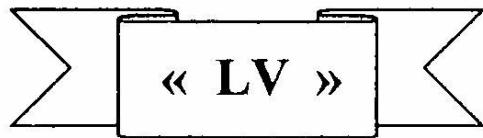


Министерство образования Республики Беларусь



Белорусская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

Второй день



Гродно 2005

УДК 372.851.046.14

Приведены условия и решения задач заключительного этапа 55-й Белорусской математической олимпиады школьников (второй день).

Авторы задач

Архипов С.А.	(7.5, 9.5)
Базылев Д.Ф.	(8.7, 11.5)
Воронович И.И.	(7.6, 7.7, 8.5, 8.6, 9.8, 10.5, 10.7)
Жихович М.И.	(11.6)
Каскевич В.И.	(7.8)
Мазаник С.А.	(9.6)
Пирютко Е.В.	(9.7, 9.8)
Сендеров В.А.	(9.7)
Соболевский С.Л.	(8.8, 11.7)
Сморщок М.Н.	(10.6)
Токарев С.И.	(10.8, 11.8)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь данное издание подготовлено Е.А.Барабановым, И.И.Вороновичем, В.И.Каскевичем, С.А.Мазаником при участии и финансовой поддержке Общественного объединения «Белорусская ассоциация «Конкурс».

© Е.А.Барабанов,
И.И.Воронович,
В.И.Каскевич,
С.А. Мазаник

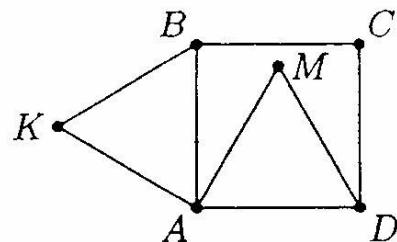
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Докажите, что если при некоторых натуральных a и b число $a^2 - ab(b - 2) + b^2 - b^3$ — натуральное простое, то $a - b$ является квадратом натурального числа.

7.6. На сторонах квадрата $ABCD$ построены два равносторонних треугольника ABK и ADM (см. рис.).

Докажите, что точки K , M и C лежат на одной прямой.



7.7. Найдите все a , такие, что для всякого числа x неравенство $a > x$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a > 0,8x + 401$.

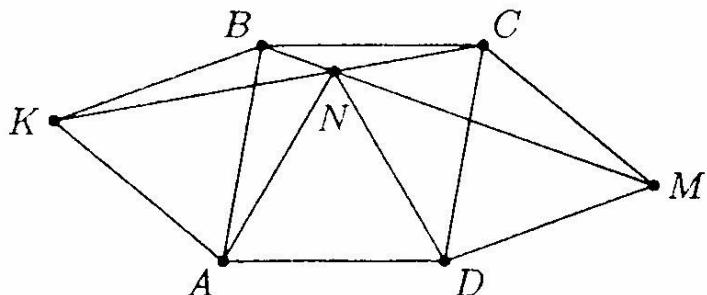
7.8. Квадрат $n \times n$ ($n \geq 3$) разбит на клетки со стороной 1. Какая-то из клеток окрашена в черный цвет, остальные клетки — белые. За один ход разрешается перекрасить в противоположные цвета любые три подряд идущие клетки в одном столбце или в одной строке.

а) Можно ли с помощью таких ходов перекрасить все клетки квадрата в белый цвет?

б) Можно ли сделать то же самое, если за один ход разрешается перекрасить в противоположные цвета любые три клетки, образующие уголок?

8 класс

8.5. Острый угол ромба $ABCD$ больше 60° . На его сторонах построены два равносторонних треугольника ABK и CDM (см. рис.). Пусть N — точка пересечения прямых KC и BM .



Докажите, что треугольник AND равносторонний.

9.6. Найдите все a , такие, что для всякого числа x неравенство $a > x$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$a > \frac{x^3 - 2}{3}.$$

9.7. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — целые числа, $a \neq 0$. Известно, что уравнение $f(x) = x$ имеет по крайней мере один целый корень.

Найдите $f(2005)$, если $f(f(2005)) = 2005$.

9.8. Все депутаты парламента разделены на несколько (более одной) фракций. Согласно уставу, никакая из фракций не может состоять менее чем из 5 человек, и численности всех фракций должны быть различны. После парламентских каникул фракции распались, а вместо них, с соблюдением требований устава, образовалось несколько новых фракций, при этом часть депутатов стали независимыми (т.е. не вошли ни в одну из фракций). Кроме того, оказалось, что если до каникул какие-либо два депутата входили в одну и ту же фракцию, то после каникул они в одну и ту же фракцию не входят.

Докажите, что существовала фракция, по меньшей мере 8 из членов которой после каникул стали независимыми.

9 класс

9.5. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n справедливо неравенство

$$|n\sqrt{2005} - m| > \frac{1}{90n}.$$

9.6. На стороне CD трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) отмечена точка K так, что треугольник ABK равносторонний.

Докажите, что на прямой AB существует такая точка L , что треугольник CDL также равносторонний.

9.7. Бесконечная последовательность натуральных чисел такова, что произведение ее первых n членов делится на их сумму при любом натуральном n .

Может ли такая последовательность быть

а) арифметической прогрессией; б) геометрической прогрессией?

9.8. а) Докажите, что множество $M = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ нельзя разбить менее, чем на 4 подмножества так, чтобы из равенства $a - b = n^2$, где n — целое число, a и b принадлежат M , следовало, что a и b лежат в различных подмножествах.

б) Можно ли разбить M на 5 подмножеств указанным образом?

10 класс

10.5. Докажите, что

$$\frac{1}{2n} < \{n\sqrt{7}\} < 1 - \frac{1}{6n}$$

для любого натурального n .

(Здесь через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x .)

10.6. На какое минимальное число подмножеств можно разбить множество $M = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$, чтобы из равенства $a + b = n^2$, где a и b — различные числа из M , n — целое число, следовало, что a и b лежат в разных подмножествах?

10.7. Найдите все такие функции f , определенные на множестве натуральных чисел и принимающие только натуральные значения, что для любых натуральных n и m выполняется равенство

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n).$$

10.8. Существует ли выпуклый семиугольник, в котором каждый из внутренних углов делится пополам некоторой диагональю?

11 класс

11.5. Известно, что

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d = \\ = 4(\sin a \sin b \sin c \sin d - \cos a \cos b \cos c \cos d),$$

где $0 < a < b < c < d < \frac{\pi}{2}$.

Найдите все значения, которые может принимать сумма $a + b + c + d$.

11.6. а) Функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ удовлетворяет для каждого натурального n равенству $f(n) = f(n + f(n))$.

Докажите, что если f принимает конечное число значений, то f – периодическая функция.

б) Приведите пример непериодической функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющей для каждого натурального n равенству $f(n) = f(n + f(n))$.

11.7. Все депутаты парламента разделены на 10 фракций. Согласно уставу, никакая из фракций не может состоять менее чем из 5 человек, и численности всех фракций должны быть различны. После парламентских каникул фракции распались, а вместо них, с соблюдением требований устава, образовалось несколько новых фракций, при этом часть депутатов стали независимыми (т.е. не вошли ни в одну из фракций). Кроме того, оказалось, что если до каникул какие-либо два депутата входили в одну и ту же фракцию, то после каникул они в одну и ту же фракцию не входят.

Найдите минимально возможное количество депутатов, которые стали независимыми после парламентских каникул.

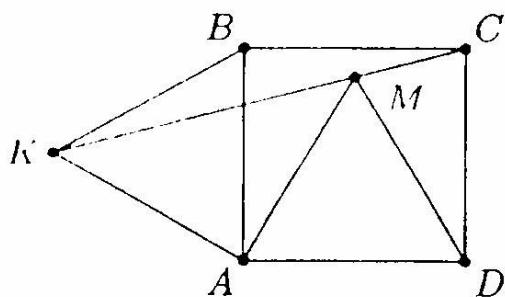
11.8. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждый из внутренних углов делится пополам некоторой диагональю?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7 класс

7.5. Имеем $a^2 - ab(b - 2) + b^2 - b^3 = a^2 + 2ab + b^2 - ab^2 - b^3 = = (a + b)^2 - b^2(a + b) = (a + b - b^2)(a + b)$. Так как данное число простое и $a + b \geq 2$, то $a + b - b^2 = 1$, тогда $a = b^2 - b + 1$, поэтому $a - b = (b - 1)^2$, что и требовалось доказать.

7.6. Так как все углы равностороннего треугольника равны



60° , то $\angle MDC = 90^\circ - \angle MDA = = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Кроме того, поскольку треугольник MDC равнобедренный ($MD = CD$), то

$$\angle CMD = \angle MCD =$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MDC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ.$$

Далее,

$$\angle KAM = 60^\circ + \angle BAM = 60^\circ + (90^\circ - 60^\circ) = 90^\circ;$$

треугольник KAM равнобедренный ($KA = AM$), поэтому

$$\angle KMA = \angle MKA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KAM) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle KMC = \angle KMA + \angle AMD + \angle DMC = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ.$$

Это означает, что точки K , M и C лежат на одной прямой.

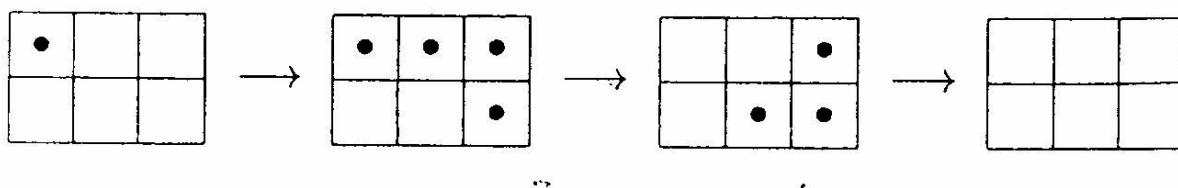
7.7. Ответ: $a = 2005$.

Неравенство $a > 0,8x + 401$ равносильно неравенству $\frac{a - 401}{0,8} >$
 $> x$. Поэтому согласно условию $a > x \Leftrightarrow \frac{a - 401}{0,8} > x$. Утверждаем,
 что тогда $a = \frac{a - 401}{0,8}$. Действительно, если это не так, то, взяв x в
 интервале между a и $\frac{a - 401}{0,8}$, получили бы, что ровно одно из нера-
 венств $a > x$ и $\frac{a - 401}{0,8} > x$ не выполнено — противоречие. Итак,
 $a = \frac{a - 401}{0,8}$, откуда $a = 2005$.

7.8. Ответ: а) нельзя, б) можно.

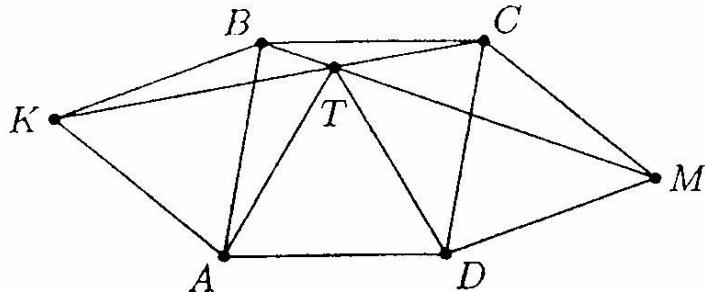
а) Пронумеруем клетки данного квадрата числами 1, 2 и 3 так, чтобы любые три подряд идущие клетки в одной строчке и в одном столбце имели разные номера. Рассмотрим n_i — количество всех черных клеток с номером i . Легко заметить, что после каждого хода разности $n_1 - n_j$ ($i \neq j$) не меняют четность. Поэтому перекрасить все клетки квадрата в один цвет нельзя.

б) На следующем рисунке показано, как перекрасить в другой цвет клетку, отмеченную символом \bullet , сохранив цвет остальных клеток. Заметим, что любая клетка квадрата $n \times n$, $n \geq 3$, является угловой клеткой какого-либо прямоугольника 2×3 , кроме случая $n = 3$ и центральной клетки этого квадрата 3×3 . Но цвет этой клетки можно изменить за один ход, а затем при необходимости проделать описанные ходы с крайними клетками таблицы 3×3 .



8 класс

8.5. Покажем, что если T — вершина равностороннего



треугольника ATD (см. рис.), то точка T совпадает с точкой N . Для этого достаточно доказать, что точки K, T, C лежат на одной прямой и что точки B, T, M также лежат на одной прямой. Пусть

$\angle BAD = \alpha > 60^\circ$. Так как треугольник KAT равнобедренный ($AK = AT$) и

$$\begin{aligned}\angle KAT &= \angle KAB + \angle BAT = 60^\circ + (\angle BAD - \angle TAD) = \\ &= 60^\circ + (\alpha - 60^\circ) = \alpha,\end{aligned}$$

то

$$\angle ATK = \angle AKT = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KAT) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle TDC = \angle ADC - \angle ADT = 180^\circ - \alpha - 60^\circ = 120^\circ - \alpha,$$

и, так как треугольник TDC равнобедренный ($TD = DC$), то

$$\angle DTC = \angle DCT = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle TDC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ + \alpha) = 30^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle KTC = \angle KTA + \angle ATD + \angle DTC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 60^\circ + 30^\circ + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ.$$

Это означает, что точки K, T и C лежат на одной прямой. Аналогично показывается, что точки B, T и M также лежат на одной прямой.

Таким образом, точка T принадлежит обеим прямым KC и BM , тем самым, является их точкой пересечения и, значит, совпадает с точкой N , что и требовалось доказать.

8.6. Ответ: $a = -1; 2$.

Неравенство $a > \frac{x^3 - 2}{3}$ равносильно неравенству $3a + 2 > x^3$. Кроме того $a > x \Leftrightarrow a^3 > x^3$. Поэтому согласно условию имеем: $a^3 > x^3 \Leftrightarrow 3a + 2 > x^3$. Утверждаем, что тогда $a^3 = 3a + 2$. Действительно, если это не так, то, взяв x^3 в интервале между a^3 и $3a + 2$, получили бы, что ровно одно из неравенств $a^3 > x^3$ и $3a + 2 > x^3$ не выполнено — противоречие. Итак, $a^3 = 3a + 2$, т. е. $(a-2)(a+1)^2 = 0$, откуда $a = 2$ или $a = -1$.

8.7. Ответ: $f(2005) = 2005$.

Пусть $n = 2005$, $m = f(n)$. Тогда $f(m) = f(f(n)) = n$. Имеем $f(m) = n$ и $f(n) = m$, т. е.

$$\begin{cases} an^2 + bn + c = m, \\ am^2 + bm + c = n. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $(a(n+m) + b)(n-m) = m - n$. Предположим, что $m \neq n$, тогда находим $b = -1 - am - an$, поэтому

$$c = m - an^2 - bn = m - an^2 - (-1 - am - an)n = m + n + amn.$$

Пусть x_0 — целый корень уравнения $f(x) = x$. Тогда $ax_0^2 + (b-1)x_0 + c = 0$, т. е.

$$ax_0^2 - (am + an + 2)x_0 + (m + n + amn) = 0.$$

Следовательно, $D = (am + an + 2)^2 - 4a(m + n + amn)$ является квадратом некоторого целого числа d .

Далее,

$$(am + an + 2)^2 - 4a(m + n + amn) = d^2 \iff (a(m-n))^2 + 4 = d^2$$

$$\iff (d - a(m-n))(d + a(m-n)) = 4.$$

Так как числа $d - a(m - n)$ и $d + a(m - n)$ имеют одинаковую четность, то

$$\text{либо } \begin{cases} d - a(m - n) = 2, \\ d + a(m - n) = 2, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} d - a(m - n) = -2, \\ d + a(m - n) = -2. \end{cases}$$

В обоих случаях получим $a(m - n) = 0$, что противоречит условию $a \neq 0$ и предположению $m \neq n$. Стало быть, $m = n$ и, значит, $f(n) = n$ и, в частности, $f(2005) = 2005$.

8.8. Пусть в начале размер наибольшей фракции составлял M депутатов, количество фракций равнялось S , и пусть K — количество членов наибольшей фракции, ставших после перегруппировки независимыми. Положим s — количество фракций после перегруппировки, m — размер наибольшей фракции.

Тогда, очевидно, $m \geq s + 4$, $M \geq S + 4$. Кроме того, $m \leq S$, поскольку в получившиеся после перегруппировки фракции попали представители различных фракций. Также имеет место неравенство $M - K \leq s$, поскольку все не ставшие независимыми члены наибольшей фракции распределились по разным фракциям. Итак, $M - K \leq s \leq m - 4 \leq S - 4 \leq M - 8$, откуда $K \geq 8$.

9 класс

9.5. Предположим противное, т.е. существуют такие натуральные m и n , что $90n|n\sqrt{2005} - m| \leq 1$. Тогда

$$90n|n\sqrt{2005} - m| \leq 1 \iff 0 < n\sqrt{2005} - \frac{1}{90n} \leq m \leq n\sqrt{2005} + \frac{1}{90n}$$

$$2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} - \frac{\sqrt{2005}}{45} \leq m^2 \leq 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} + \frac{\sqrt{2005}}{45}. \quad (1)$$

Так как $m \in \mathbb{N}$, то $m^2 \leq 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} + \frac{\sqrt{2005}}{45} < 2005n^2 + 1 + 1$, т.е.

$$m^2 \leq 2005n^2 + 1. \quad (2)$$

С другой стороны,

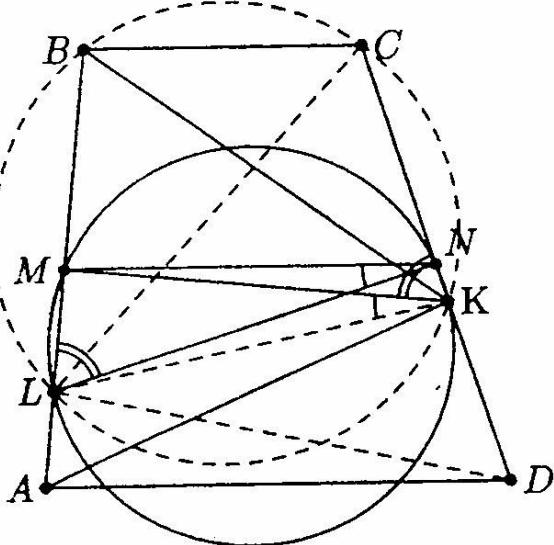
$$m^2 \geq 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} - \frac{\sqrt{2005}}{45} > 2005n^2 + 0 - 1,$$

т.е. $m^2 \geq 2005n^2$. Однако равенство $\frac{m}{n} = \sqrt{2005}$ невозможно, поэтому $m^2 \geq 2005n^2 + 1$. Тогда из (2) следует, что $m^2 = 2005n^2 + 1$. Подставляя это значение m^2 в (1), получим

$$\begin{aligned} 2005n^2 + 1 &\leq 2005n^2 + \frac{1}{8100n^2} + \frac{\sqrt{2005}}{45} \iff \frac{45 - \sqrt{2005}}{45} \leq \frac{1}{8100n^2} \\ &\iff n^2 \leq \frac{45 \cdot (45 + \sqrt{2005})}{8100 \cdot 20} < \frac{2 \cdot 45^2}{8100 \cdot 20} < 1. \end{aligned}$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

9.6. Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Проведем через точку N прямую, перпендикулярную CD , и пусть L — точка ее пересечения с прямой AB . Докажем, что L искомая точка. Так как LN — серединный перпендикуляр к CD , то треугольник CLD равнобедренный, и, значит, для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что $\angle LCD = 60^\circ$.



Поскольку $KM \perp AB$ как медиана равностороннего треугольника ABK , то прямые углы LMK и LNK опираются на общий отрезок LK . Следовательно, точки L, M, N, K лежат на одной окружности. Поэтому $\angle MNL = \angle MKL$ и $\angle MLN = \angle MKN$. Заметим, что $\angle BMN = \angle MNL + \angle MLN$ как внешний угол треугольника LMN . Поэтому $\angle BMN = \angle MKL + \angle MKN = \angle LKN$. Кроме

того, MN — средняя линия трапеции $ABCD$, поэтому $\angle BMN + \angle MBC = 180^\circ$. Таким образом, $\angle LKN + \angle MBC = 180^\circ$, откуда следует, что точки L, B, C, K лежат на одной окружности. Но тогда $60^\circ = \angle LBK = \angle LCK = \angle LCD$, что и требовалось доказать.

9.7. Ответ: а) да; б) нет.

а) Рассмотрим прогрессию 24, 40, 56..., т.е. $a_1 = 24$, $a_n = 24 + 16(n-1)$, $a_1 + \dots + a_n = 24n + 8n(n-1) = 8n(n+2)$, $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 24 \cdot (24+16) \cdot \dots \cdot (24+16(n-1)) = 8^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$, т.е. произведение $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ делится на любое нечётное число, меньшее $2n+3$. При $n=1$ и $n=2$ имеем: $24 \div 24$ и $24 \cdot 40 \div 64$. Положим $n \geqslant 3$, $n = 2^{m_1}(2k_1 + 1)$, $n+2 = 2^{m_2}(2k_2 + 1)$, $k_1, k_2 \geqslant 0$, т.к. $n < 2^n$, то $m_1 < n$, $m_2 < n+2$, т.е. $m_1 \leqslant n-1$, $m_2 \leqslant n+1$. Тогда $3n \geqslant 2n+3 \geqslant m_1 + m_2 + 3$, откуда $8^n \mid 2^{3n} \mid 8 \cdot 2^{m_1} 2^{m_2}$. Т.к. $(n, n+2) = (2, n) = 1$ или 2, то $(2k_1 + 1, 2k_2 + 1) = 1$, кроме того $2k_1 + 1 \leqslant n < 2n+1$, $2k_2 + 1 \leqslant 2n+1$, откуда $3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) \mid (2k_1 + 1)(2k_2 + 1)$ и окончательно:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_n &= 8^n \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) \mid 8 \cdot 2^{m_1} 2^{m_2} (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = \\ &= 8n(n+2) = a_1 + \dots + a_n, \end{aligned}$$

что и требовалось.

б) Предположим противное. Пусть прогрессия $b_1 = b$, $b_2 = bq$, ..., $b_n = bq^{n-1}$, $q \neq 1$ удовлетворяет условию:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n = b^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid b_1 + b_2 + \dots + b_n = b \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

откуда, т.к. $(q^{\frac{n(n-1)}{2}}, q^n - 1) = 1$, получим для любого натурального n : $b^{n-1}(q-1) \mid q^n - 1$. Пусть p — такое простое число, что $(b, p) = 1$, $(q-1, p) = 1$, $(q, p) = 1$. Тогда $q^{p-1} - 1 \mid p$, однако $b^{n-1}(q-1)$ не кратно p — противоречие. (Второй способ доказательства того, что b^n не может делиться на Q_n , $Q_n = q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, при

всех натуральных n основан на следующем факте: среди членов последовательности (Q_n) , существует бесконечно много попарно взаимно простых чисел, в то время как число b , а вместе с ним и b^n , имеет лишь конечное число простых делителей. Действительно, $(Q_2, Q_1) = (q^2 + q + 1, q + 1) = 1$. Нетрудно проверить, что если числа $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_m}$ — попарно взаимно просты, то при всех $i = 1, \dots, m$ будет выполнено $(Q_{k_{m+1}}, Q_{k_i}) = 1$, если $k_{m+1} = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_m + 1)$.

Пусть теперь $q = 1$. Тогда $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = b^n$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = bn$, откуда $b^{n-1} : n$, что, очевидно, не выполняется при всех n . Таким образом, прогрессии с указанным свойством не существует.

9.8. Предположим противное. Обозначим $a \sim b$, если a и b принадлежат одному подмножеству и $a \not\sim b$ в противном случае. При $n \leq 75$ имеем $n \not\sim n+25$ и $n \not\sim n+9$, $n \not\sim n+16$, $n+9 \not\sim n+25$, $n+16 \not\sim n+25$, откуда, так как подмножеств не более трёх, $n+9 \sim n+16$. Таким образом, при $m = n+9$, $10 \leq m \leq 84$ имеем: $m \sim m+7$, откуда при $m = 10$ получим $10 \sim 17 \sim 24 \sim 31 \sim 38 \sim 45 \sim 52 \sim 59$, т.е. $10 \sim 59$, в то время как $59 - 10 = 7^2$ — противоречие.

Покажем, что на 5 подмножеств M разбить можно. Положим

$$A_1 = \{10k, 1 \leq k \leq 10\} \cup \{10k + 3, 0 \leq k \leq 9\},$$

$$A_2 = \{10k + 1, 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k + 4, 0 \leq k \leq 9\},$$

$$A_3 = \{10k + 2, 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k + 5, 0 \leq k \leq 9\},$$

$$A_4 = \{10k + 6, 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k + 8, 0 \leq k \leq 9\},$$

$$A_5 = \{10k + 7, 0 \leq k \leq 9\} \cup \{10k + 9, 0 \leq k \leq 9\}.$$

Действительно, так как квадрат натурального числа может давать при делении на 10 в остатке лишь 0, 1, 4, 5, 6, 9, то разность двух чисел a и b из одного подмножества в указанном разбиении может быть квадратом, если только $a - b : 10$, однако тогда $a - b \geq 100$. Значит, указанное разбиение удовлетворяет условию.

10 класс

10.5. Докажем, что $\{n\sqrt{7}\} > \frac{1}{2n}$. Обозначим через $[x]$ целую часть числа x . Пусть $m = [n\sqrt{7}]$, тогда $m < n\sqrt{7}$. Получим:

$$\{n\sqrt{7}\} = n\sqrt{7} - [n\sqrt{7}] = n\sqrt{7} - m = \frac{7n^2 - m^2}{n\sqrt{7} + m} > \frac{7n^2 - m^2}{2n\sqrt{7}}.$$

Заметим, что уравнения $7n^2 - m^2 = 1$ и $7n^2 - m^2 = 2$ не имеют решений в целых числах m и n , так как квадрат целого числа не может давать остатки -1 и -2 при делении на 7. Значит, $7n^2 - m^2 \geq 3$, тогда $\{n\sqrt{7}\} > \frac{7n^2 - m^2}{2n\sqrt{7}} \geq \frac{3}{2n\sqrt{7}} > \frac{1}{2n}$.

Докажем теперь вторую часть неравенства. Пусть $m = [n\sqrt{7}] + 1$. Тогда

$$m > n\sqrt{7} \Rightarrow m^2 > 7n^2 \Rightarrow m^2 \geq 7n^2 + 1 = 7n^2 \left(1 + \frac{1}{7n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 \geq 7n^2 \left(1 + \frac{2}{15n^2} + \frac{1}{15^2 n^4}\right) = 7n^2 \left(1 + \frac{1}{15n^2}\right)^2$$

(так как $\frac{2}{15n^2} + \frac{1}{15^2 n^4} < \frac{1}{7n^2}$, поскольку $\frac{1}{15^2 n^4} < \frac{1}{105}$), откуда получаем

$$m > n\sqrt{7} \left(1 + \frac{1}{15n^2}\right) \Rightarrow m > n\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{15n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{n\sqrt{7}\} < 1 - \frac{\sqrt{7}}{15n} < 1 - \frac{1}{6n}.$$

10.6. Ответ: 3.

Заметим, что числа 6, 19 и 30 лежат в разных подмножествах, так как $6 + 19 = 5^2$, $19 + 30 = 7^2$, $6 + 30 = 6^2$. Значит, количество подмножеств не менее трёх.

С другой стороны, множество M можно разбить на три подмножества с указанным свойством: $M = A \sqcup B \sqcup C$, где

$$A = \{4k + 3 : 0 \leq k \leq 6\} \sqcup \{4k : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{12, 28, 20\},$$

$$B = \{4k + 1 : 0 \leq k \leq 7\} \sqcup \{4k + 2 : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{6, 14, 26\},$$

$$C = \{12, 28, 20, 6, 14, 26\},$$

а знак „ \sqcup “ обозначает объединение непересекающихся множеств. Действительно, так как квадрат целого числа при делении на 4 не может давать в остатке 2 или 3, то сумма двух чисел вида $4k+3$ и $4k+3$, $4k+3$ и $4k$, $4k+1$ и $4k+1$, $4k+1$ и $4k+2$ не может быть квадратом. Остаётся непосредственно проверить, что сумма любых двух чисел каждого из множеств

$$\{4k : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{12, 28, 20\} = \{4, 8, 16, 24\}$$

$$\{4k + 2 : 0 \leq k \leq 7\} \setminus \{6, 14, 26\} = \{2, 10, 18, 22, 30\}$$

$$\{12, 28, 20, 6, 14, 26\},$$

не является квадратом.

10.7. Ответ: $f(n) = 2n$.

Так как по условию равенство

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n) \quad (1)$$

выполнено для всех натуральных m и n , а функция f определена только на \mathbf{N} , то, это, в частности, означает, что аргумент левой части $m - n + f(n) \in \mathbf{N}$, а значит, $f(n) \geq n$. Положим $F(n) = f(n) - n$ (согласно предыдущему $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \cup 0$). Заменим в тождестве (1) $f(n)$ на $F(n) + n$. После очевидных преобразований будем иметь:

$$F(F(n) + m) = F(m) + n \quad \text{для любых } m, n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Добавив к обеим частям этого тождества по 1 и положив в нём $m = 1$, получим:

$$F(F(n) + 1) + 1 = F(1) + n + 1 \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Применим к обеим частям тождества (3) (они — натуральные числа) функцию F . Тогда, учитывая тождество (2), получим:

$$F(1) + F(n) + 1 = F(n+1) + 1,$$

или

$$F(n+1) = F(n) + F(1) \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$F(n) = F(n-1) + F(1) \quad \text{при всех натуральных } n \geq 2. \quad (4)$$

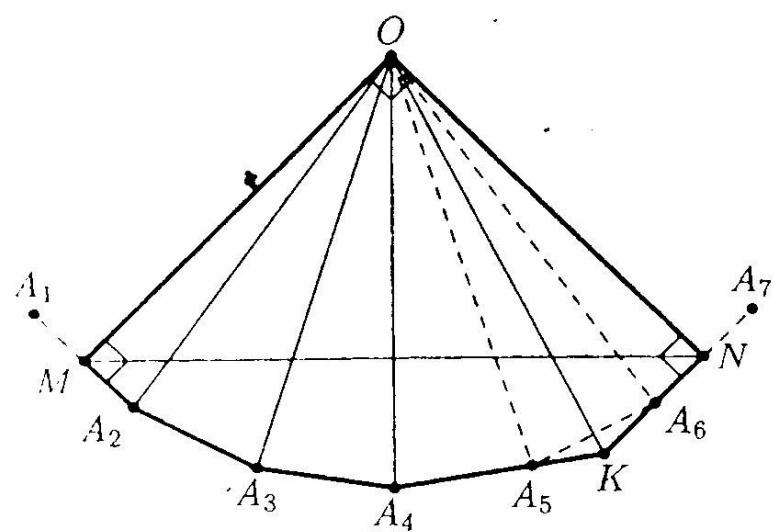
Поэтому, применяя (4), получим: $F(n) = nF(1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Подставим это представление в тождество (2), получим $(F(1))^2 = 1$, т. е. $F(1) = \pm 1$. Если $F(1) = -1$, то $f(1) = 0$, чего быть не может, поскольку $0 \notin \mathbb{N}$. Значит, $F(1) = 1$ и $F(n) = n$. Отсюда $f(n) = 2n$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет тождеству (1).

10.8. Ответ: да, существует.

Рассмотрим правильный 20-угольник $A_1A_2 \dots A_{20}$. Пусть O — его центр, точки M и N — середины сторон A_1A_2 и A_6A_7 соответственно, а K — точка пересечения прямых A_4A_5 и A_6A_7 (см. рис.).



Тогда семиугольник $OMA_2A_3A_4KN$ — искомый (на рисунке его периметр выделен жирной линией).

В самом деле, прямые OA_2 , OA_3 , OA_4 и OK — оси симметрии 20-угольника $A_1A_2 \dots A_{20}$. Поэтому они являются биссектрисами углов семиугольника с вершинами в точках A_2 , A_3 , A_4

и K . Следовательно, $OMA_2A_3A_4KN$ — правильный семиугольник.

и K соответственно. Так как прямая OA_4 , кроме того, является осью симметрии 8-угольника $OMA_2A_3A_4A_5A_6N$, то она — биссектриса угла с вершиной O . Далее, докажем, что прямая MN является биссектрисой углов семиугольника с вершинами M и N . В самом деле, легко видеть, что $\angle MON = 90^\circ$, а так как $\triangle MON$ равнобедренный ($OM = ON$), то $\angle OMN = \angle ONM = 45^\circ$, что и утверждалось.

11 класс

11.5. Ответ: π .

Имеем

$$\cos 2a + \cos 2b = 2 \cos(a+b) \cos(a-b) = 2(\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b)$$

и

$$\cos 2c + \cos 2d = 2 \cos(c+d) \cos(c-d) = 2(\cos^2 c \cos^2 d - \sin^2 c \sin^2 d).$$

Перенося все слагаемые в равенстве из условия в левую часть, получим

$$\begin{aligned} & 2(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 c \cos^2 d + 2 \cos a \cos b \cos c \cos d) - \\ & - 2(\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 c \sin^2 d + 2 \sin a \sin b \sin c \sin d) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$(\cos a \cos b + \cos c \cos d)^2 - (\sin a \sin b + \sin c \sin d)^2 = 0,$$

что равносильно

$$\begin{aligned} & (\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos c \cos d - \sin c \sin d) \times \\ & \times (\cos a \cos b + \sin a \sin b + \cos c \cos d + \sin c \sin d) = \\ & = (\cos(a+b) + \cos(c+d))(\cos(a-b) + \cos(c-d)) = \\ & = \cos \frac{a+b+c+d}{2} \cdot \cos \frac{a+b-c-d}{2} \times \end{aligned}$$

$$\times \cos \frac{a-b+c-d}{2} \cdot \cos \frac{a-b-c+d}{2} = 0.$$

И так как $a, b, c, d \in (0, \pi/2)$, то $\frac{a+b+c+d}{2} \in (0, \pi)$,

$$\frac{a+b-c-d}{2}, \frac{a-b+c-d}{2}, \frac{a-b-c+d}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{a+b+c+d}{2} = \frac{\pi}{2} \iff a+b+c+d = \pi.$$

Пример ~~какие-то формулы~~. $a=15^\circ, b=30^\circ, c=60^\circ, d=75^\circ$

11.6. а) Подставим в равенство $f(n) = f(n + f(n))$ вместо n выражение $n + f(n)$, получаем $f(n) = f(n + 2f(n))$. По индукции доказывается, что $f(n) = f(n + kf(n))$, для любых натуральных n, k .

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_t\}$ — множество значений, которые принимает функция f . Пусть $T = a_1 \cdot \dots \cdot a_t$. Покажем, что T — период функции f , то есть $f(n+T) = f(n)$ для любого натурального n . Мы знаем, что $f(n) = f(n+k_1f(n)), f(n+T) = f(n+T+k_2f(n+T))$ для любых натуральных k_1 и k_2 . Пусть $a = f(n), b = f(n+T)$, где $a, b \in A$. Тогда при $k_1 = \frac{2T}{a}, k_2 = \frac{T}{b}$ имеем $n+k_1f(n) = n+T+k_2f(n+T)$. Отсюда $a = b$.

б) Для $n = 2^k m$, $k \in \mathbb{N} \cup 0, (m, 2) = 1$, определим функцию f следующим образом $f(n) = 2^{k+1}$. Легко видеть, что данная функция удовлетворяет равенству $f(n) = f(n + f(n))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $f(2T) = f(T) + 1$, поэтому f непериодична.

11.7. Ответ: 50.

Решим задачу в общем виде. Пусть S — количество исходных фракций, s — количество фракций после перегруппировки, m — размер наибольшей из получившихся фракций.

Тогда, очевидно, $m \leq S$, поскольку в получившиеся после перегруппировки фракции пошли представители различных фракций. Пусть

n — общее количество депутатов, k — количество депутатов, ставших независимыми. Имеем: $5+6+\dots+m+k \geq n \geq 5+6+\dots+(S+4)$, откуда, в силу $m \leq S$, имеем $k \geq 4S + 10$.

Пример для $k = 4S + 10$. Пусть размеры исходных фракций $5, 6, \dots, S+4$. Распределяем членов наибольшей из фракций по $S+4$ новым фракциям. Членов второй по величине фракции распределяем по из этих первым $S+3$ фракциям, и.т.д, членов наименьшей фракции распределяем по первым пяти фракциям. В итоге, первые пять новых фракций окажутся одинакового размера S , а последние четыре — размера $1, 2, 3, 4$. Сделаем членов первых и последних четырех фракций нейтральными (всего $4S + 10$ членов). Останется $S-4$ фракции размера $5, 6, \dots, S$. Очевидно, условие задачи выполняется. При $S = 10$ получаем ответ: 50.

11.8. Рассмотрим треугольник ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = 150^\circ - \alpha$. Через ω обозначим вневписанную окружность, касающуюся BC , через O — центр ω , через P — точку пересечения прямых BO и AC , а через Q — точку пересечения прямых CO и AB . Будем считать, что $\alpha < 120^\circ$; тогда точка C окажется между A и P , а точка B — между A и Q . Пусть A^* — точка, симметричная точке A относительно прямой PQ . Тогда при $\alpha = 75^\circ$ (т.е. при $AB = AC$) биссектриса угла QA^*P проходит через точку A , а при $\alpha = 90^\circ$ — пересекает отрезок CP . Следовательно, если при фиксированных прямых AB , AC и окружности ω мы будем двигать отрезок BC так, чтобы он все время касался ω , то при некотором значении α из интервала $(75^\circ, 90^\circ)$ окажется, что биссектриса угла QA^*P проходит через точку C , т.е. пятиугольник BQA^*PC — искомый.