Министерство образования Республики Беларусь

« LII »

Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Условия и решения задач

Мозырь 2002

УДК 372.851.046.14

Приведены условия и решения задач заключительного тура 52 Республиканской математической олимпиады школьников.

Авторы задач

1. Базылев Д. (9.5, 10.5)
2. Барабанов Е.А. (8.2, 8.4, 8.8, 9.1, 9.4, 9.7, 9.8, 10.1, 11.1, 11.4, 11.7, 11.8)
3. Берник В.И. (11.5)
4. Воронович И.И. (8.6, 9.1, 9.7, 10.1, 11.1, 11.7)
5. Городнин И.И. (8.1)
6. Жук И.К. (8.3, 10.3)
7. Каскевич В.И. (8.5, 8.7, 10.2, 11.3)
8. Мазаник С.А. (9.3, 9.7, 11.6)
9. Марковский С. (9.6, 10.6)
10. Миротин А.Р. (9.2)
11. Селингер Н. (10.7, 10.8, 11.2)
12. Соболевский С.Л. (10.4)

По заказу Министерства образования Республики Беларусь комплекты олимпиадных заданий составили и настоящее издание подготовили:

Е.А.Барабанов, И.И.Воронович,
В.И.Каскевич, С.А.Мазаник

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

8.1. Дан набор из 20 различных действительных чисел. Известно, что для любых двух чисел a и b ($a < b$) из набора найдётся некоторое число x из этого же набора, такое, что $a < -x < b$.

Какое количество положительных чисел может быть в таком наборе?

8.2. Какое наибольшее число групп можно составить из натуральных чисел от 1 до 100, чтобы в каждой группе наибольшее число равнялось произведению всех остальных чисел группы? (Каждое число можно поместить не более чем в одну группу.)

8.3. На биссектрисе угла A треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 и CC_1 перпендикулярны сторонам AB и AC соответственно.

Докажите, что середина отрезка B_1C_1 равноудалена от вершин B и C.

8.4. Каждая клетка квадрата 9×9 закрашена либо в белый, либо в чёрный цвет так, что у любой из них больше соседних клеток противоположного цвета (две клетки называются соседними, если у них есть общая сторона).

Найдите наибольшую возможную разность между числом белых и числом чёрных клеток при такой раскраске.

8.5. Докажите, что для любых целых чисел a и b найдутся такие целые x и y, что выполняется равенство

$$x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2 .$$

8.6. В остроугольном треугольнике ABC ($\angle ACB \neq 45°$) проведены высоты AM и BN. На лучах MA и NB отмечены соответственно точки K и T, так, что $MK = MB$ и $NT = NA$.

Докажите, что $KT \parallel MN$.

8.7. В старшей группе детского сада n детей. Утром воспитательница раздала им N игрушек. Но дети оказались недовольны, потому что не всем досталось игрушек поровну. Тогда воспитательница предложила игру. Какие-то двое ребят складывают свои игрушки в одну кучу, и если число игрушек в ней окажется чётным, то они делят эти игрушки между собой поровну. В противном случае — каждый возвращает себе все свои игрушки. Затем опять какие-то двое детей перераспределяют игрушки по такому же правилу, и так далее.

Всегда ли (то есть при любом ли начальном распределении игрушек) дети могут организовать их перераспределение по указанному правилу так, чтобы в результате у всех оказалось игрушек поровну, если

а) $n = 8$, $N = 80$; **б)** $n = 10$, $N = 100$? (Ответ обоснуйте.)

8.8. Два не равных треугольника назовём *дружественными*, если они имеют две равные стороны. Совокупность дружественных треугольников будем называть *хорошей*, если все треугольники этой совокупности имеют одну и ту же пару равных сторон.

Найдите наименьшее значение N, $N > 2$, при котором любая совокупность N попарно дружественных треугольников является хорошей.

9 класс

9.1. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, 27, 28$, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом?

9.2. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b выполнено неравенство

$$|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{2(a+b)}.$$

9.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Сторону BC окружность, проходящая через точки A, K и B, пересекает в точке P, а окружность, проходящая через точки A, K и C, — в точке Q. Прямые PM и QN пересекаются в точке T.

Докажите, что точка T лежит на прямой AK.

9.4. Каждая клетка квадрата $n \times n$ закрашена либо в белый, либо в чёрный цвет так, что у любой из них больше соседних клеток противоположного цвета (две клетки называются соседними, если у них общая сторона).

Сколько всего таких различных раскрасок существует?

9.5. Пусть r — остаток при делении натурального простого числа p на 210. Известно, что число r составное и представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Найдите r.

9.6. На окружности S отмечены две точки A и B (хорда AB не является диаметром окружности). Пусть X — произвольная точка окружности S, а Y — точка пересечения прямой XA и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно XB; точка M — середина отрезка XY. (В случае, когда точка X совпадает с точкой A, под прямой XA понимается касательная в точке A к окружности S.)

Найдите геометрическое место точек M, когда X пробегает окружность S, из которой выколота точка B.

9.7. В однокруговом хоккейном турнире приняли участие N команд. После окончания турнира выяснилось, что любые три команды в играх между собой набрали разное количество очков.

Какое наибольшее количество ничьих могло быть в таком турнире?

9.8. Для каких натуральных чисел N, $N \geqslant 3$, можно построить множество $\mathcal{M}$, состоящее из N попарно не равных прямоугольников, такое, что для любого прямоугольника из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ найдутся как прямоугольник с таким же периметром, так и прямоугольник с такой же площадью?

10 класс

10.1. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, 23, 24$, чтобы произведение оставшихся было полным кубом?

10.2. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$S = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3\ ,$$

если $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$ — какая-то перестановка чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

10.3. На плоскости даны ромб $ABCD$ с углом $\angle B = 60°$ и точка M внутри треугольника ADC такая, что $\angle AMC = 120°$. Пусть P и Q — точки пересечения пар прямых BA и CM, и BC и AM соответсвенно.

Докажите, что точка D принадлежит прямой PQ.

10.4. Пусть A и B — два конечных множества положительных действительных попарно различных чисел, $n > 1$ — фиксированное натуральное число. Известно, что как A, так и B состоят не менее чем из n чисел. Кроме того, произведение любых n попарно различных чисел из A принадлежит множеству B, а сумма любых n попарно различных чисел из B принадлежит множеству A.

Если k и l — количества чисел в множествах A и B соответственно, то какое наибольшее значение может принимать сумма $k + l$?

10.5. Докажите, что для любых действительных положительных чисел a, b, c, d выполнены неравенства

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} + \frac{2|ad - bc|}{\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}}\,.$$

В каждом из случаев выясните, когда достигаются равенства.

10.6. а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $x^2 + y^3$, где x и y — натуральные числа.

б) Докажите, что, каково бы ни было натуральное число m, найдутся m последовательных натуральных чисел, не представимых в указанном виде.

10.7. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M, L и K (порядок следования точек: B, M, L, K, C), такие, что $BM = ML = LK = KC$. Известно, что $\angle ACB = \angle MAB$.

а) Докажите, что $\angle KAL > 1{,}5 \cdot \angle CAK$.

б) Докажите, что если коэффициент $1{,}5$ в неравенстве пункта а) заменить на больший, то неравенство не обязательно будет выполняться.

10.8. В однокруговом турнире по футболу участвовало n $(n \geqslant 5)$ команд. После окончания турнира некоторые команды могут быть дисквалифицированы, при этом аннулируются результаты всех игр, сыгранных этими командами. После этого производится подсчёт очков, набранных оставшимися командами в играх между ними (за победу присуждается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков). Главный приз турнира вручается команде, если сумма набранных ею очков строго больше, чем сумма очков любой другой команды. (В случае, когда остаётся только одна недисквалифицированная команда, ей и вручают главный приз.)

Пусть $f_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — минимальное количество команд, которые должны быть дисквалифицированы в турнире T для того, чтобы команда, занявшая в турнире i-е место, получила главный приз. Обозначим $F(T) = f_1(T) + \ldots + f_n(T)$.

Для каждого $n \geqslant 5$ найдите максимальное и минимальное возможное значение $F(T)$.

11 класс

11.1. Какое наибольшее количество групп чисел можно составить из чисел $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$, чтобы произведение чисел в каждой группе было полным квадратом? (Группа может состоять и из одного числа; произведение чисел в такой группе равно этому числу; каждое число должно входить не более чем в одну группу.)

11.2. Рациональные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^{n}\{k\alpha_i\} < \frac{n}{2}$$

для любого натурального k. (Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x.)

а) Докажите, что хотя бы одно из чисел α_1, ..., α_n целое.

б) Можно ли в этом неравенстве заменить $\frac{n}{2}$ бóльшим числом так, чтобы утверждение осталось верным?

11.3. В некотором государстве авиакомпания „Циклавиа“ организовала 18 авиарейсов между 20 крупными городами. Каждый рейс представляет собой круговой маршрут, проходящий (с посадками) через 5 различных городов. Через каждый город проходит не менее трёх различных рейсов, причём для любых двух городов существует не более одного рейса, пользуясь которым можно перелететь из одного из них в другой без посадки.

Докажите, что, пользуясь рейсами „Циклавиа“, из любого данного города можно попасть в любой другой.

11.4. Можно ли построить такое тело, чтобы для каждого $N \geqslant 3$ нашлось такое параллельное проектирование, при котором изображение тела — выпуклый N-угольник?

11.5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 + x_5^{11},$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — натуральные числа.

11.6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) высота CH пересекает биссектрисы AM и BN в точках P и Q соответственно.

Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков QN и PM, параллельна гипотенузе.

11.7. На столе лежат несколько правильно идущих часов. Известно, что в некоторый момент времени сумма расстояний от некоторой точки X стола до концов минутных стрелок не равна сумме расстояний от X до концов часовых стрелок.

Докажите, что найдётся момент времени, когда сумма расстояний от точки X до концов минутных стрелок больше суммы расстояний от X до концов часовых стрелок.

11.8. Совокупность трёхзначных чисел, составленных только из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, назовём *хорошей*, если она удовлетворяет условию: какие бы две неравные цифры из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 ни выбрать, найдётся такое число совокупности, которое содержит эти две выбранные цифры.

Для каждой хорошей совокупности найдём сумму чисел, её составляющих. Чему равна наименьшая из всех таких сумм?

РЕШЕНИЯ

8 класс

8.1. Ответ: 10.

Расположим данные 20 чисел в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20}\,.$$

Предположим, что неположительных чисел в наборе больше, чем остальных, т. е. по крайней мере a_1, a_2, ..., a_{11} — отрицательные (возможно $a_{11} = 0$). Соглано условию задачи в наборе существуют положительные числа x_1, x_2, ..., x_{10}, такие, что

$$a_1 < -x_1 < a_2 < -x_2 < a_3 < -x_3 < \ldots a_{10} < -x_{10} < a_{11}\,.$$

Из этой цепочки неравенств видно, что среди чисел x_1, x_2, ..., x_{10} нет равных, и значит, всего в наборе не менее 21 числа, что противоречит условию задачи. Следовательно, положительных чисел не меньше, чем остальных. Аналогично можно показать, что и отрицательных чисел в наборе также не меньше, чем остальных. Таким образом, и положительных и отрицательных чисел поровну, т. е. по 10.

8.2. Ответ: 8.

В каждой группе должно быть не менее трёх чисел. Наименьшее число в группе не может быть больше 9, поскольку в противном случае произведение двух самых маленьких чисел в группе было бы не меньше $10 \cdot 11 = 110$ и, значит, наибольшее число в группе было бы больше 100, чего быть не может. Поэтому, поставив в соответствие каждой группе её наименьшее число, заключаем, что групп не более девяти.

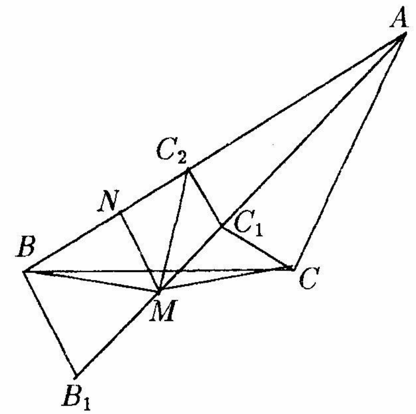
Докажем, что групп не может быть 9. Если бы групп было 9, то наименьшие числа в группах — это 1, 2, ..., 9. Рассмотрим ту группу, наименьшее число которой 1. В этой группе должно быть

ещё не менее трёх чисел. Эти числа больше 9 (поскольку 2, 3, ..., 9 в других группах), а значит, произведение трёх меньших из них больше 100, а тогда наибольшее число в этой группе также больше 100, что невозможно. Следовательно, групп не больше 8.

Остаётся привести удовлетворяющий условию задачи пример из 8 групп чисел:

$$(2,17,34),\ (3,16,48),\ (4,15,60),\ (5,14,70),\ (6,13,78),$$
$$(7,12,84),\ (8,11,88),\ (9,10,90).$$

8.3. Пусть M — середина отрезка B_1C_1. Построим $C_1C_2 \perp AB$, $MN \parallel B_1B$ и соединим точку M с точками B, C, C_2 (см. рисунок).



Так как точки, лежащие на биссектрисе равноудалены от сторон угла, то $C_1C = C_1C_2$. Поскольку $B_1M = C_1M$, то по теореме Фалеса получаем $BN = NC_2$. Однако, $B_1B \perp AB$ и $MN \parallel B_1B$, и значит $MN \perp BC_2$. Следовательно, медиана MN в треугольнике BMC_2 является и высотой, что влечет равенство его сторон $MB = MC_2$. Кроме того, $\Delta\, AC_2C_1 = \Delta\, ACC_1$, так как $\angle C_1AC_2 = \angle C_1AC$ и $C_1C_2 = C_1C$. Поэтому $\angle C_2C_1A = \angle CC_1A$ и, значит, $\angle C_2C_1M = \angle CC_1M$. Но тогда и треугольники $\Delta\, MC_2C_1$ и $\Delta\, MCC_1$ также равны, откуда $MC_2 = MC$ и, значит, $MB = MC$, что и требовалось доказать.

8.4. Ответ: 3.

Раскраску $n \times n$ квадрата $ABCD$, удовлетворяющую условию задачи, будем называть правильной раскраской. Перенумеруем последовательно снизу вверх строки и слева направо столбцы квадрата числами от 1 до n (см. рис. 1). Будем говорить, что в столбце (соответственно, в строке) цвета клеток чередуются, если в этом столбце (соответственно, в строке) клетки, стоящие в строках (соот-

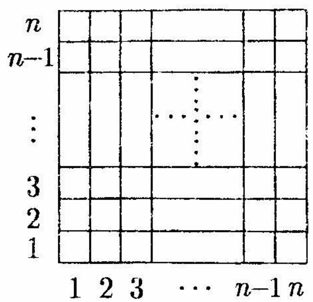


Рис. 1

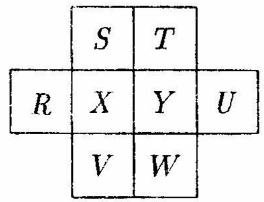


Рис. 2

ветственно, в столбцах) с номерами разной чётности, имеют разный цвет.

Докажем, что если квадрат имеет правильную раскраску и две его соседние клетки имеют один и тот же цвет, то любая другая клетка, соседняя с одной из этих двух клеток имеет другой цвет. В самом деле, пусть клетки X и Y одного цвета (см. рис. 2). Тогда если бы любая другая клетка, соседняя либо с клеткой X, либо с клеткой Y, т. е. клетка R, S, T, U или V, была бы такого же, как и клетки X и Y, цвета (пусть, например, это клетка, соседняя с клеткой X), то у клетки X было бы 2 одноцветных с ней соседние клетки, чего по условию быть не может. Из доказанного факта немедленно вытекают два утверждения: 1) если две соседние клетки, стоящие в разных столбцах (строках), имеют один и тот же цвет, то и любые две соседние клетки, стоящие в этих же столбцах (строках), имеют одинаковый цвет, причём эти цвета чередуются (см. рис. 3), 2) ни в какой строке и ни в каком столбце не могут стоять подряд три клетки одного цвета. Дополним утверждения 1) и 2) очевидным утверждением 3) клетки, соседние с угловой клеткой, имеют с ней противоположный цвет.

Докажем теперь утверждение 4) квадрат с правильной раскраской может содержть две соседние клетки одного и того же цвета только в строчках или только в столбцах. В самом деле, допустим, что стоящие в одной строке соседние клетки V и W одного цвета

и стоящие в одном толбце соседние клетки X и Y тоже одного цвета (см. рис. 4). Рассмотрим квадрат 2×2, стоящий на пересечении

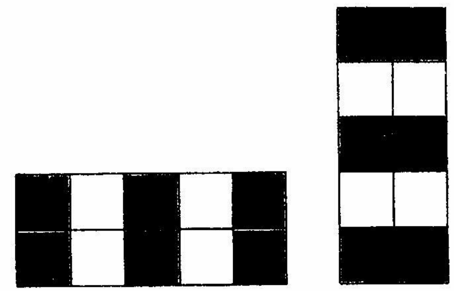


Рис. 3

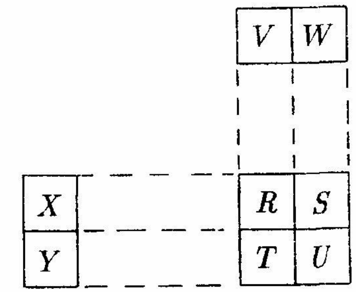


Рис. 4

столбцов, содержащих клетки V и W, и строк, содержащих клетки X и Y. Согласно утверждению 1) клетки R и S должны быть одного, и клетки R T — также одного цвета. Это значит, что клетка R имеет не менее двух соседних такого же, как и она, цвета, что невозможно. Таким образом, если в некоторой строке (соответственно, столбце) две соседние клетки одного цвета, то тогда в каждом столбце (соответственно, в каждой строке) цвета клеток чередуются.

Стало быть, если квадрат правильно раскрашен и в некоторой строке (в некотором столбце) две соседние клетки имеют один и тот же цвет, то раскраска всего квадрата определяется однозначно только раскраской клеток этой строки (этого столбца): цвета клеток клеток в столбцах (в строках) чередуются. В частности, правильная раскраска квадрата полностью определяется раскраской его первой строки или первого столбца, если только эта строка или этот столбец имеют соседние клетки одного цвета. Разобьём поэтому множество всех правильных раскрасок квадрата на три класса: α — все те раскраски, у которых в первой строке имеются две соседние клетки одного цвета, β — все те раскраски, у которых в первом столбце имеются две соседние клетки одного цвета, γ — все те раскраски, у которых нет ни в первой строке, ни в первом столбце соседних клеток одного цвета. Вследствие утверждения 4) раскрасок, попадающих и в класс α, и в класс β, нет.

Класс γ состоит из двух раскрасок квадрата $n \times n$ в шахматном порядке (в самом деле, если бы какая-то строка или какой-то столбец имели соседние клетки одного цвета, то согласно утверждению 1), соответственно, первая строка или первый столбец имели бы соседние клетки одного цвета, но для раскрасок из γ это не так). Поэтому для раскрасок из γ модуль разности между числом белых и чёрных клеток не более 1.

Рассмотрим некоторую раскраску из α. Если мы, двигаясь по первой строке слева направо, будем последовательно выписывать количества соседних одноцветных клеток, то получим состоящую из чисел 1 и 2 последовательность

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k,\ 1 \qquad (*)$$

(начало и конец этой последовательности — единицы в силу утверждения 3); число k зависит от рассматриваемой раскраски), для которой выполнены условия

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k + 1 = n \quad \text{и} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \varepsilon_i = 2 \qquad (**)$$

(первое условие означает, что строка содержит n клеток, а второе — что рассматриваемая раскраска принадлежит классу α). Обратно, если мы зададим любую состоящую из чисел 1 и 2 последовательность $(*)$, удовлетворяющую условиям $(**)$, и раскрасим в соответствии с ней первую строку (т. е. в первой строке первую клетку красим, например, в белый цвет, тогда следующие за ней ε_1 клеток — в чёрный цвет, следующие за ними ε_2 клеток — в белый цвет и т. д. попеременно), то вследствие предыдущего раскраска всего квадрата определится однозначено: нужно только закрасить каждый столбец так, чтобы цвета клеток в нём чередовались. Легко проверить, что эта раскраска будет правильной.

Стало быть, каждой раскраске из α однозначно сопоставляется последовательность $(*)$, удовлетворяющая условию $(**)$, и наоборот. Рассмотрим любую раскраску из α. Обозначим её r, а сопоставляемую ей последовательность $(*)$ — через ε_r. Так как цвета клеток в каждом столбце чередуются, то любые две соседние строки содержат поровну клеток белого и чёрного цвета. Значит, если n чётно,

то в правильной раскраске белых и чёрных клеток поровну, а если n нечётно, то модуль разности между числом белых и чёрных клеток равен модулю разности между суммой $t_{\text{ч}}$ элементов последовательности ε_r, стоящих на чётных местах, и суммой $t_{\text{н}}$ её элементов, стоящих на нечётных местах. Если $n = 9$, то эта разность не может быть чётной, поскольку тогда чётности чисел $t_{\text{ч}}$ и $t_{\text{н}}$ совпадали бы, а значит, их сумма не могла бы равняться нечётному числу 9. При $n = 9$ эта разность не может быть больше или равна 5. В самом деле, из соотношений $|t_{\text{н}} - t_{\text{ч}}| \geqslant 5$ и $t_{\text{н}} + t_{\text{ч}} = 9$ вытекает, что либо $t_{\text{н}}$, либо $t_{\text{ч}}$ не более 2. поэтому в этой строчке найдутся три подряд идущие клетки одного цвета. Противоречие. Всё сказанное справедливо и для раскрасок из класса β.

Остаётся поэтому построить пример последовательности $(*)$ с $|t_{\text{н}} - t_{\text{ч}}| = 3$; например, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1.

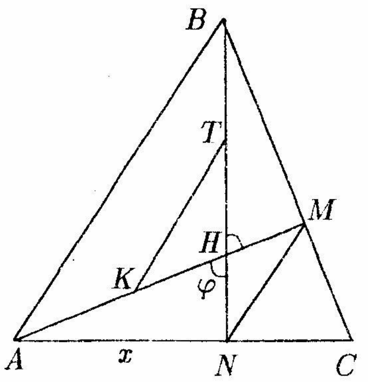
8.5. При $x = a + b$ и $y = a - b$ получим:

$$x^2 + xy + y^2 = (a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2 = 3a^2 + b^2\ ,$$

т.е. данное равенство превращается в тождество и, тем самым, оно верно при любых a и b.

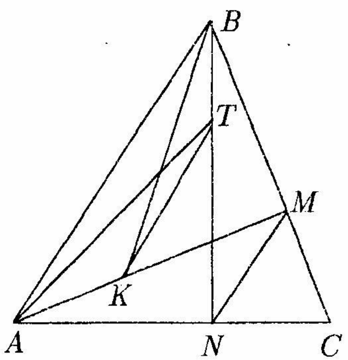
Приведём некоторые соображения, как такие подстановки можно было угадать. Понятно, что для каждого конкретного набора a и b необходимо подобрать свой набор чисел x и y, чтобы выполнялдось данное равенство. Другими словами, существует зависимость x от a и b и зависимость y от a и b. Можно ожидать, что эта зависимость описывается так, что x представляет собой некоторое алгебраическое выражение от a и b и y — другое алгебраическое выражение от a и b. Для того, чтобы данное равенство выполнялось при всех целых a и b, необходимо чтобы после подстановки таких выражений вместо x и y левая часть равенства преобразовывалась в $3a^2 + b^2$. Это довоьно простое выражение, представляющее собой сумму вторых степеней a и b. Чтобы после подстановки соответсвующих выражений вместо x и y в левую часть уравнения не получилось более высоких степеней или других более сложных конструкций, естественно предположить, что x и y представимы в виде сумм чисел a и b, взятых с какими-то целыми (поскольку x и y должны быть целыми) коэффициентами. Эти коэффициенты могут быть положительными и отрицательными, но не могут быть большими по модулю, учитывая, что в выражении $3a^2 + b^2$ коэффициенты маленькие. Можно попробовать несколько ввариантов и даже начать с предложенного выше, который уже оказывается искомым.

8.6. *Первое решение.* Рассмотрим сначала случай: $\angle ACB > 45°$. Тогда точка пересечения высот H лежит на высоте BN между точками N и T, а на высоте AM — между точками K и M. Пусть угол между высотами AM и BN равен φ, а $AN = NT = x$. Тогда из прямоугольного треугольника ANT находим $NH = x \cdot \operatorname{ctg}\varphi$ и далее $HT = NT - NH = x(1 - \operatorname{ctg}\varphi)$, откуда $\frac{NH}{HT} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{1 - \operatorname{ctg}\varphi}$. Аналогично $\frac{MH}{HK} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{1 - \operatorname{ctg}\varphi}$. Поэтому $\frac{NH}{HT} = \frac{MH}{HK}$. Значит, $\Delta KHT \sim \Delta MHN$, откуда и вытекает параллельность KT и MN. (Последний вывод можно сделать из полученной пропорции также на основании обратной теоремы Фалеса.)



Случай $\angle ACB < 45°$ рассматривается аналогично.

Второе решение. Легко видеть, что точки A, N, M и B лежат на окружности с диаметром AB. Поэтому $\angle AMN = \angle ABN$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Кроме того, $\angle MAN = \angle MBN$ по тем же соображениям (последнее вытекает также из того, что прямоугольные треугольники AMC и ANC имеют общий острый угол при вешине C). Так как треугольники ANT и BMK — прямоугольные равнобедренные, то $\angle TAK = \angle TAN - \angle MAN = 45° - \angle MAN = 45° - \angle MBN = \angle KBN$.



Значит, и точки A, K, T и B также лежат на одной окружности. Поэтому $\angle AKT + \angle ABT = 180°$. Тогда $\angle TKM = 180° - \angle AKT = \angle ABT = = \angle ABN$. В результате, $\angle AMN = \angle TKM$, откуда и следует параллельность KT и MN.

8.7. Ответ: а) да, всегда; б) нет, не всегда.

В обоих случаях у всех детей после передела должно оказаться по 10 игрушек. Для каждой кучки игрушек подсчитаем $|10 - x|$ — отклонение числа игрушек x от требуемого. Проследим отдельно за чётными кучками (с чётным числом игрушек) и нечётными. Покажем, что максимальное отклонение чётных кучек (если она не равна 0) в случае а) всегда можно уменьшить. Действительно, пусть в чётной кучке с максимальным отклонением a игрушек. Поскольку сумма игрушек во всех кучках чётная, то найдётся кучка с b игрушками. Если $a \neq b$, то из таких кучек получим две кучки по $\frac{a+b}{2}$ игрушек в каждоой, отклонения которых $|10 - \frac{a+b}{2}| < |10 - a|$. Аналогично можно уменьшить максимальное отклонеие и у нечётных кучек. Этого нельзя будет сделать только тогда, когда в какой-то момент во всех чётных кучках будет равное количество игрушек и во всех нечётных также равное число игрушек. Предположим, что так и случилось: имеется m нечётных кучек с x игрушками и $8 - m$ чётных кучек с y игрушками. Тогда $mx + (8 - m)y = 80$, т. е. $m(x - y) + = 8(10 - y)$, откуда видно, что $(x - y)$ делится на 2, поскольку $1 < m < 8$. Значит, x и y — числа одной чётности. Противоречие. Таким образом в случае а) с помощью указанных правил можно уравнять все кучки.

В случае б) аналогично получим $m(x - y) + = 10(10 - y)$, откуда следует, что разность $(x - y)$ делится на 5 (иначе, также как и в предыдущем случае, будет чётным). Это позволяет легко построить пример разбиения 100 игрушек на 10 кучек с ненулевыми отклонениями, которые нельзя уменьшить:

$$11,\ 11,\ 11,\ 11,\ 11,\ 11,\ 11,\ 11,\ 6,\ 6\,.$$

8.8. Ответ: $N = 5$.

Пусть имеется n, $n \geqslant 5$, попарно дружественных треугольников $T_1, \ldots, T_n$. Пусть ΔT_1 имеет стороны a, b, c. Так как из этих сторон можно составить только три пары:

$$(a;b),\ (b;c) \text{ и } (a;c), \qquad (*)$$

— а любой из остальных треугольников $T_2, T_3, \ldots, T_n$ должен иметь пару сторон, совпадающих с одной из пар $(*)$, то среди треугольников $T_2, T_3, \ldots, T_n$ найдутся два, некоторая пара сторон которых совпадает с одной и той же из пар $(*)$ (пусть без нарушения общности это треугольники T_2 и T_3, а пара сторон — это $(a;b)$). Итак, каждый из треугольников T_1, T_2 и T_3 имеет стороны a и b, третью их сторону обозначим, соответственно, через x, y и z (x, y и z попарно различны (ибо в противном случае среди треугольников T_1, T_2 и T_3 нашлось бы два равных). Так как какие-то две стороны $\triangle T_4$ равны каким-то двум сторонам $\triangle T_1$, то одна из сторон $\triangle T_4$ — это либо сторона a, либо сторона b (пусть без нарушения общности эта сторона — сторона a). Тогда, если бы $\triangle T_4$ не имел стороны b, то две другие его стороны должны были бы принимать три различных значения: x, y и z (поскольку $\triangle T_4$ с каждым из треугольников T_1, T_2, T_2 имеет по две равные стороны). Противоречие. Следовательно, $\triangle T_4$ имеет стороны a и b. Аналогично, любой $\triangle T_i$, $i = 5, \ldots, n$, имеет стороны a и b. Итак, каждый из треугольников $T_1, \ldots, T_n$ имеет стороны a и b, т. е. этот набор хороший. Таким образом, $N \geqslant 5$.

С другой стороны, существуют четыре попарно дружественных треугольника, совокупность которых не является хорошей. Действительно, треугольники со сторонами (a,b,c), (a,b,d), $b,c,d)$ и (c,d,a) (например, $a=3$, $b=4$, $c=5$, $d=6$) являются попарно дружественными, однако их совокупность не является хорошей.

9 класс

9.1. Ответ: 4 числа.

Пусть $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot n$ и α_p — степень, в которой простое число p входит в произведение $n!$. Справедлива следующая формула:

$$\alpha_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots ,$$

где с некоторого места все слагаемые равны 0.

Используя эту формулу, легко находим степени вхождения простых чисел 2, 3, 5, 7, и т.д. в произведение $28!$:

$$28! = 2^{25}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23 .$$

Для того, чтобы после вычеркивания нескольких чисел произведение оставшихся было полным квадратом, нужно, чтобы степени вхождения в оставшееся произведение всех простых чисел были чётными. Поскольку степени вхождения простых чисел 2, 3, 17, 19 и 23 нечётны, то должно быть вычеркнуто хотя бы одно число, кратное 17, хотя бы одно, кратное 19, хотя бы одно, кратное 23. Таких чисел среди 1, 2, 3, ..., 28 имеется лишь по одному, поэтому числа 17, 19 и 23 должны быть вычеркнуты. Кроме того, должно быть вычеркнуто хотя бы одно число, кратное 2 (которое одновременно может оказаться кратным 3). Тем самым, должно быть вычеркнуто не менее четырёх чисел. С другой стороны, если вычеркнуть числа 6, 17, 19 и 23, то произведение оставшихся будет равно $2^{24}\cdot 3^{12}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11^2$, т. е. будет полным квадратом.

9.2. Так как a и b натуральные числа, то $a\sqrt{2} \neq b$, т.е. $2a^2 \neq b^2$. Тогда

$$|2a^2-b^2|\geqslant 1 \iff |(a\sqrt{2}+b)(a\sqrt{2}-b)|\geqslant 1 \iff |a\sqrt{2}+b|\cdot|a\sqrt{2}-b|\geqslant 1.$$

Так как $0 < a\sqrt{2}+b < 2a+2b = 2(a+b)$, то

$$|a\sqrt{2}+b|\cdot|a\sqrt{2}-b|\geqslant 1 \implies |a\sqrt{2}-b|\geqslant \frac{1}{a\sqrt{2}+b} > \frac{1}{2(a+b)}.$$

9.3. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $PMNQ$ — трапеция ($MN \parallel PQ$), A — точка пересечения продолжения боковых сторон PM и QN. Тогда прямая, проходящая через середины оснований PQ и MN, проходит через точку A; прямая, проходящая через точку A и точку пересечения диагоналей PN и QM, проходит через середины оснований.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середины F и L оснований MN и PQ соответственно и пересекает продолжение стороны PM в точке A_1. Из подобия треугольников A_1MF, A_1PL и AMN, APQ получаем

$$\frac{A_1M}{A_1P} = \frac{MF}{PL} = \frac{2MF}{2PL} = \frac{MN}{PQ} = \frac{AM}{AP},$$

откуда следует, что точки A и A_1 совпадают. Аналогично доказывается, что продолжение стороны QN также проходит через точку A. первое утверждение леммы доказано. Докажем теперь второе утверждение.

Пусть F и L точки пересечения прямой AK (K — точка пересечения диагоналей трапеции) со сторонами MN и PQ соответственно. Тогда $\Delta MFK \sim \Delta CLK$, $\Delta FNK \sim \Delta LBK$, $\Delta MNK \sim \Delta CBK$, поэтому

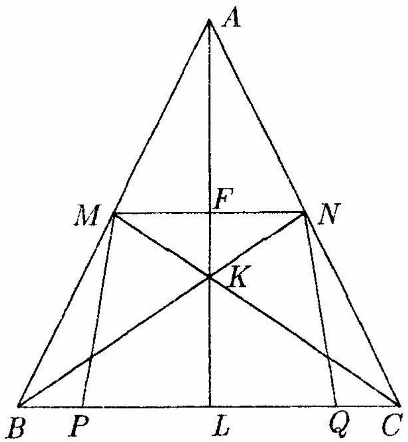
$$\frac{MF}{LC} = \frac{MK}{KC} = \frac{KN}{KB} = \frac{FN}{BL}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{MF}{FN} = \frac{LC}{BL}. \tag{1}$$

С другой стороны

$$\frac{MF}{BL} = \frac{AF}{AL} = \frac{FN}{LC}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{MF}{FN} = \frac{BL}{LC}. \tag{2}$$

Из (1), (2) и следует, что $BL = LC$, $MF = FN$. Лемма доказана.

Пусть K — точка пересечения BN и CM и прямая AK пересекает сторону BC в точке L. Поскольку $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{AM}{AB}$, то $MN \parallel BC$. Поэтому, $BMNC$ — трапеция и, следовательно, в силу леммы, AL — медиана треугольника ABC, т. е. $BL = LC$. Применим теперь к каждой из окружностей теорему о секущих:



$$LA \cdot LK = LC(LC - QC),$$
$$LA \cdot LK = LB(LB - PB),$$

откуда следует, что $QC = PB$.

Заметим, что в приведённых выше равенствах мы можем считать QC и PB направленными отрезками, полагая $QC > 0$, если Q лежит левее C, $QC < 0$, если Q лежит правее C, $PB > 0$, если P лежит правее B, $PB < 0$, если P лежит левее B. тогда полученное равенство $QC = PB$ означает, что либо обе точки P и Q лежат либо внутри отрезка BC, либо вне его, либо совпадают с его концами. При этом, в последнем случае утверждение задачи очевидно.

Не нарушая общности, считаем, что P и Q лежат внутри отрезка BC. Тогда, если $MN = PQ$, то $PMNQ$ — параллелограмм и, следовательно, прямые PM, AL, QN — параллельны.

В противном случае, $PMNQ$ — трапеция и прямая AK проходит через середины ее оснований, следовательно, в силу леммы, она проходит через точку пересечения прямых PM и QN.

9.4. Ответ: 54.

Раскраску $n \times n$ квадрата $ABCD$, удовлетворяющую условию задачи, будем называть правильной раскраской. Перенумеруем последовательно снизу вверх строки и слева направо столбцы квадрата числами от 1 до n (см. рис. 1). Будем говорить, что в столбце (соответственно, в строке) цвета клеток чередуются, если в этом столбце (соответственно, в строке) клетки, стоящие в строках (соответственно, в столбцах) с номерами разной чётности, имеют разный цвет.

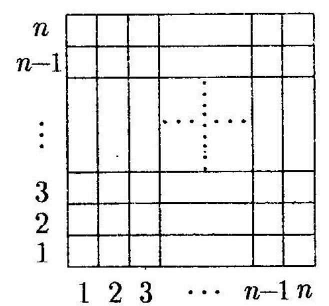


Рис. 1

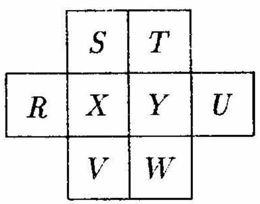


Рис. 2

Докажем, что если квадрат имеет правильную раскраску и две его соседние клетки имеют один и тот же цвет, то любая другая клетка, соседняя с одной из этих двух клеток, должна иметь другой цвет. В самом деле, пусть клетки X и Y одного цвета (см. рис. 2). Тогда если бы любая другая клетка, соседняя либо с клеткой X, либо с клеткой Y, т. е. клетка R, S, T, U или V, была бы такого же, как и клетки X и Y, цвета (пусть, например, это клетка, соседняя с клеткой X), то у клетки X было бы 2 одноцветных с ней соседние клетки, чего по условию быть не может. Из доказанного факта немедленно вытекают два утверждения: 1) если две соседние клетки, стоящие в разных столбцах (строках), имеют один и тот же цвет, то и любые две соседние клетки, стоящие в этих же столбцах (строках), имеют одинаковый цвет, причём эти цвета чередуются (см. рис. 3), 2) ни в какой строке и ни в каком столбце не могут стоять подряд три клетки одного цвета. Дополним утверждения 1) и 2) очевидным утверждением 3) клетки, соседние с угловой клеткой, имеют с ней противоположный цвет.

Докажем теперь утверждение 4) квадрат с правильной раскраской может содержать две соседние одноцветные клетки либо только

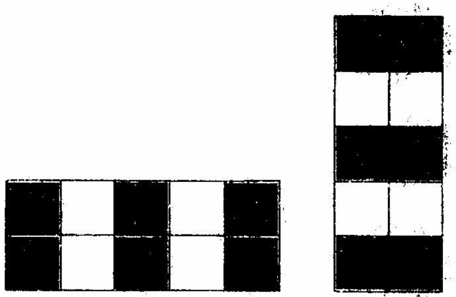


Рис. 3

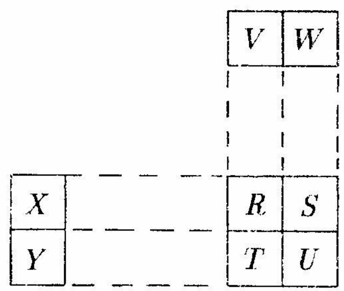


Рис. 4

в строчках, либо только в столбцах. В самом деле, допустим, что стоящие в одной строке соседние клетки V и W одного цвета и стоящие в одном столбце соседние клетки X и Y одного цвета (см. рис. 4). Рассмотрим квадрат 2×2, стоящий на пересечении столбцов, содержащих клетки V и W, и строк, содержащих клетки X и Y. Согласно утверждению 1) клетки R и S должны быть одного, а также клетки R и T — одного цвета. Поэтому у клетки R не менее двух соседних клеток такого же, как и она цвета. Противоречие.

Таким образом, если в некоторой строке (соответственно, столбце) две соседние клетки одного цвета, то тогда в каждом столбце (соответственно, в каждой строке) цвета клеток чередуются.

Стало быть, если квадрат правильно раскрашен и в некоторой строке (в некотором столбце) две соседние клетки имеют один и тот же цвет, то раскраска всего квадрата определяется однозначно только раскраской клеток этой строки (этого столбца): цвета клеток клеток в столбцах (в строках) чередуются. В частности, правильная раскраска квадрата полностью определяется раскраской его первой строки или первого столбца, если только эта строка или этот столбец имеют соседние клетки одного цвета. Разобьём поэтому множество всех правильных раскрасок квадрата на три класса: α — все те раскраски, у которых в первой строке имеются две соседние клетки одного цвета, β — все те раскраски, у которых в первом столбце имеются две соседние клетки одного цвета, γ — все те раскраски, у которых нет ни в первой строке, ни в первом столбце соседних клеток одного цвета. Вследствие утверждения 4) раскрасок, попадающих и в класс α, и в класс β, нет.

Класс γ состоит из двух раскрасок квадрата $n \times n$ в шахматном порядке (в самом деле, если бы какая-то строка или какой-то столбец имели соседние клетки одного цвета, то согласно утверждению 1), соответственно, первая строка или первый столбец имели бы соседние клетки одного цвета, но для раскрасок из γ это не так). Найдём число раскрасок в классе α. Рассмотрим некоторую раскраску из α. Если мы, двигаясь по первой строке слева направо, будем последовательно выписывать количества соседних одноцветных клеток, то получим состоящую из чисел 1 и 2 последовательность

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_k,\ 1 \qquad (*)$$

(начало и конец этой последовательности — единицы в силу утверждения 3); число k зависит от рассматриваемой раскраски), для которой выполнены условия

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k + 1 = n \quad \text{и} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \varepsilon_i = 2 \qquad (**)$$

(первое условие означает, что строка содержит n клеток, а второе — что рассматриваемая раскраска принадлежит классу α). Обратно, если мы зададим любую состоящую из чисел 1 и 2 последовательность $(*)$, удовлетворяющую условиям $(**)$, и раскрасим в соответствии с ней первую строку (т. е. в первой строке первую клетку красим, например, в белый цвет, тогда следующие за ней ε_1 клеток — в чёрный цвет, следующие за ними ε_2 клеток — в белый цвет и т. д. попеременно), то вследствие предыдущего раскраска всего квадрата определится однозначено: нужно только закрасить каждый столбец так, чтобы цвета клеток в нём чередовались. Легко проверить, что эта раскраска будет правильной. Стало быть, число раскрасок в классе α равно 2τ, где τ — число различных последовательностей $(*)$, удовлетворяющих условиям $(**)$ (мы умножили на 2, поскольку каждой раскраске соответствует раскраска, получающаяся переменой цветов клеток). Аналогичные рассуждения справедливы и для класса β. Поэтому число различных правильных раскрасок $n \times n$ квадрата $ABCD$ равно $2\tau + 2\tau + 2 = 4\tau + 2$ (слагаемое 2 — это число раскрасок в классе γ). Остаётся найти число τ.

Пусть n — число чётное. Обозначим через p число $\dfrac{n-2}{2}$. Тогда число k в последовательности $(*)$ удовлетворяет точным неравенствам: $p \leqslant k \leqslant 2p$. Пусть $k = p + i$, где $i \in \{0, \ldots, p\}$. В этом случае среди чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ровно $2i$ чисел равны 1, а остальные $p - i$ чисел равны 2. Поэтому число различных удовлетворяющих условиям $(**)$ последовательностей $(*)$ с $k = p + i$ равно числу способов распределить $2i$ единиц на $p+i$ мест, т. е. равно C_{p+i}^{2i}. Поэтому, если n чётное, то $\tau = \sum\limits_{i=0}^{p} C_{p+i}^{2i}$, где $p = \dfrac{n-2}{2}$. В частности, если $n = 8$, то $\tau = \sum\limits_{i=0}^{3} C_{3+i}^{2i} = C_3^0 + C_4^2 + C_5^4 + C_6^6 = 1 + 6 + 5 + 1 = 13$, а число всех правильных раскрасок 8×8 квадрата $ABCD$ равно $4 \cdot 13 + 2 = 54$.

Пусть n — число нечётное. Обозначим через p число $\dfrac{n-3}{2}$. Тогда число k в последовательности $(*)$ удовлетворяет точным неравенствам: $p + 1 \leqslant k \leqslant 2p + 1$. Пусть $k = p + j$, где $j \in \{1, \ldots, p + 1\}$.

В этом сучае среди чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ровно $2j + 1$ чисел равны 1, а остальные $p - j$ чисел равны 2. Поэтому число различных удовлетворяющих условиям $(**)$ последовательностей $(*)$ с $k = p + j$ равно числу способов распределить $2j + 1$ единиц на $p + j$ мест, т. е. равно C_{p+j}^{2j+1}. Поэтому, если n нечётное, то $\tau = \sum\limits_{j=1}^{p+1} C_{p+j}^{2j+1}$, где $p = \dfrac{n-3}{2}$.

9.5. Ответ: 169.

Пусть $p = 210n + r$, где $0 < r < 210$. Если $p = 2, 3, 5$ или 7, то $r = 2, 3, 5$ или 7 соответственно — в противоречие с тем, что r составное. Поэтому $p > 7$. Пусть q — наименьший простой делитель числа r, то есть $r = qm, q \leqslant m$. Имеем $210 > r = qm \geqslant q^2$, откуда $q \leqslant 13$. С другой стороны, r не делится ни на одно из чисел $2, 3, 5, 7$, иначе p делилось бы на то же число и не было бы простым. Поэтому $q > 7$, откуда $q = 11$ или $q = 13$. По условию $r = a^2 + b^2$, где a и b — некоторые натуральные числа. Если $q = 11$, то $a^2 + b^2$ делится на 11. Выпишем все возможные остатки при делении квадратов целых чисел при делении на 11: $0, 1, 4, 9, 5, 3$. Видим, что сумма двух остатков делится на 11 только в том случае, когда оба они равны 0. Поэтому a и b кратны 11, то есть числа a^2 и b^2 делятся на 121, а тогда $r = a^2 + b^2 \geqslant 121 + 121 \geqslant 242 > 210$ — противоречие. Стало быть, $q = 13$, $m < \frac{210}{q} < 17$, то есть $m \leqslant 16$, причём наименьший простой делитель числа m не меньше 13. Отсюда $m = 13$ и, окончательно $r = mq = 13^2 = 169$. Заметим, что $169 = 12^2 + 5^2$.

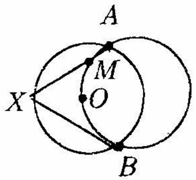
9.6. Ответ: искомое множество — окружность, проходящая через центр данной окружности и точки A и B.

Заметим, что для любой точки M, полученной описанным в условии образом из точки X, имеет место равенство $MX = MB$ (медиана равна половине гипотенузы!). Поэтому указанный ответ будет вытекать из следующего утверждения.

Лемма. Пусть S и S_1 — две окружности, пересекающиеся в точках A и B, причём S_1 проходит через центр O окружности S. Если точки X и M на окружностях S и S_1 соответственно таковы, что A принадлежит прямой XM, то $XM = BM$.

Возможны три случая: 1) A лежит между X и M; 2) M лежит между X и A; 3) X лежит между A и M.

Рассмотрим, например, случай 2. Имеем $\angle MXB = \angle AXB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AMB$. Но $\angle AMB$ — внешний угол треугольника XMB, т. е. $\angle AMB = \angle MXB + \angle XBM$. Получаем, что $\angle MXB = \angle XBM$, т. е. $XM = BM$. Случаи 1 и 3 разбираются столь же легко.



Осталось заметить, что когда X пробегает S, точка пересечения прямой XA и окружности S_1 пробегает окружность S_1.

9.7. Пусть k — наибольшее число ничьих, которые сыграла одна команда. Не нарушая общности, считаем, что ровно k игр сыграла в ничью команда с номером N с командами с номерами $1, 2, ldots, k$. Из условия следует, что никакие две команды из этой группы в $k =$ команд не сыграли в ничью. Поэтому любая команда из этой группы сыграла в ничью не более чем с $N - k$ командами. Каждая же из команд с номерами $k+1, k+2, \ldots, N$ сыграла в ничью не более чем k командами (по определению числа k.) Следовательно, общее число ничьих в турнире не превосходит

$$\frac{k(N-k) + (N-k)k}{2} = k(N-k).$$

Легко видеть, что

$$M = \max_{1\leqslant k\leqslant N} k(N-k) = \begin{cases} m^2, & \text{если} \quad N = 2m, \\ m(m+1), & \text{если} \quad N = 2m+1. \end{cases}$$

Покажем, что существует такой турнир, в котором сыграно ровно M ничьих. Пусть каждая из команд с номерами $1, 2, \ldots, m$ сыграла в ничью с каждой из команд с номерами $m+1, m+2, \ldots, N$, и в каждой из этих групп команда с большим номером выиграла у команды с меньшим номером. Легко проверить, что все условия задачи при этом будут выполнены, а общее число ничьих будет равно M. Действительно, рассмотрим тройку команд с номерами p, q, r, $p < q < r$. Если команды с номерами p, q и r принадлежат одной

группе, то в играх этой тройки команда с номером p набрала 0 очков, команда с номером q — 2 очка, а с номером r — 4 очка. Если команды с номерами p и q принадлежат одной группе, а с номером r другой, то в играх этой тройки команда с номером p набрала 1 очко, команда с номером q — 3 очка, а с номером r — 2 очка. Если команды с номерами p и r принадлежат одной группе, а с номером q другой, то в играх этой тройки команда с номером p набрала 1 очко, команда с номером r — 3 очка, а с номером q — 2 очка. Если команды с номерами q и r принадлежат одной группе, а с номером p другой, то в играх этой тройки команда с номером p набрала 2 очка, команда с номером q — 1 очко, а с номером r — 3 очка.

9.8. Ответ: для любого $N > 3$ и $N \neq 5$.

Рассмотрим в плоскости Opq параболу $q = \frac{p^2}{4}$. Часть плоскости, лежащую в I четверти под параболой, обозначим через $\mathcal{O}$ (см. рис. 1). Прямоугольник площади q и полупериметра p существует

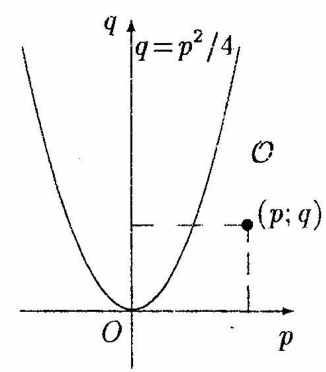


Рис. 1

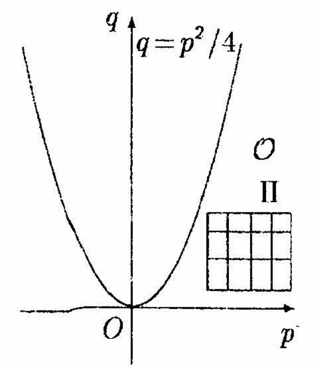


Рис. 2

тогда и только тогда, когда точка $(p;q)$ лежит в области $\mathcal{O}$. Действительно, существование такого прямоугольника равносильно наличию корней у квадратного трёхчлена $x^2 - px + q$ (его корни — длины смежных сторон прямоугольника), но, в свою очередь, этот квадратный трёхчлен имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант $p^2 - 4q \geqslant 0$, т. е. когда $q \leqslant \frac{p^2}{4}$, а значит, когда точка

$(p;q)$ лежит в области $\mathcal{O}$. Следовательно, искомый набор $\mathcal{M}$, содержащий N прямоугольников, существует тогда и только тогда, когда выполнено условие (назовём его условием A): в области $\mathcal{O}$ можно отметить N точек так, что какую бы из отмеченных точек ни выбрать, найдутся отличные от выбранной отмеченная точка с той же проекцией на ось Op и отмеченная точка с той же проекцией на ось Oq, что и выбранная точка.

Если N составное, то так отметить точки легко. В самом деле, поместим в область $\mathcal{O}$ какой-либо прямоугольник (обозначим его П). Пусть $N = r \cdot t$, где натуральные $r \geqslant 2$, $t \geqslant 2$). Разобьём в прямоугольнике П его ширину на $r-1$ отрезков, а длину — на $t-1$ отрезков и проведём через вершины прямоугольника и точки разбиения прямые, параллельные координатным осям (см. рис. 2). Получим N точек их пересечения. Они, очевидно, удовлетворяют условию A. Если N простое, большее 6, то среди всех натуральных чисел, кратных трём и бо́льших N, выберем наименьшее число M. Так как M составное, то так же, как выше, в области $\mathcal{O}$ построим M точек, удовлетворяющих условию A. Поскольку $M - N \leqslant 2$ и $M = 3 \cdot m$, где $m \geqslant 3$, то выбросив из построенного множества одну (если $M - N = 1$) точку или две диагонально противоположные (если $M - N = 2$) точки, получим множество удовлетворяющее условию A и содержащее N точек.

Остаётся доказать, что если $N = 3$ или $N = 5$, то такого набора не существует. Пусть $N = 3$. Допустим, что прямоугольники Π_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условию задачи. Пусть тогда без нарушения общности у прямоугольников Π_1 и Π_2 равны площади. Так как площадь прямоугольника Π_3 должна быть равна площади одного из прямоугольников Π_1 или Π_2, то у всех прямоугольников Π_1, Π_2 и Π_3 одна и та же площадь. Аналогично, у них один и тот же периметр, Следовательно, эти прямоугольники попарно равны.

Пусть $N = 5$. Допустим, что прямоугольники Π_i $(i = 1, \ldots, 5)$ удовлетворяют условию задачи. Допустим, что какие-то три из них, например, прямоугольники Π_1, Π_2 и Π_3 имеют одну и ту же площадь. Тогда никакие два из них не имеют одинакового периметра (поскольку в противном случае были бы равными). Значит, каждый

из прямоугольников Π_1, Π_2 и Π_3 имеет периметр, равный периметру Π_4 или Π_5. Следовательно, два из прямоугольников Π_1, Π_2 и Π_3 имеют один и тот же периметр, чего быть не может. Поэтому прямоугольники Π_i $(i = 1, \ldots, 5)$ разбиваются на непересекающиеся пары прямоугольников, имеющих одну и ту же площадь, но это невозможно, поскольку их нечётное число. Следовательно, удовлетворяющего условию набора, содержащего 5 прямоугольников, не существует.

10 класс

10.1. Ответ: 7 чисел.

Пусть $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$ и α_p — степень, в которой простое число p входит в произведение $n!$. Справедлива следующая формула:

$$\alpha_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots ,$$

где с некоторого места все слагаемые равны 0.

Используя эту формулу, легко находим степени вхождения простых чисел 2, 3, 5, 7, и т.д. в произведение 24!:

$$28! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 .$$

Для того, чтобы после вычеркивания нескольких чисел произведение оставшихся было полным кубом, нужно, чтобы степени вхождения в оставшееся произведение всех простых чисел были кратны 3. Поэтому должны быть вычеркнуты, по крайней мере, числа 13, 17, 19, 23, оба числа, кратные 11, и число, кратное 5. Это всё различные числа (при этом какие-то из них могут оказаться кратными 2 и 3). Итого, не менее семи чисел должно быть вычеркнуто. С другой стороны, если вычеркнуть числа 11, 13, 15, 17, 19, 22 и 23, то произведение оставшихся будет равно $2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^3 \cdot 7^3$, т.е. будет полным кубом.

10.2. Ответ: 214.

Пример

$$S = 1 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 214.$$

принадлежат множеству A, в противоречии с тем, что A содержит не более n элементов.

Итак, оба множества содержат не более n элементов. Приведем пример, показывающий, что оба множества могут содержать ровно по n элементов:

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad B = \left\{1, 2, \ldots, n-2, \frac{n(n+1)}{2}, \frac{2(n-1)}{(n+1)!}\right\}.$$

10.5. *Первое решение.* Пусть $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$. Тогда неравенство

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \qquad (1)$$

представляет собой неравенство для сторон треугольника, построенного на векторах u и v.

Для доказательства неравенства

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \leqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} + \frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}} \quad (2)$$

достаточно, в силу (1), доказать, что

$$(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2 \leqslant (a+c)^2 + (b+d)^2 + 2|ad-bc|. \qquad (3)$$

Имеем

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \leqslant$$

$$\leqslant a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2+2|ad-bc| \iff$$

$$\iff \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \leqslant ac+bd+|ad-bc| \iff$$

$$\iff (a^2+b^2)(c^2+d^2) \leqslant$$

$$\leqslant a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2+2(ac+bd)|ad-bc| \iff$$

$$\iff a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \leqslant$$

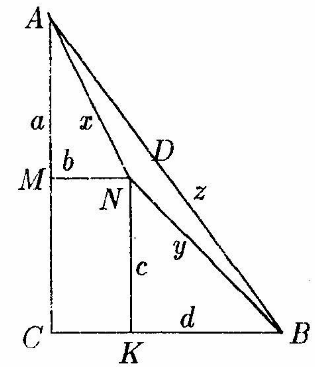
$$\leqslant a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2+2(ac+bd)|ad-bc| \iff$$

$$\iff 0 \leqslant 2(ac+bd)|ad-bc|.$$

Таким образом, неравенство (3) верно, а следовательно, верно и неравенство (2).

Легко видеть, что оба неравенства (1) и (2) становятся равенствами, если векторы u и v колинеарны, т. е. $ad - bc = 0$.

Второе решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (см. рисунок), в котором $AM = a$, $MN = b$, $NK = c$, $KB = d$, $AN = x = \sqrt{a^2+b^2}$, $NB = y = \sqrt{c^2+d^2}$, $AB = z = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.



Проведём в треугольнике ABN высоту ND. Так как

$$AB^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 >$$

$$> (a^2+b^2) + (c^2+d^2) = AN^2 + NB^2,$$

то $\angle ANB > 90°$, и, следовательно, точка D лежит на основании AB.

Неравенство (1) (см. первое решение) имеет вид $AB \leqslant AN + NB$ и, очевидно, выполнено. Легко видеть, что

$$AN + NB \leqslant (AD + ND) + (BD + ND) = AB + 2ND =$$

$$= AB + \frac{4S_{\triangle ABN}}{AN}. \qquad (*)$$

По формуле Герона имеем

$$16S_{\triangle ABN} = 4x^2y^2 - (x^2+y^2-z^2)^2 =$$

$$= 4(a^2+b^2)(C^2+d^2) - (2ac+2bd)^2 = 4(ad-bc)^2,$$

то есть $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2}|ad-bc|$. Требуемое неравенство (2) следует теперь из неравенства (*).

В обоих случаях равенство в (1) и (2) достигается тогда и только тогда, когда точки A, N, B лежат на одной прямой, т. е. когда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

10.6. Докажем утверждение пункта **б**), из которого следует утверждение пункта **а**).

Обозначим через $S(n)$ — количество чисел, не превосходящих n, представимых в виде

$$x^2 + y^3, \quad x, y \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

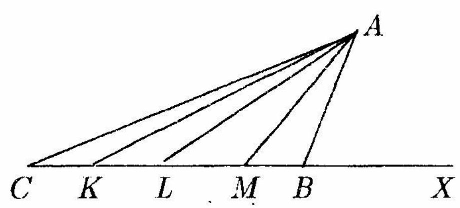
Во всех этих представлениях $x^2 + y^3 \leqslant n$, т. е. $x \leqslant \sqrt{n}$ и $y \leqslant \sqrt[3]{n}$. Поэтому $1 \leqslant x \leqslant [\sqrt{n}]$, $1 \leqslant y \leqslant [\sqrt[3]{n}]$. Следовательно, всего существует ровно $[\sqrt{n}] \cdot [\sqrt[3]{n}]$ различных натуральных пар чисел x и y, удовлетворяющих этим неравенствам. Поэтому чисел, не превосходящих n и представимых в виде $x^2 + y^3$ будет не более $[\sqrt{n}] \cdot [\sqrt[3]{n}]$, т. е. $S(n) \leqslant [\sqrt{n}] \cdot [\sqrt[3]{n}] \leqslant \sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{n} = n^{5/6}$.

Предположим, что существует такое натуральное число m, что среди любых m последовательных натуральных чисел существует число, представимое в виде (1). Тогда $S(mk) \geqslant k$, $k \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$(mk)^{5/6} \geqslant S(mk) \geqslant k \quad \Longrightarrow \quad k \leqslant m^5 \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

10.7. а) Треугольники ABC и MBA подобны, так как угол $\angle B$ у них общий и по условию $\angle ACB = \angle MAB$. Поэтому, $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4MB}{AB}$, откуда $AB^2 = 4MB^2$, или $AB = 2MB$, или $AB = \dfrac{1}{2}BC$. Стало быть, точка A принадлежит окружности с центром в точке B и радиусом BL. Пусть X — вторая (кроме L) точка пересечения этой окружности с прямой CB. Пусть $AB = BL = BX = r$, $BC = 2r$, $\angle CBA = \beta$. Из треугольников CAK и KAL по теореме синусов $AC \sin \angle CAK = CK \sin \angle CKA = KL \sin \angle LKA = AL \sin \angle KAL$, откуда



$$\frac{\sin \angle KAL}{\sin \angle CAK} = \frac{AC}{AL} = \sqrt{\frac{r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos \beta}{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \beta}} = \sqrt{\frac{5 - 4\cos \beta}{2 - 2\cos \beta}} =$$

$$= \sqrt{2 + \frac{1}{2 - 2\cos \beta}} > \sqrt{2 + \frac{1}{2+2}} = 1,5$$

(использовано, что $\cos \beta > -1$).

Для доказательства пункта **а**) осталось заметить, что $\dfrac{\angle KAL}{\angle CAK} > \dfrac{\sin \angle KAL}{\sin \angle CAK}$, что равносильно неравенству $\dfrac{\sin \angle CAK}{\angle CAK} > \dfrac{\sin \angle KAL}{\angle KAL}$, которое справедливо ввиду того, что $\angle KAL > \angle CAK$ и ввиду убывания функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Докажем, что $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ убывает на $(0, \dfrac{\pi}{2})$. Имеем $f'(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \cos x} < 0$, так как $x < \operatorname{tg} x$ на $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

б) Устремим точку A к точке X. Тогда углы $\angle KAL$ и $\angle CAK$ стремятся к нулю, и мы получаем

$$\frac{\angle KAL}{\angle CAK} = \frac{\angle KAL}{\sin \angle KAL} \cdot \frac{\sin \angle CAK}{\angle CAK} \cdot \frac{\sin \angle KAL}{\angle CAK} \to$$

$$\to \frac{\angle KAL}{\sin \angle KAL} \cdot \frac{\sin \angle CAK}{\angle CAK} \cdot \frac{CA}{AL} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{3r}{2r} = 1,5,$$

т. е. отношение углов KAL и CAK может быть сколь угодно близко к $1,5$ — тем самым утверждение пункта **б**) доказано.

10.8. Ответ: $\max\limits_T F(T) = n(n-1)$, $\min\limits_T F(T) = n$.

Легко видеть, что $\max\limits_T F(T) = n(n-1)$. Действительно, $f_i(T) \leqslant n - 1$ для любой i-й команды в любом турнире T. Поэтому $F(T) \leqslant n(n-1)$ для любого турнира T. С другой стороны, в турнире T_0, в котором все команды сыграли между собой в ничью, для вручения главного приза любой i-й команду необходимо дисквалифицировать все остальные команды, т. е. $f_i(T_0) = n - 1$ для всех i. Поэтому $F(T_0) = n(n-1)$, что и доказывает требуемое утверждение.

Докажем, что $\min\limits_T F(T) = n$.

Заметим, что турнир T_1, в котором достигается равенство $F(T_1) = n$, существует. Например, пусть в турнире T_1 каждая команда с номером i выиграла у команды с номером $i + 1$ для $i =$

$= 1, \dots, n-1$, и команда с номером n выиграла у команды с номером 1, а все остальные игры закончились вничью. Тогда у всех команд будет равное количество очков и для того, чтобы i-й команде был вручен главный приз, достаточно дисквалифицировать команду с номером $(i-1)$ (для первой команды нужно дисквалифицировать последнюю). При этом сумма очков у i-й команды не измениться, а у всех остальных команд она уменьшиться по крайней мере на 1, и, следовательно, команда с номером i получит главный приз.

Покажем теперь, что меньшим чем n количеством дисквалификаций обойтись нельзя. Действительно, если в турнире T не оказалось команды, у которой сумма набранных очков строго больше, чем сумма очков любой другой команды, то, очевидно, что $f_i(T) \geqslant 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому в таком турнире $F(T) \geqslant n$. Рассмотрим турнир T, в котором есть команда, которой может быть вручен главный приз. Не нарушая общности, считаем, что это команда с номером n. Тогда, легко видеть, что $f_i(T) \geqslant 1$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому $F(T) \geqslant n-1$. Если бы $F(T) = n-1$, то тогда для всех $i = 1, \dots, n-1$ выполнялось бы равенство $f_i(T) = 1$, т. е. для всех команд, кроме n-й, достаточно дисквалифицировать ровно одну команду. Пусть a_i номер команды, которую нужно дисквалифицировать для того, чтобы вручить главный приз команде с номером i. Нетрудно убедиться в том, что, во-первых, $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$, и, во-вторых, команда a_i проиграла команде с номером n (если $a_i \neq n$). Следовательно, не менее $(n-2)$ команд проиграли команде с номером n и, следовательно, число очков k_n, набранных n-й командой не менее $3(n-2)$. Кроме того, для каждой i-й команды $(i = 1, \dots, n-1)$, число набранных ею очков k_i не менее $k_n - 2$, ибо в противном случае для вручения главного приза i-й команде не хватит дисквалификации только одной команды. Таким образом, в рассматриваемом турнире T общее число набранных командами очков не менее, чем

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n-1} k_i + k_n \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} (k_n - 2) + k_n \geqslant$$

$$\geqslant k_n n - 2(n-1) \geqslant 3(n-2)n - 2(n-1) = 3n^2 - 8n + 2.$$

Максимальное число очков, которые команды могут набрать в однокруговом футбольном турнире равно $3\frac{n(n-1)}{2}$. Легко проверить, что неравентсво $3\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 3n^2 - 8n + 2$ не выполняется ни при одном $n \geqslant 5$. Полученное противоречие показывает, что турнира T, для которого $F(T) = n-1$ не существует. Следовательно, для всех турниров T имеет место неравенство $F(T) \geqslant n$, что и доказывает требуемое утверждение.

11 класс

11.1. Ответ: 9 групп.

Заметим, что числа 11, 13, 17 и 19 не могут использоваться, иначе произведение чисел в группе, содержащей хотя бы одно из этих чисел, не будет полным квадратом. Поэтому в действительности группы могут составляться из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 и 20. Для того чтобы групп было, как можно больше, числа 1, 4, 9, 16 должны составлять отдельные группы (если какое-то из этих чисел входит в группу из двух или более чисел, то его можно исключить из данной группы; произведение оставшихся чисел по-прежнему будет полным квадратом). Посмотрим, сколько групп можно сформировать из оставшихся чисел 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18 и 20. Заметим, что в каждую такую группу должно входить не менее двух чисел, при этом, если число 15 действительно входит в какую-то группу, то всего в эту группу входит не менее трёх чисел (15 в произведении с любым из оставшихся чисел не дает полного квадрата). То же самое можно сказать и о числе 14. Поэтому из указанных двенадцати чисел можно составить не более пяти групп. С другой стороны, как видно из следующего примера, пять групп сотавить можно:

$$6 \cdot 10 \cdot 15 = 30^2, \quad 2 \cdot 7 \cdot 14 = 14^2, \quad 5 \cdot 20 = 10^2, \quad 8 \cdot 18 = 12^2, \quad 3 \cdot 12 = 6^2.$$

Итак, наибольшее количество групп равно 9.

11.2. **а)** Положим $\alpha_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $d = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$, тогда любое α_i можно представить в виде $\alpha_i = \dfrac{P_i}{d}$, где целое $P_i = \dfrac{p_i d}{q_i}$. Поэтому для любого α_i, если оно не является целым числом, будет выполнено

$$\{(d-1)\alpha_i\} = \{d\alpha_i - \alpha_i\} = \{P_i - \alpha_i\} = \{-\alpha_i\} = 1 - \{\alpha_i\}.$$

Следовательно, если $\{\alpha_1\} + \ldots + \{\alpha_n\} < \dfrac{n}{2}$, то $\{(d-1)\alpha_1\} + \ldots + \{(d-1)\alpha_n\} = n - (\{\alpha_1\} + \ldots + \{\alpha_n\}) > \dfrac{n}{2}$. Полученное противоречие доказывает, что по крайней мере одно из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ должно быть целым.

б) Число $\dfrac{n}{2}$ увеличить нельзя. Действительно, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{2}$, то для любого натурального k либо $\{k\alpha_1\} + \ldots + \{k\alpha_n\} = \dfrac{n}{2} < \dfrac{n}{2} + \varepsilon$, либо $\{k\alpha_1\} + \ldots + \{k\alpha_n\} = 0 < \dfrac{n}{2} + \varepsilon$ для любого положительного ε.

11.3. Схему авиарейсов можно представить в виде графа, где вершинам соответствуют города. Если из города A в город B можно перелететь без пересадки и посадки, то соединим A и B линией со стрелкой в соответствующую сторону, в противном случае — нет. Сразу заметим, что если из одного рейса можно пересесть на другой, то это можно сделать и в обратном порядке. Следовательно, если можно добраться от C до D (с пересадками или без), то можно добраться и от D до C. Поскольку через каждый город проходит не менее трёх маршрутов, то в графе для каждой вершины существует не менее 6 (входящих и выходящих в данную вершину) ребер. Кроме того, для каждой вершины число таких дуг чётно (это число называется степенью вершины), и согласно условию задачи никакие две вершины не соединены двумя или более дугами.

Предположим, что утверждение задачи не верно, т. е. существует вершина X, из которой переходя по рёбрам, нельзя попасть в некоторую вершину Y. Рассмотрим множество вершин, в которые всё

же можно попасть из X. Поскольку степень вершины X не меньше 6, то таких вершин не меньше шести. Предположим, что их ровно 6. Это значит, что рассматриваемые 7 вершин соединены рёбрами только между собой и никакая из них не соединена ребром ни с одной из остальных 13 вершин. Тогда между данными 7 вершинами не более $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ рёбер. Поскольку каждое ребро принадлежит ровно одному рейсу, а рейс состоит из 5 ребер, то их количество кратно 5 и, следовательно, не более 20. Но такого количества рёбер между 7 вершинами не достаточно, чтобы степени этих вершин были не меньше 6. Таким образом, вершина X входит по крайней мере в восьмерку вершин, таких, что из X можно добраться до других вершин из данного множества.

Предположим, что в этом наборе (включающем X) ровно 8 вершин. Так как вершин 8, то их степени не больше 7. А так как степени всех вершин четные и не меньше 6, то все они в точности равны 6. Значит, между рассматриваемыми 8 вершинами имеется ровно $\dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$ рёбер. Но это число не делится на 5, и поэтому снова рёбер не более 20, чего также не достаточно, чтобы степени этих вершин были 6. Значит, из X можно добраться по крайней мере в 8 других вершин. Пусть их ровно 8. Тогда между ними и девятой вершиной X не менее $\dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ рёбер и, значит, сужествует не более $\dfrac{36}{5}$, т. е. 7 круговых маршрутов. Но если их ровно 7, то ровно одно из максимально возможного числа рёбер отсутствует и, тем самым, у каких-то двух вершин степени равны 7 (нечётные), что невозможно. Значит таких маршрутов 6 (нетрудно убедиться, что 6 возможно, а меньше — нет). Рассмотрим остальные 11 вершин. Между ними не более $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$ рёбер и, значит, не более 11 маршрутов. В итоге, общее число круговых маршрутов среди всех 20 вершин не более 17, что противоречит условию. Итак, из X можно добраться по крайней мере до 9 других вершин.

Пусть их ровно 9. Тогда, подсчитывая как и раньше, находим, что между ними и десятой вершиной X не более $\dfrac{10 \cdot 8}{2} = 40$ рёбер (максимально возможные степени вершин, которые обязаны быть чётными, в данном слуае равны 8). Тем самым между этими вершинами не более 8 круговых рейса. Между остальными вершинами, которых также 10, максимальное число рейсов такое же. В результате, общее число рейсов н превосходит 16. Снова противоречие. Значит, вершина X соединена ребрами не менее, чем с 10 другими.

Но точно так же, и вершина Y соединена не менее, чем с 10 другими. Значит, найдётся вершина Z, с которой соединена и X и Y. А тогда, очевидно, от X можно добраться до Y, что и требовалось доказать.

11.4. Ответ: можно.

Назовём тело, удовлетворяющее условию задачи, мозырьским. Приведём несколько способов построения такого тела.

Первое решение. Рассмотрим прямой круговой конус K с вершиной C. Пусть S — окружность его основания, а точка O —

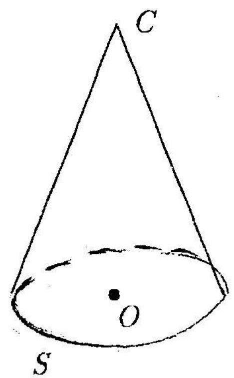


Рис. 1

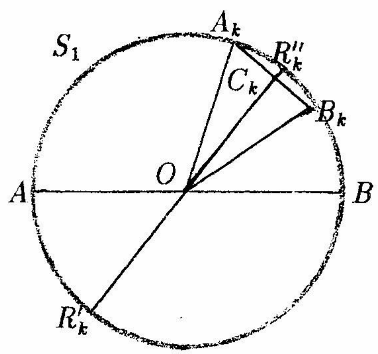


Рис. 2

её центр (рис. 1). Пусть AB — какой-либо диаметр окружности S, а S_1 — одна из определяемых им полуокружностей. Отметим на полуокружности S_1 точки A_k и B_k, $k \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\angle A_kOB = \frac{\pi}{2} \cdot 2^{-2k}$ и $\angle B_kOB = \frac{\pi}{2} \cdot 2^{-2k-1}$. В силу выбора этих углов секторы A_kOB_k (с центральными углами $\frac{\pi}{2} \cdot 2^{-2k-1}$), $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Пусть C_k — середина хорды A_kB_k, а R'_k и R''_k — точки пересечения прямой OC_k с окружностью S (для определённости пусть точка

R''_k принадлежит полуокружности S_1) (см. рис. 2). Ортогональное проектирование на плоскость $CR'_kR''_k$ обозначим через π_k.

Пусть Π_k — плоскость, проходящая через хорду A_kB_k перпендикулярно плоскости основания. Она пересекает боковую поверхность конуса (см. рис. 3) по некоторой кривой Γ_k (эта кривая — парабола,

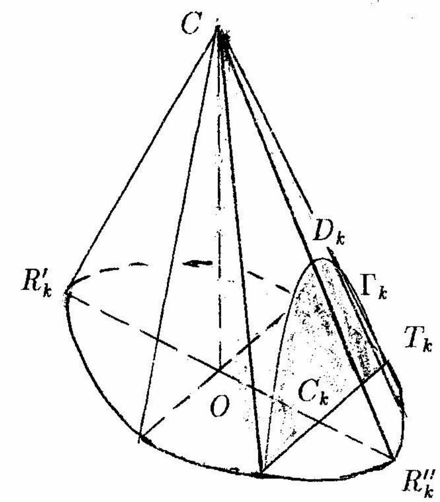


Рис. 3

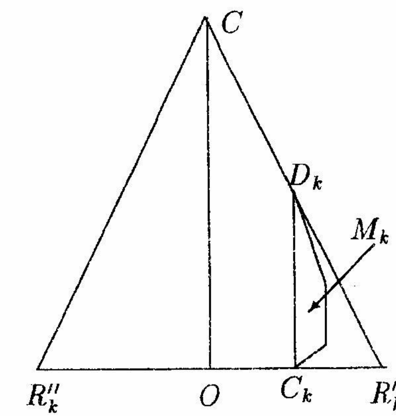


Рис. 4

но для решения этот факт нам не понадобится). Точку пересечения кривой Γ_k и образующей CR''_k обозначим через D_k (отрезок D_kC_k перпендикулярен плоскости основания). Так как плоскости Π_k, $k \in \mathbb{N}$, пересекаются вне конуса (поскольку хорды A_kB_k попарно не пересекаются), то кривые Γ_k, $k \in \mathbb{N}$, также попарно не пересекаются. Плоскость Π_k разбивает конус на два тела; то из них, которое не содержит вершины C, обозначим через T_k.

Отсечём от конуса K и удалим все тела T_k, $k \in \mathbb{N}$. В результате получим некоторое тело T. При проектировании π_k изображением тела T будет четырёхугольник $R''_kCD_kC_k$, а изображением конуса K — треугольник $R''_kCR'_k$ (см. рис. 4). Значит, если мы для каждого $k \in \mathbb{N}$ к телу T на отрезке D_kC_k пристроим выпуклый $(k-1)$-угольник M_k, содержащийся в треугольнике $D_kR'_kC_k$, и обозначим получившуюся фигуру через T^*, то при проектировании π_k изобра-