не было). Оказалось, что среди девочек хуже всех выступила Оля, которая набрала меньше всех — 7 очков. Кроме того, выяснилось, что ни одна девочка не набрала больше очков, чем Коля (в играх с мальчиками).

Сколько мальчиков и сколько девочек учится в этом классе?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

10 класс

Первый день

1. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $\{x^2\} + \{x\} = [x]$.

(Здесь через $[z]$ обозначена целая часть числа z, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее z; $\{z\} = z - [z]$ — дробная часть числа z.)

2. Окружность Γ_1 радиуса R_1 проходит через вершины A и C треугольника ABC и касается стороны AB в точке A. Окружность Γ_2 радиуса R_2 проходит через вершины B и C треугольника ABC и касается стороны AB в точке B.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Найдите все действительные числа a, для которых справедливо следующее утверждение: если x и y — произвольные ненулевые действительные числа, то по крайней мере одно из чисел x, y или $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{6}{y^3}$ не превосходит числа a.

4. В точке A_0 на основании BC остроугольного треугольника ABC сидит кузнечик. В некоторый момент он начинает прыгать на стороны треугольника по следующему правилу: сначала кузнечик прыгает на сторону AB в точку C_0, ближайшую к точке A_0, затем — на сторону AC в точку B_0, ближайшую к точке C_0, затем на сторону BC в точку A_1, ближайшую к точке B_0, затем опять он прыгает на сторону AB в точку C_1, ближайшую к точке A_1, и так далее.

Докажите, что если через некоторое количество прыжков кузнечик возвратится в точку A_0, то в эту точку он попадет уже после третьего прыжка.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

11 класс

Первый день

1. Паниковский и Балаганов украли у подпольного миллионера Корейко 3 миллиона 6 тысяч 12 рублей. Вначале Паниковский взял себе наугад часть денег, но эта сумма оказалась для него чересчур малой — 955 тысяч 432 рубля. Тогда он стал переделивать деньги следующим образом. На первом шагу он отдал половину своей суммы Балаганову, а себе забрал все его деньги. На втором шаге он отдал половину суммы, имеющихся у него денег после первого шага, а себе забрал все деньги, оказавшиеся у Балаганова после первого шага, и так далее.

Какая сумма оказалась у Шуры Балаганова после двадцати таких шагов ? (Для простоты можно считать, что рубли можно разделить на любое число частей.)

2. Окружность Γ_1 радиуса R_1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A, окружность Γ_2 радиуса R_2 проходит через вершины B и C и касается прямой AB в точке B, а окружность Γ_3 радиуса R_3 проходит через вершины C и A и касается прямой BC в точке C.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Найдите наименьшее значение a, при котором неравенство

$$ab^{2005} + b \geq b^{2004} + a$$

выполняется при всех $b \geq 1$.

4. Пусть n — натуральное число, большее 1. Рассмотрим треугольную таблицу из $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток (на рисунке 1 приведена таблица с $n = 4$). В клетках таблицы расставлены числа от 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$. За один ход разрешается сдвинуть по циклу числа в любом столбце или в любой строке (для примера см. рисунки 2 и 3). Докажите, что с помощью конечного числа операций можно из любой расстановки чисел получить любую другую.

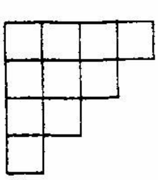

Рис. 1

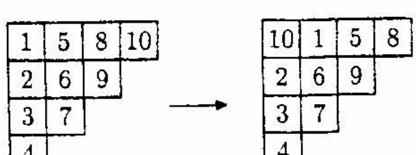

Рис. 2

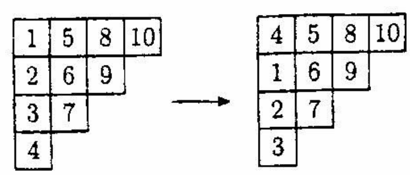

Рис. 3

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

7 класс

Второй день

5. За круглым столом сидят 20 человек: лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В ходе опроса 10 человек сказали: "Оба мои соседа слева и справа — лжецы". Остальные 10 человек заявили: "Среди двух моих соседей слева и справа ровно один — лжец".

Какое наибольшее число лжецов может оказаться за таким столом? (Предполагается, что каждый из присутствующих знает о каждом из остальных — лжец он или правдивый.)

6. Вдоль прямолинейной автострады расположены в каком-то порядке кафе "Алена", "Беата", "Вилена", "Гражина"и "Диана". Известно, что расстояние от "Алены"до "Беаты"равно 5 км, от "Беаты"до "Вилены— 8 км, от "Вилены"до "Гражины— 6 км, от "Гражины"до "Дианы— 10 км и от "Дианы"до "Алены— 7 км.

Найдите расстояние между кафе "Алена"и "Гражина".

7. Есть четыре кучи камней. Назовем натуральное число k *хорошим* для данных четырех куч, если можно выбрать две из них и переложить k камней из одной в другую так, чтобы количество камней в этих кучах стало равным.

Найдите максимальное натуральное число m, для которого найдутся такие четыре кучи камней, что все числа от 1 до m являются хорошими для данных куч.

8. На прямой a отметили точку O и из неё в одну из полуплоскостей, определяемых прямой a, провели лучи b и c. Оказалось, что среди пяти углов (меньших развёрнутого), образуемых лучами b и c и двумя лучами, на которые точка O разбивает прямую a, нет равных. Кроме того, имеется два таких угла, что для каждого из них среди остальных четырёх углов найдётся угол, в 2 раза больший.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьший из этих углов.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

8 класс

Второй день

5. За круглым столом сидят 20 человек: лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В ходе опроса 10 человек сказали: "Оба мои соседа слева и справа — лжецы". Остальные 10 человек заявили: "Среди двух моих соседей слева и справа ровно один — лжец".

Какое наименьшее число лжецов может оказаться за таким столом? (Предполагается, что каждый из присутствующих знает о каждом из остальных — лжец он или правдивый.)

6. Докажите, что существует лишь конечное число наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ натуральных чисел x_1, ..., x_8, удовлетворяющих равенству

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 2005(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8).$$

7. Есть пять куч камней. Назовем натуральное число k *хорошим* для данных пяти куч, если можно выбрать две из них и переложить k камней из одной в другую так, чтобы количество камней в этих кучах стало равным.

Найдите максимальное натуральное число m, для которого найдутся такие пять куч камней, что все числа от 1 до m являются хорошими для данных куч.

8. На прямой a отметили точку O и из неё в одну из полуплоскостей, определяемых прямой a, провели лучи b и c. Оказалось, что среди пяти углов (меньших развёрнутого), образуемых лучами b и c и двумя лучами, на которые точка O разбивает прямую a, нет равных. Кроме того, имеется два таких угла, что для каждого из них среди остальных четырёх углов найдётся угол, в 2 раза больший.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьший из этих углов.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

9 класс

Второй день

5. Докажите, что если t — корень уравнения

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

то $-\dfrac{1}{t+1}$ и $-1-\dfrac{1}{t}$ — также корни этого уравнения.

6. Биссектриса BL треугольника ABC $(AB < BC)$ пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Окружность, проходящая через точки K, L, C, пересекает сторону BC еще раз в точке M.

Докажите, что $AB = BM$.

7. Верно ли, что любой выпуклый четырехугольник, стороны и диагонали которого меньше 1, можно накрыть кругом диаметра 1 ?

8. Имеется три кучи камней. Будем говорить, что натуральное число k является *хорошим* для данных трех куч, если можно из какой-то кучи переложить k камней в какую-то другую кучу так, что после этого среди трех куч найдутся две с одинаковым числом камней.

При каком наибольшем m существуют три кучи, в которых количества камней различны, и для которых все числа от 1 до m являются хорошими?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

3 – 6 января 2005 года

11 класс

Второй день

5. Пусть L — точка на ребре BS правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, такая, что CL и AL — биссектрисы углов BCS и BAS соответственно.

Найдите плоский угол при вершине S пирамиды, если известно, что $\angle ALC = 90°$.

6. Найдите все действительные числа x и y, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{y(x^2+1)}{x(y^2+1)} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x(y^2+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

7. Пусть α, β и γ – углы треугольника. Докажите, что

а) существует треугольник T, со сторонами $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$;

б) площадь треугольника T не превосходит $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

8. На доске написаны 2005 пар натуральных чисел

$$(1,2),\ (2,4),\ (3,6),\ ...,(i,2i),\ ...,\ (2005,4010).$$

Список из какого наименьшего количества чисел можно составить, чтобы среди них встречалось хотя бы одно число из каждой указанной пары ?