УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**7 класс**

*Первый день*

**1.** В триседьмом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две или три головы.

а) Может ли у 40% драконов быть 60% голов?

б) Может ли у 40% драконов быть 70% голов?

**2.** Три различных натуральных числа $a$, $b$ и $c$ обладают таким свойством, что $a+b$ делится на $c$, $b+c$ делится на $a$ и $c+a$ делится на $b$.

Докажите, что $a+b+c$ делится на 6.

**3.** На плоскости проведено несколько прямых. Для каждой прямой подсчитали число прямых, которые она пересекает, и записали рядом с данной прямой. Может ли сумма всех чисел равняться

а) 99, б) 100?

**4.** Можно ли в клетки таблицы $4 \times 5$ вписать числа от 1 до 20 так, чтобы произведение чисел в каждом квадрате $2 \times 2$, состоящем из четырех клеток таблицы, делилось

а) на 80, б) на 90?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**7 класс**

*Второй день*

**5.** За круглым столом сидят 20 человек: лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В ходе опроса 10 человек сказали: "Оба мои соседа слева и справа — лжецы". Остальные 10 человек заявили: "Среди двух моих соседей слева и справа ровно один — лжец".

Какое наибольшее число лжецов может оказаться за таким столом? (Предполагается, что каждый из присутствующих знает о каждом из остальных — лжец он или правдивый.)

**6.** Вдоль прямолинейной автострады расположены в каком-то порядке кафе "Алена", "Беата", "Вилена", "Гражина"и "Диана". Известно, что расстояние от "Алены"до "Беаты"равно 5 км, от "Беаты"до "Вилены— 8 км, от "Вилены"до "Гражины— 6 км, от "Гражины"до "Дианы— 10 км и от "Дианы"до "Алены— 7 км.

Найдите расстояние между кафе "Алена"и "Гражина".

**7.** Есть четыре кучи камней. Назовем натуральное число $k$ *хорошим* для данных четырех куч, если можно выбрать две из них и переложить $k$ камней из одной в другую так, чтобы количество камней в этих кучах стало равным.

Найдите максимальное натуральное число $m$, для которого найдутся такие четыре кучи камней, что все числа от 1 до $m$ являются хорошими для данных куч.

**8.** На прямой $a$ отметили точку $O$ и из неё в одну из полуплоскостей, определяемых прямой $a$, провели лучи $b$ и $c$. Оказалось, что среди пяти углов (меньших развёрнутого), образуемых лучами $b$ и $c$ и двумя лучами, на которые точка $O$ разбивает прямую $a$, нет равных. Кроме того, имеется два таких угла, что для каждого из них среди остальных четырёх углов найдётся угол, в 2 раза больший.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьший из этих углов.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**8 класс**

*Первый день*

**1.** В четыревосьмом царстве живут драконы. У каждого дракона одна, две, три или четыре головы.

а) Может ли у 30% драконов быть 60% голов?

б) Может ли у 30% драконов быть 65% голов?

**2.** Три различных натуральных числа $a$, $b$ и $c$ обладают таким свойством, что $a+b$ делится на $c$, $b+c$ делится на $a$ и $c+a$ делится на $b$.

Может ли так оказаться, что

а) $a+b+c=2004$? б) $a+b+c=2005$?

**3.** На катетах $AC$ и $BC$ прямоугольного треугольника $ABC$ отмечены точки $D$ и $F$ соответственно так, что $AD=8$, $BF=6$. Точки $M$ и $N$ — середины гипотенузы $AB$ и отрезка $DF$ соответственно.

Найдите длину отрезка $MN$.

**4.** В клетки таблицы $10\times 10$ вписаны целые числа, так, что каждое число равно произведению чисел в соседних по стороне клетках. (У угловых клеток таблицы — по 2 соседних клетки; у не угловых клеток таблицы, но расположенных с краю, — по 3 соседних; у внутренних клеток — по 4 соседних.)

Каким может быть произведение всех чисел в таблице?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**8 класс**

*Второй день*

**5.** За круглым столом сидят 20 человек: лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В ходе опроса 10 человек сказали: "Оба мои соседа слева и справа — лжецы". Остальные 10 человек заявили: "Среди двух моих соседей слева и справа ровно один — лжец".

Какое наименьшее число лжецов может оказаться за таким столом? (Предполагается, что каждый из присутствующих знает о каждом из остальных — лжец он или правдивый.)

**6.** Докажите, что существует лишь конечное число наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ натуральных чисел $x_1$, ..., $x_8$, удовлетворяющих равенству

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 2005(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8).$$

**7.** Есть пять куч камней. Назовем натуральное число $k$ *хорошим* для данных пяти куч, если можно выбрать две из них и переложить $k$ камней из одной в другую так, чтобы количество камней в этих кучах стало равным.

Найдите максимальное натуральное число $m$, для которого найдутся такие пять куч камней, что все числа от 1 до $m$ являются хорошими для данных куч.

**8.** На прямой $a$ отметили точку $O$ и из неё в одну из полуплоскостей, определяемых прямой $a$, провели лучи $b$ и $c$. Оказалось, что среди пяти углов (меньших развёрнутого), образуемых лучами $b$ и $c$ и двумя лучами, на которые точка $O$ разбивает прямую $a$, нет равных. Кроме того, имеется два таких угла, что для каждого из них среди остальных четырёх углов найдётся угол, в 2 раза больший.

Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьший из этих углов.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

# LV Белорусская математическая олимпиада школьников

## III этап

*3 – 6 января 2005 года*

## 9 класс

*Первый день*

**1.** Найдите все целые $n$, для которых уравнение

$$(n^2+1)x^2+2n(n^2+1)x+3n^2=1$$

имеет рациональные решения.

**2.** Окружность $\Gamma_1$ проходит через вершины $A$ и $B$ остроугольного треугольника $ABC$ и касается прямой $AC$ в точке $A$, окружность $\Gamma_2$ проходит через вершины $B$ и $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$, а окружность $\Gamma_3$ проходит через вершины $C$ и $A$ и касается прямой $BC$ в точке $C$.

Докажите, что окружности $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ пересекаются в одной точке.

**3.** Найдите все действительные числа $a$, для которых справедливо следующее утверждение: если $x$ и $y$ — произвольные ненулевые действительные числа, то по крайней мере одно из чисел $x$, $y$ или $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ не превосходит числа $a$.

**4.** Однажды в классе, где учатся 27 учеников, был проведен турнир в "крестики – нолики". Каждый мальчик сыграл по разу с каждым другим мальчиком, и каждая девочка сыграла по разу с каждой другой девочкой. За выигрыш каждый школьник получал по 1 очку, а за проигрыш — 0 очков (ничьих не было). Оказалось, что среди девочек хуже всех выступила Оля, которая набрала меньше всех — 7 очков. Кроме того, выяснилось, что ни одна девочка не набрала больше очков, чем Коля (в играх с мальчиками).

Сколько мальчиков и сколько девочек учится в этом классе?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**9 класс**

*Второй день*

**5.** Докажите, что если $t$ — корень уравнения

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

то $-\dfrac{1}{t+1}$ и $-1 - \dfrac{1}{t}$ — также корни этого уравнения.

**6.** Биссектриса $BL$ треугольника $ABC$ ($AB < BC$) пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке $K$. Окружность, проходящая через точки $K$, $L$, $C$, пересекает сторону $BC$ еще раз в точке $M$.

Докажите, что $AB = BM$.

**7.** Верно ли, что любой выпуклый четырехугольник, стороны и диагонали которого меньше 1, можно накрыть кругом диаметра 1 ?

**8.** Имеется три кучи камней. Будем говорить, что натуральное число $k$ является *хорошим* для данных трех куч, если можно из какой-то кучи переложить $k$ камней в какую-то другую кучу так, что после этого среди трех куч найдутся две с одинаковым числом камней.

При каком наибольшем $m$ существуют три кучи, в которых количества камней различны, и для которых все числа от 1 до $m$ являются хорошими?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**10 класс**

*Первый день*

**1.** Найдите все значения $x$, удовлетворяющие уравнению $\{x^2\} + \{x\} = [x]$.

(Здесь через $[z]$ обозначена целая часть числа $z$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $z$; $\{z\} = z - [z]$ — дробная часть числа $z$.)

**2.** Окружность $\Gamma_1$ радиуса $R_1$ проходит через вершины $A$ и $C$ треугольника $ABC$ и касается стороны $AB$ в точке $A$. Окружность $\Gamma_2$ радиуса $R_2$ проходит через вершины $B$ и $C$ треугольника $ABC$ и касается стороны $AB$ в точке $B$.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**3.** Найдите все действительные числа $a$, для которых справедливо следующее утверждение: если $x$ и $y$ — произвольные ненулевые действительные числа, то по крайней мере одно из чисел $x$, $y$ или $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{6}{y^3}$ не превосходит числа $a$.

**4.** В точке $A_0$ на основании $BC$ остроугольного треугольника $ABC$ сидит кузнечик. В некоторый момент он начинает прыгать на стороны треугольника по следующему правилу: сначала кузнечик прыгает на сторону $AB$ в точку $C_0$, ближайшую к точке $A_0$, затем — на сторону $AC$ в точку $B_0$, ближайшую к точке $C_0$, затем на сторону $BC$ в точку $A_1$, ближайшую к точке $B_0$, затем опять он прыгает на сторону $AB$ в точку $C_1$, ближайшую к точке $A_1$, и так далее.

Докажите, что если через некоторое количество прыжков кузнечик возвратится в точку $A_0$, то в эту точку он попадет уже после третьего прыжка.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

# LV Белорусская математическая олимпиада школьников

## III этап

## *3 – 6 января 2005 года*

## 11 класс

### *Первый день*

**1.** Паниковский и Балаганов украли у подпольного миллионера Корейко 3 миллиона 6 тысяч 12 рублей. Вначале Паниковский взял себе наугад часть денег, но эта сумма оказалась для него чересчур малой — 955 тысяч 432 рубля. Тогда он стал переделивать деньги следующим образом. На первом шагу он отдал половину своей суммы Балаганову, а себе забрал все его деньги. На втором шаге он отдал половину суммы, имеющихся у него денег после первого шага, а себе забрал все деньги, оказавшиеся у Балаганова после первого шага, и так далее.

Какая сумма оказалась у Шуры Балаганова после двадцати таких шагов ? (Для простоты можно считать, что рубли можно разделить на любое число частей.)

**2.** Окружность $\Gamma_1$ радиуса $R_1$ проходит через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$ и касается прямой $AC$ в точке $A$, окружность $\Gamma_2$ радиуса $R_2$ проходит через вершины $B$ и $C$ и касается прямой $AB$ в точке $B$, а окружность $\Gamma_3$ радиуса $R_3$ проходит через вершины $C$ и $A$ и касается прямой $BC$ в точке $C$.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**3.** Найдите наименьшее значение $a$, при котором неравенство

$$ab^{2005} + b \geq b^{2004} + a$$

выполняется при всех $b \geq 1$.

**4.** Пусть $n$ — натуральное число, большее 1. Рассмотрим треугольную таблицу из $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток (на рисунке 1 приведена таблица с $n = 4$). В клетках таблицы расставлены числа от 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$. За один ход разрешается сдвинуть по циклу числа в любом столбце или в любой строке (для примера см. рисунки 2 и 3). Докажите, что с помощью конечного числа операций можно из любой расстановки чисел получить любую другую.

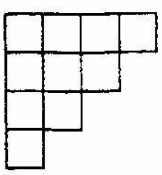

Рис. 1

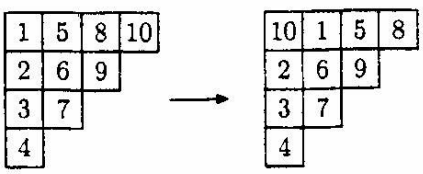


Рис. 2

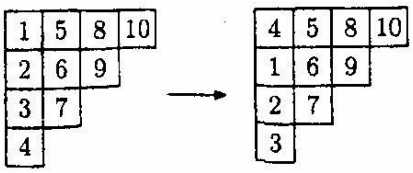


Рис. 3

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета заключительного этапа
республиканской олимпиады

К.С.ФАРИНО

7 декабря 2004 г.

LV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

*3 – 6 января 2005 года*

**11 класс**

*Второй день*

**5.** Пусть $L$ — точка на ребре $BS$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, такая, что $CL$ и $AL$ — биссектрисы углов $BCS$ и $BAS$ соответственно.

Найдите плоский угол при вершине $S$ пирамиды, если известно, что $\angle ALC = 90°$.

**6.** Найдите все действительные числа $x$ и $y$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{y(x^2+1)}{x(y^2+1)} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x(y^2+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

**7.** Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – углы треугольника. Докажите, что

а) существует треугольник $T$, со сторонами $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$;

б) площадь треугольника $T$ не превосходит $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

**8.** На доске написаны 2005 пар натуральных чисел

$$(1,2),\ (2,4),\ (3,6),\ \ldots,(i,2i),\ \ldots,\ (2005,4010).$$

Список из какого наименьшего количества чисел можно составить, чтобы среди них встречалось хотя бы одно число из каждой указанной пары ?