Так как в этой последовательности ровно пять различных длин, то длина любого из отрезков, измеренных Петей, совпадает с одной из них. Рассмотрим отрезок $b+c$. Его длина меньше четвёртого члена $a+b+c$ последовательности $(\substack{*\\ **})$ и больше её второго члена b. Значит, она равна третьему её члену, т. е. $b+c=a+b$, откуда $c=a$. Тогда длина отрезка $c+d$ равна $2a$, а поскольку $a<2a<a+b$, то эта длина совпадает со вторым членом последовательности $(\substack{*\\ **})$, т. е. $b=2a$. Итак, в подслучае 2а) длины элементарных отрезков необходимо должны быть такими, как показано на рис. 3.

Рис. 3

Обратно, если длины элементарных отрезков такие, как на рис. 3, то попарные расстояния между отмеченными точками, как легко убедиться, равны: a, a, a, $2a$, $2a$, $3a$, $3a$, $4a$, $4a$, $5a$, — среди них действительно ровно пять различных. Наименьшее из них равно a, а наибольшее равно $5a$. Так как по условию $a=1$, то $5a=5$. Подслучай 2а) рассмотрен.

В подслучае 2б) $b<a$ имеем следующие попарно различные длины отрезков

$$b<a<a+b<a+b+c<a+b+c+d. \qquad (\substack{**\\ **})$$

Так как в этой последовательности ровно пять различных длин, то длина любого из отрезков, измеренных Петей, совпадает с одной из них. Рассмотрим отрезок $b+c$. Его длина $b+c$ меньше четвёртого члена $a+b+c$ последовательности $(\substack{**\\ **})$ и больше её первого члена b. Значит, она равна либо третьему $a+b$, либо второму a её членам. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $b+c=a+b$, то $c=a$. Тогда длина отрезка $c+d$ равна $2a$, а значит, так как $b<a$, она больше $a+b$ (третьего члена последовательности $(\substack{**\\ **})$). С другой стороны, длина отрезка $c+d$ меньше длины отрезка $a+b+c+d$ (последнего члена последовательности $(\substack{**\\ **})$). Следовательно, длина $2a$ отрезка $c+d$ совпадает с четвёртым членом последовательности $(\substack{**\\ **})$), т. е. $c+d=a+b+c$, откуда, учитывая равенство $d=a$, получаем $b=0$, что невозможно.

Если же $b+c=a$, то тогда отрезок c, поскольку $c<b+c$, должен совпадать с первым членом последовательности $(\substack{**\\ **})$, т. е. $c=b$, а тогда $a=b+c=2b$. Итак, в этом случае длины элементарных отрезков следующие: $c=b$ и $a=d=2b$. Итак, в подслучае 2б) длины элементарных отрезков необходимо должны быть такими, как показано на рис. 4.

Рис. 4

Обратно, если длины элементарных отрезков такие, как на рис. 4, то попарные расстояния между отмеченными точками, как легко убедиться, равны: b, b, $2b$, $2b$, $2b$, $3b$, $3b$, $4b$, $4b$, $6b$, — среди них действительно ровно пять различных. Наименьшее из них равно b, а наибольшее равно $6b$. Так как по условию $b=1$, то $6b=6$. Случай 2) рассмотрен.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Ответ: $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{10}{5}$.

Пусть $\frac{n}{m}$ – искомая дробь ($n,\ m\in\mathbb{N}$). Тогда, согласно условию, $\frac{n+2}{m-2}=\frac{2n}{m}$, откуда

$$nm+2m=2nm-4n \iff nm-4n-2m=0 \iff$$

$$\iff nm-4n-2m+8=8 \iff (n-2)(m-4)=8.$$

Всего имеется четыре возможности:

1) $n-2=1$, $m-4=8$, откуда $n=3$, $m=12$, т. е. $\frac{n}{m}=\frac{3}{12}$;

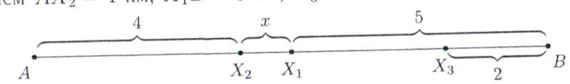
2) $n-2=2$, $m-4=4$, откуда $n=4$, $m=8$, т. е. $\frac{n}{m}=\frac{4}{8}$;

3) $n-2=4$, $m-4=2$, откуда $n=6$, $m=6$, т. е. $\frac{n}{m}=\frac{6}{6}$;

4) $n-2=8$, $m-4=1$, откуда $n=10$, $m=5$, т. е. $\frac{n}{m}=\frac{10}{5}$.

8.6. Ответ: 5 км.

Пусть X_1, X_2 и X_3 – пункты между A и B, в которых произошли первая, вторая и третья встречи соответственно. Тогда, согласно условию, эти пункты расположены так, как показано на рисунке, причём $AX_2=4$ км, $X_1B=5$ км, $X_3B=2$ км.



Обозначим $X_2X_1=x$ км, и пусть V_1, V_2 и V_3 – скорости соответственно первого, второго и третьего гонщиков. Тогда, рассматривая первую и вторую встречи, имеем соответственно:

$$\frac{V_1}{V_3}=\frac{4+x}{5} \quad \text{и} \quad \frac{V_3}{V_2}=\frac{5+x}{4}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(4+x)(5+x)}{20}. \qquad (1)$$

С другой стороны, рассматривая третью встречу, имеем: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4+x+5+2}{4+x+5-2}$, т. е.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{x+11}{x+7}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем

$$\frac{(4+x)(5+x)}{20} = \frac{x+11}{x+7},$$

или

$$(x+4)(x+5)(x+7) = 20(x+11) \iff x^3+16x^2+83x+140 = 20x+220 \iff$$

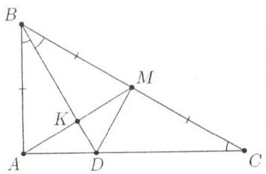
$$\iff x^3+16x^2+63x = 80.$$

Заметим, что левая часть последнего уравнения $f(x) = x^3+16x^2+63x$ является при $x>0$ строго возрастающей функцией (как сумма строго возрастающих функций). Поэтому значение 80 она может принимать не более одного раза. В то же время, легко в видеть, что $f(1) = 80$.

Итак, единственным решением полученного уравнения является $x = 1$. Отсюда следует, что расстояние между A и B равно 10 км, что скорости первого и третьего гонщиков совпадают и что их первая встреча произошла ровно посередине между пунктами A и B, где произойдут и все их последующие встречи, в частности, та встреча, о которой спрашивается в условии задачи. Таким образом, четвёртая встреча (это встреча между первым и третьим гонщиками) произошла на расстоянии 5 км от пункта A.

8.7. Ответ: $30°$, $60°$, $90°$.

Пусть K — точка пересечения AM и BD. Так как по условию $BK \perp AM$ и BK — биссектриса угла ABM, то треугольник ABM равнобедренный и $AB = BM$. Поскольку BD — биссектриса угла ABC и по условию $2\angle ACB = \angle ABC$, то $\angle ABD = \angle DBC = \angle ACB$. Следовательно, треугольник BDC — также равнобедренный, а значит, его медиана DM является и высотой, т.е. $\angle BMD = 90°$. С другой стороны, треугольники ABD и MBD равны, так как имеют общую сторону BD, $AB = BM$ и $\angle ABD = \angle MBD$. Поэтому $\angle BAD = \angle BMD = 90°$. Теперь, пользуясь равенством $2\angle ACB = \angle ABC$, легко находим $\angle ACB = 30°$ и $\angle ABC = 60°$.



8.8. Ответ: 45.

Так как по условию девять вписанных в таблицу чисел попарно различны, то их сумма не менее

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45.$$

Остаётся так вписать натуральные числа от 1 до 9 в таблицу 3×3, чтобы шесть сумм её чисел по строкам и столбцам были попарно различными составными числами — см. любой из рис. 1 – 4.

1	2	3	6
4	8	6	18
9	5	7	21
14	15	16	

Рис. 1

1	5	2	8
3	6	7	16
8	4	9	21
12	15	18	

Рис. 2

2	5	3	10
1	6	7	14
9	4	8	21
12	15	18	

Рис. 3

1	4	3	8
2	6	8	16
7	5	9	21
10	15	20	

Рис. 4

11.8. Ответ: 5 или 6.

Пусть отмеченные точки в порядке следования слева направо — это A, B, C, D и E. Отрезки между соседними из них, т. е. отрезки AB, BC, CD и DE, назовём элементарными. Пусть a, b, c, d — длины элементарных отрезков (см. рис. 1).

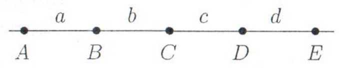


Рис. 1

Найденные Петей длины — это: длины элементарных отрезков a, b, c, d, длины отрезков, образованных соседними элементарными отрезками, $a+b$, $b+c$, $c+d$, длины отрезков, образованных тройками последовательных элементарных отрезков, $a+b+c$, $b+c+d$, и, наконец, длина $a+b+c+d$ всего отрезка между крайними из отмеченных точек. Хотя в дальнейшем и элементарные отрезки и их длины мы обозначаем одними и теми же буквами — a, b, c, d — из контекста будет ясно, о чём идёт речь (о самом отрезке или его длине).

Без нарушения общности будем считать, что $a \leqslant d$ (в противном случае достаточно повернуть прямую на $180°$). Могут представиться только две возможности: либо 1) $a<d$, либо 2) $a=d$. Рассмотрим каждую из них отдельно.

В случае 1) $a<d$ для длин некоторых отрезков имеем неравенства:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} < a+b < a+b+c < b+c+d < a+b+c+d \qquad (*)$$

(первое неравенство символически обозначает тот факт, что $a<a+b$ и $b<a+b$; предпоследнее неравенство справедливо, поскольку равносильно неравенству $a<d$, выполненному в рассматриваемом случае). Видим, что, если $a \neq b$, то в последовательности $(*)$ имелось бы шесть отрезков с попарно различными длинами, чего быть не может. Следовательно, $a=b$. С другой стороны, имеем неравенства

$$a < d < c+d < b+c+d < a+b+c+d. \qquad (**)$$

Так как в последовательности $(*)$ ровно пять различных длин ($a=b$) и в последовательности $(**)$ ровно пять различных длин, а по условию всего различных длин отрезков ровно пять, то соответствующие члены последовательностей $(*)$ и $(**)$ равны. В частности, равны их вторые члены: $a+b=d$, а поскольку $a=b$, то $d=2a$.

Рассмотрим теперь, с каким числом в последовательности $(*)$ совпадает длина $b+c$. Эта длина меньше третьего члена $a+b+c$ этой последовательности и больше её первого члена b. Значит, она равна второму её члену, т. е. $b+c=a+b$, откуда $c=a$. Итак, в случае 1) длины элементарных отрезков необходимо должны быть такими, как показано на рис. 2.

Рис. 2

Обратно, если длины элементарных отрезков такие, как на рис. 2, то попарные расстояния между отмеченными точками, как легко убедиться, равны: a, a, a, $2a$, $2a$, $2a$, $3a$, $3a$, $4a$, $5a$, — среди них действительно ровно пять различных. Наименьшее из них равно a, а наибольшее равно $5a$. Так как по условию $a=1$, то $5a=5$. Случай 1) рассмотрен.

Рассмотрим случай 2) $a=d$. Заметим, что длины элементарных отрезков не могут быть все равны одному и тому же числу (легко убедиться, что в этом случае среди попарных длин между отмеченными точками только четыре различные). Значит, в случае 2) либо $b\neq a$, либо $c \neq a$. Без нарушения общности считаем, что $a\neq b$ (в противном случае достаточно повернуть прямую на $180°$). Могут представиться только два подслучая: либо 2а) $a<b$, либо 2б) $a>b$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

Если $a<b$, имеем следующие попарно различные длины отрезков

$$a < b < a+b < a+b+c < a+b+c+d. \qquad ({*}{*}{*})$$

В случае в), так как первые четыре нечётных составных числа — это 9, 15, 21, 25, а первые два чётных составных числа — это 4 и 6, сумма чисел в шестёрке не менее $4+6+9+15+{}$ $+21+25=84$, а значит, сумма чисел в соответствующей таблице не менее $84:2=42$, что больше уже найденной оценки 27.

Итак, сумма чисел в таблице не менее 27. Для завершения решения остаётся построить 3×3-таблицу, удовлетворяющую условию задачи, с суммой чисел 27, учитывая, что если такая таблица существует, то её суммы по строкам должны быть, как показано выше, равны 4, 8, 15, а по столбцам — равны 6, 9, 12. Зная суммы чисел таблицы по строкам и по столбцам, несложным подбором получаем (см., например, рисунок) нужную таблицу.

1	1	2	4
1	1	6	8
4	7	4	15
6	9	12	

10.7. Пусть ω_1 — описанная окружность треугольника MBK, а ω_2 — описанная окружность треугольника NDL. Так как четырёхугольник $MBDN$ вписанный, то $AM\cdot AB=$ $=AN\cdot AD$ (рис. 1). Пусть прямая AE пересекает окружность ω_1 в точках E и G (рис. 2), а окружность ω_2 в точках E и H (рис. 3). По свойству отрезков секущих $AM\cdot AB=AE\cdot AG$ и $AN\cdot AD=AE\cdot AH$. Значит, $AE\cdot AG=AE\cdot AH$, поэтому $AG=AH$; другими словами, точки G, H и F совпадают, т.е. вершина A принадлежит прямой EF. Аналогично доказывается, что вершина C принадлежит прямой EF.

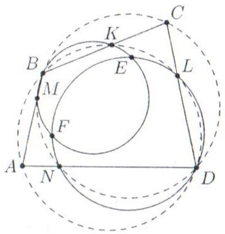


Рис. 1

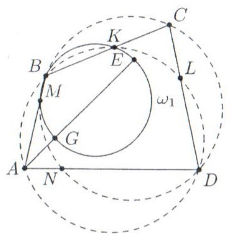


Рис. 2

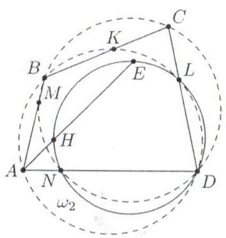


Рис. 3

10.8. Ответ: число 9.

Пусть отмеченные точки в порядке следования слева направо — это A, B, C, D и E. Отрезки между соседними из них, т. е. отрезки AB, BC, CD и DE, назовём элементарными. Пусть a, b, c, d — длины элементарных отрезков (см. рис. 1).

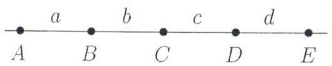


Рис. 1

Докажем, что в записи Пети первых два числа — это два наименьших из чисел a, b, c, d. В самом деле, если бы первое или второе из чисел, записанных Петей, были расстояниями между не соседними отмеченными точками, то эти расстояния равнялись бы сумме длин каких-то последовательных элементарных отрезков, а значит, в записи Пети этим расстояниям должны предшествовать все числа этой суммы, т. е. предшествовать хотя бы два меньших числа, но и первому, и второму из чисел, записанных Петей, предшествует не более одного меньшего его числа. Итак, 2 и 4 — это два наименьших из чисел a, b, c, d, т. е. длины двух меньших элементарных отрезков.

Наибольшее число, записанное Петей, очевидно равно $a+b+c+d$. Следовательно, верно равенство $21=a+b+c+d$, и поэтому сумма двух самых больших из чисел a, b, c, d равна $21-(2+4)=15$.

Далее, для расположения элементарных отрезков длин 2 и 4 могут представиться только две возможности — элементарные отрезки длин 2 и 4: либо 1) соседние, либо 2) не являются соседними. Докажем, что случай 1) места не имеет. Действительно, если бы элементарные отрезки длин 2 и 4 были бы соседними (см. рис. 2), то число 6 в записи Пети — это их сумма, а значит, так как следующее по величине после шестёрки из записанных Петей чисел — это число 8, то длина каждого из двух наибольших элементарных отрезков не менее 8-и. Тогда их сумма не менее 16, что невозможно, поскольку, как показано выше, сумма двух наибольших элементарных отрезков равна 15.

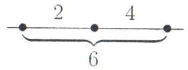


Рис. 2

Таким образом, элементарные отрезки длин 2 и 4 не являются соседними. Но тогда отрезок длины 6 является элементарным. В самом деле, если бы он не был элементарным, то равнялся сумме длин каких-то последовательных элементарных отрезков. Но в эти элементарные отрезки не входит хотя бы один из отрезков 2 или 4 — значит, в записи Пети шестёрке должны были бы предшествовать хотя бы три меньших числа, что не так. Итак, отрезок длины 6 — элементарный, а значит, длина ещё одного элементарного отрезка равна $15-6=9$.

Поскольку элементарные отрезки имеют длины 2, 4, 6 и 9 и среди записанных Петей чисел имеется число 8, то отрезки длин 2 и 6 — соседние ($8=2+6$), а так как отрезки длин 2 и 4 — не соседние, то суммы длин остальных пар соседних отрезков не менее $6+4=10$. Значит, следующим числом после числа 8 Петя записал число 9.

Замечание. Как показано в решении, элементарные отрезки имеют длины 2, 4, 6, 9 и из них отрезки длин 2 и 6 — соседние, а отрезки длин 2 и 4 — не соседние. Из этих утверждений легко вытекает, что расположение элементарных отрезков может быть (с точностью до симметрии) только таким, как показано на следующих четырёх рисунках.

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Для рис. 1 и 2 последовательности выписанных Петей чисел — это соответственно

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 19,\ 21 \quad\text{и}\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,$$

а для рис. 3 и 4 — соответственно

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 17,\ 21 \quad\text{и}\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 21.$$

11.5. Ответ: **б)** все x, такие, что $|x| \geqslant -a$.

а) При $a = 0$ равенство

$$|x-a| + |x+a| - |x| - a = \big||x| - a\big| \qquad (*)$$

очевидно выполняется.

Пусть $a > 0$. Рассмотрим два случая.

1) $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда $|x-a| + |x+a| - |x| - a = -(x-a) + (x+a) - x - a = a - x$ и $\big||x| - a\big| = |x-a| = -(x-a) = a - x$, т. е. равенство $(*)$ выполняется.

2) $x > a$. Тогда $|x-a| + |x+a| - |x| - a = (x-a) + (x+a) - x - a = x - a$ и $\big||x| - a\big| = |x-a| = x - a$, т. е. равенство $(*)$ опять выполняется.

Итак, равенство $(*)$ выполняется при всех $x \geqslant 0$. Заметим теперь, что и левая, и правая части равенства $(*)$ не меняются при замене x на $-x$ (т. е. являются чётными функциями). Поэтому равенство $(*)$ выполняется и при всех отрицательных x. Тем самым, справедливость равенства $(*)$ доказана при всех x.

б) Пусть $a < 0$. Обозначим $a = -b$, тогда $b > 0$. Левая часть равенства $(*)$ равна $|x+b| + |x-b| - |x| + b$, или, что то же самое, $(|x+b| + |x-b| - |x| - b) + 2b$. Так как $b > 0$, выражение в скобках, согласно п. **а)**, равно $\big||x| - b\big|$, и поэтому левая часть равенства $(*)$ равна $\big||x| - b\big| + 2b$. Правая же часть равенства $(*)$ равна $\big||x| - a\big| = \big||x| + b\big| = |x| + b$ (так как $b > 0$). Тогда $(*)$ приобретает вид

$$\big||x| - b\big| + 2b = |x| + b \iff \big||x| - b\big| = |x| - b \iff |x| - b \geqslant 0,$$

т. е. $|x| \geqslant b$, или $|x| \geqslant -a$ — это и есть ответ на вопрос п. **б)**.

11.6. Ответ: 53.

Пусть S — сумма всех чисел таблицы 3×3, а p_1, p_2, p_3 — суммы её чисел по строкам и q_1, q_2, q_3 — по столбцам. Тогда $p_1+p_2+p_3 = S$ и $q_1+q_2+q_3 = S$. Так как по условию вписанные в таблицу числа различны, то каждая из сумм по строкам и по столбцам не меньше $1+2+3 = 6$. Кроме того, по условию p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 — различные простые числа. Поэтому найдём вначале шесть различных простых чисел, не меньших 6-и, с наименьшей суммой, таких, что их можно разбить на две тройки чисел с равными суммами. Сумма чисел в такой тройке и даст оценку снизу для суммы чисел в таблице.

Первые шесть (не меньших 6-и) по величине простых чисел — это

$$7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23. \qquad (*)$$

Несложно видеть, что их нельзя разбить на две тройки с равными суммами. Действительно, сумма всех этих чисел $7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 90$, а значит, если бы их можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, то сумма чисел в каждой тройке равнялась бы $90 : 2 = 45$. Поэтому в той тройке, в которую входит число 23, сумма двух меньших чисел должна быть равна $45 - 23 = 22$. Но непосредственно перебрав все шесть попарных сумм из первых пяти чисел $(*)$, убеждаемся, что ни одна из них не равна 22.

Так как числа $(*)$ не удовлетворяют нужным условиям, то следующим кандидатом на искомую шестёрку простых чисел должна быть шестёрка, составленная из числа 29 (следующим по величине простым после чисел $(*)$) и каких-то пяти из чисел $(*)$. Обозначим через x то число, которое нужно убрать из чисел $(*)$, чтобы оставшиеся пять чисел и число 29 могли

10.5. Ответ: 3-я монетами.

Любое из равенств $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$ или $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ показывает, что трёх монет достаточно. Покажем, что двумя монетами сумму в $\frac{5}{7}$ тугрика составить нельзя. Для этого нужно убедиться, что ни при каких натуральных a и b не выполняется равенство

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \frac{5}{7}ab = a + b \iff 25ab = 35a + 35b \iff$$

$$\iff 25ab - 35a - (35b - 49) = 49 \iff (5a-7)(5b-7) = 49.$$

Последнее равенство означает, что $5a - 7$ является делителем числа 49. Так как $\frac{1}{a} < \frac{5}{7}$, то $5a - 7 > 0$. Значит, либо $5a - 7 = 1$, либо $5a - 7 = 7$, либо $5a - 7 = 49$. Однако, ни одно из этих равенств не выполняется при натуральных a.

10.6. Ответ: 27.

Пусть S — сумма всех чисел таблицы 3×3, а p_1, p_2, p_3 — суммы её чисел по строкам и q_1, q_2, q_3 — по столбцам. Тогда

$$p_1 + p_2 + p_3 = S \quad \text{и} \quad q_1 + q_2 + q_3 = S. \qquad (1)$$

Из равенств (1) получаем, что сумма $p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 + q_3 = 2S$ — число чётное. По условию p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 — различные составные числа. Поэтому найдём вначале шесть различных составных чисел с наименьшей чётной суммой, таких, что их можно разбить на две тройки чисел с равными суммами. Сумма чисел в такой тройке и даст оценку снизу для суммы чисел в таблице.

Так как сумма шести чисел чётна, то среди них чётное число нечётных чисел. Могут представиться только три возможности — среди этих шести чисел: а) нечётных чисел нет, б) имеется ровно два нечётных числа, в) нечётных чисел не менее четырёх.

Рассмотрим случай а). Первые шесть чётных составных чисел — это 4, 6, 8, 10, 12, 14. Легко видеть, что их нельзя разбить на две тройки с равными суммами. Действительно, сумма всех этих чисел $4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 54$, а значит, если бы их можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, то сумма чисел в каждой тройке равнялась бы нечётному числу $54 : 2 = 27$, что для суммы чётных чисел невозможно. Следовательно, в случае а) сумма чисел в шестёрке должна быть не менее $54 + 2 = 56$, а значит, сумма чисел в соответствующей таблице (если такая существует) не менее $56 : 2 = 28$.

Рассмотрим случай б). Первые два нечётных составных числа — это 9 и 15, а первые четыре чётных составных числа — это 4, 6, 8 и 10. Поэтому в случае б) шестёрка с наименьшей суммой — это 4, 6, 8, 9, 10, 15. Несложно видеть, что эти числа нельзя разбить на две тройки с равными суммами. Действительно, сумма всех этих чисел $4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 15 = 52$, а значит, если бы их можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, то сумма чисел в каждой тройке равнялась бы $52 : 2 = 26$. Поэтому в той тройке, в которую входит число 15, сумма двух меньших чисел должна быть равна $26 - 15 = 9$, что, очевидно, невозможно. Следовательно, в случае б) сумма чисел в шестёрке должна быть не менее $52 + 2 = 54$, а значит, сумма чисел в соответствующей таблице (если такая существует) не менее $54 : 2 = 27$. Шестёркой составных чисел с суммой 54 является шестёрка 4, 6, 8, 9, 12, 15. Она разбивается на две тройки с равными суммами: $4 + 8 + 15 = 6 + 9 + 12 = 27$.

остатками при делении на 3, получим таблицу, показанную на рис. 6. Если бы число x давало остаток 2 при делении на 3, то в получившейся шестёрке чисел имели бы (см. рис. 6) три числа с остатком 1 и три числа с остатком 2, а тогда такое же рассуждение, как и выше, показывает, что эту шестёрку нельзя разбить на две тройки чисел с равными суммами. Значит, x даёт остаток 1 при делении на 3. Поэтому x может быть равно только 7, 13 или 19.

число	7	11	13	17	19	23	29
остаток	1	2	1	2	1	2	2

mod 3

Рис. 6

число	7	11	13	17	19	23	29
остаток	3	3	1	1	3	3	1

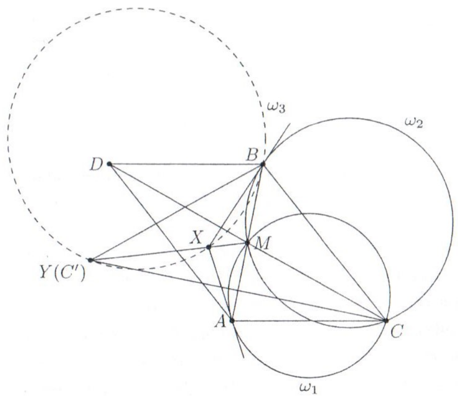
mod 4

Рис. 7

Заменим теперь числа (*) и число 29 их остатками при делении на 4. Получим таблицу, показанную на рис. 7. Если бы число x давало остаток 3 при делении на 4, то в получившейся шестёрке чисел имели бы (см. рис. 7) три числа с остатком 3 и три числа с остатком 1 при делении на 4. Но тогда их сумма делится на 4 (поскольку сумма остатков $3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 12$ делится на 4), а значит, если бы получившихся шесть чисел можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, эта сумма была бы чётна. Но это невозможно, так как сумма трёх простых нечётных чисел нечётна. Поэтому число x может быть равно только 13 или 17.

Итак, число x может быть равно только 7, 13 или 19 и, одновременно, только 13 или 17. Следовательно, $x = 13$. Поэтому искомая шестёрка чисел – это 7, 11, 17, 19, 23, 29. Дальнейшие рассуждения – такие же, как в приведённом решении.

11.7. По свойству угла между хордой и касательной $\angle XBM = \angle BCM$ и $\angle XAB = \angle ACM$. Пусть точка D, лежащая на луче CM, такова, что $ADBC$ – параллелограмм. Тогда $\angle ACM = \angle CDB$. Отсюда следует, что $\triangle AXB \sim \triangle DBC$. Следовательно $\angle CMB = \angle XMB$ (как углы между соответственными медианами и сторонами в подобных треугольниках). Пусть C' – точка, симметричная точке C относительно AB. Докажем, что точки C' и Y совпадают. Действительно, из равенства $\angle CMB = \angle XMB$, следует, что C' лежит на прямой MX. Так как точки C и C' симметричны относительно AB, то $\angle BC'X = \angle BC'M = \angle BCM = \angle XBM$. Значит, описанная окружность $\triangle XC'B$ касается прямой AB в точке B, и поэтому совпадает с окружностью ω_3. Таким образом, точки Y и C' совпадают, откуда и следует, что $CY \perp AB$.



9 класс

9.5. Ответ: 29.

Так как каждое из полученных Васей чисел не менее $1 + 1 + 1 = 3$ и по условию все они различны и являются простыми, то их сумма не менее $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 56$.

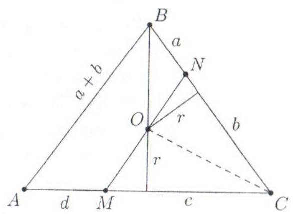
Если S – сумма всех чисел таблицы, то $2S$ – это сумма шести полученных Васей чисел. Значит, $2S \geqslant 56$, т. е. $S \geqslant 28$. Заметим, однако, что все найденные Васей числа – нечётные простые (так как каждое из них не меньше трёх), поэтому сумма S чисел всей таблицы нечётна. Следовательно, $S \geqslant 29$.

1	1	1	3
1	2	4	7
3	8	8	19
5	11	13	

Пример (один из многих) таблицы на рисунке, удовлетворяющей условиям задачи, показывает, что эта сумма может равняться 29.

9.6. Ответ: 5 см.

Обозначим $a = BN$, $b = NC$, $c = MC$, $d = AM$. Пусть r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности, а точка O – её центр. Так как по условию треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$), то $AB = BC = BN + NC = a + b$. Тогда площади $S(ABC)$ и $S(MNC)$ треугольников ABC и MNC равны:



$$S(ABC) = 0,5r((a + b) + (a + b) + (d + c)),$$

$$S(MNC) = 0,5r(b + c)$$

(второе из равенств следует из того факта, что радиус r вписанной окружности является высотой в треугольниках MOC и NOC, опущенной из вершины O на стороны MC и NC соответственно). Согласно условию $S(ABC) = S(ABNM) + S(MNC) = 2S(MNC)$, т. е. $S(ABNM) = S(MNC)$, или $2a + 2b + c + d = 2b + 2c$. Поэтому

$$2a + d = c. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$S(ABC) = 0,5(a + b)(c + d)\sin\angle BCA \quad \text{и} \quad S(MNC) = 0,5bc\sin\angle BCA.$$

Поэтому из равенства $S(ABC) = 2S(MNC)$ следует, что $(a+b)(c+d) = 2bc$, откуда, с учётом (1), получаем

$$(a + b)((2a + d) + d) = 2b(2a + d) \iff (a + b)(a + d) = b(2a + d) \iff$$

$$\iff a^2 + ad + ab + bd = 2ab + bd \iff a^2 + ad = ab,$$

и так как $a \neq 0$, то $a + d = b$, что, учитывая (1), даёт $c - a = b$, т.е. $c = a + b$. Таким образом, $MC = c = a + b = AB = 5$ (см.).

9.7. Ответ: 8, 8, 10.

Пусть отмеченные точки в порядке следования слева направо – это A, B, C, D и E. Отрезки между соседними из них, т. е. отрезки AB, BC, CD и DE, назовём элементарными. Пусть a, b, c, d – длины элементарных отрезков (см. рис. 1).

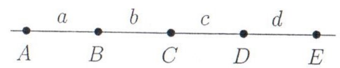


Рис. 1

Докажем, что в записи Пети первых два числа – это два наименьших из чисел a, b, c, d. В самом деле, если бы первое или второе из чисел, записанных Петей, были расстояниями между не соседними отмеченными точками, то эти расстояния равнялись бы сумме длин каких-то последовательных элементарных отрезков, а значит, в записи Пети этим расстояниям должны предшествовать все числа этой суммы, т. е. предшествовать хотя бы два меньших числа, но и первому, и второму из чисел, записанных Петей, предшествует не более одного меньшего его числа. Итак, 2 и 3 — это два наименьших из чисел a, b, c, d, т. е. длины двух меньших элементарных отрезков.

Наибольшее число, записанное Петей, очевидно, равно $a+b+c+d$. Следовательно, верно равенство $21 = a+b+c+d$, и поэтому сумма двух самых больших из чисел a, b, c, d равна $18-(2+3) = 13$. Поэтому наименьшее из этих двух наибольших длин элементарных отрезков не более $13 : 2 = 6,5$, а значит, должно быть равно 5, поскольку в записи Пети других чисел, удовлетворяющих этому условию, нет. Следовательно, длина оставшегося четвёртого элементарного отрезка равна $18-(2+3+5) = 8$. Итак, длины (2, 3, 5 и 8) элементарных отрезков найдены. Остаётся выяснить их взаимное расположение на прямой.

Элементарные отрезки длин 2 и 3 не являются соседними, иначе бы в записи Пети присутствовало бы ещё одно число $2+3 = 5$, а имеется только одно число 5 — длина элементарного отрезка. Элементарный отрезок длины 2 не является крайним (т. е. $a \neq 2$ и $d \neq 2$), поскольку в противном случае в записи Пети должно было бы присутствовать число $18-2 = 16$, а такого числа (оно должно было бы располагаться между 15 и 18) нет. Точно так же, элементарный отрезок длины 5 не является крайним, поскольку числа $18-5 = 13$ (оно должно было бы располагаться между 10 и 15) в записи Пети нет. Из этих утверждений получаем, что взаимное расположение элементарных отрезков (с точностью до поворота отрезка на $180°$) такое, как показано на рис. 2. Теперь легко выписать в порядке неубывания все попарные расстояния между отмеченными точками: 2, 3, 5, 7, 8, 8, 10, 10, 15, 18, а значит, стёршимися числами являлись числа 8, 8, 10.

Рис. 2

9.8. Ответ : 3 -я монетами.

Равенство $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ (или другое равенство $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$) показывает, что трёх монет достаточно. Покажем, что двумя монетами сумму в $\frac{4}{5}$ тугрика составить нельзя. Это равносильно тому, что равенство $\frac{4}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не выполняется ни при каких натуральных a и b. Действительно,

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \frac{4}{5}ab - a - b = 0 \iff 16ab - 20a - 20b = 0 \iff$$

$$\iff 16ab - 20a - (20b - 25) = 25 \iff (4a-5)(4b-5) = 25.$$

Заметим, что $\frac{1}{a} < \frac{4}{5}$, т. е. $a > \frac{5}{4}$, и, значит, делитель $4a-5$ числа 25 положителен. Поэтому либо $4a-5 = 1$, либо $4a-5 = 5$, либо $4a-5 = 25$. Но ни одно из этих равенств не выполняется при натуральных a.

удовлетворять нужным условиям. Число x не может совпадать ни с одним из чисел 7, 11, 19 и 23, поскольку тогда сумма оставшихся пяти чисел и числа 29 равна соответственно 112, 108, 100 и 96, а значит, если бы получившихся шесть чисел можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, эта сумма равнялась бы соответственно 56, 54, 50 и 48 и была бы чётна. Но это невозможно, так как сумма трёх простых нечётных чисел нечётна. Поэтому число x равно только либо 17, либо 13.

Покажем, что число x не может равняться 17. В самом деле, сумма чисел

$$7,\ 11,\ 13,\ 19,\ 23,\ 29. \qquad (**)$$

равна 102, а значит, если бы их можно было разбить на две тройки чисел с равными суммами, то сумма чисел в каждой тройке равнялась бы $102 : 2 = 51$. Поэтому в той тройке, в которую входит число 29, сумма двух меньших чисел должна быть равна $51 - 29 = 22$. Значит, эти два числа принадлежат первым четырём из чисел $(**)$, но, как уже проверено выше, сумма никаких двух из них не равна 22. Следовательно, $x = 13$. И действительно, шестёрка чисел 7, 11, 17, 19, 23, 29 удовлетворяет нужному условию: $7+17+29 = 11+19+23 = 53$. Таким образом, сумма S чисел таблицы не менее 53.

1	2	4	7
5	3	9	17
13	6	10	29
19	11	23	

Рис. 1

1	2	4	7
3	5	9	17
7	12	10	29
11	19	23	

Рис. 2

1	2	4	7
3	8	6	17
7	9	13	29
11	19	23	

Рис. 3

1	2	4	7
3	8	6	17
7	13	9	29
11	23	19	

Рис. 4

Для завершения решения остаётся построить 3×3 -таблицу, удовлетворяющую условию задачи, с суммой чисел 53, учитывая, что если такая таблица существует, то её суммы по строкам должны быть равны 7, 17, 29, а по столбцам — равны 11, 19, 23. Зная суммы чисел таблицы по строкам и по столбцам, несложным подбором получаем нужную таблицу (см., например, любой из рис. 1 — 4).

В дополнение к данному решению приведём рассуждение, позволяющее „вычислить“ нужную шестёрку простых чисел без подсчёта сумм чисел и некоторого перебора.

Рассмотрим шестёрку чисел $(*)$ и докажем, что их нельзя разбить на две тройки с равными суммами. Заменяя числа $(*)$ их остатками при делении на 3, получим таблицу, показанную на рис. 5. Сумма всех чисел $(*)$ делится на 3 (поскольку сумма их остатков $1+2+1+2+1+2 = 9$ делится на 3). Поэтому, если сумма каких-то трёх из чисел $(*)$ даёт остаток i при делении на 3, то сумма остальных трёх — остаток $3-i$, а значит, эти суммы не могут быть равны, если $i \neq 0$. Следовательно, если числа $(*)$ можно разбить на две тройки чисел с равными суммами, то только в случае, когда эти суммы делятся на 3. Сумма же трёх из чисел $(*)$ делится на 3, если только все три числа имеют одинаковые остатки при делении на 3. Но сумма чисел с остатком 1 меньше суммы чисел с остатком 2 (см. рис. 5). Поэтому шестёрку чисел $(*)$ нельзя разбить на две тройки чисел с равными суммами, а значит, следующим кандидатом на искомую шестёрку простых чисел должна быть шестёрка, составленная из числа 29 (следующим по величине простым после чисел $(*)$) и каких-то пяти из чисел $(*)$.

число	7	11	13	17	19	23
остаток	1	2	1	2	1	2

mod 3

Рис. 5

Обозначим через x то число, которое нужно убрать из чисел $(*)$, чтобы оставшиеся пять чисел и число 29 могли удовлетворять нужным условиям. Заменяя числа $(*)$ и число 29 их

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

11 класс

Второй день

5. а) Докажите, что если $a \geqslant 0$, то для любого действительного числа x выполняется равенство $|x-a|+|x+a|-|x|-a=\big||x|-a\big|$.

б) Для каждого $a<0$ найдите все x, для которых выполняется указанное в п. **а)** равенство.

6. В клетки таблицы 3×3 вписаны попарно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными простыми числами.

Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы ?

7. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC, а ω_1 и ω_2 – описанные окружности треугольников AMC и BMC соответственно. Касательная к ω_1, проходящая через A, пересекает касательную к ω_2, проходящую через B, в точке X. Окружность ω_3 касается прямой AB в точке B и проходит через X. Прямая MX пересекает окружность ω_3 в точках X и Y.

Докажите, что $CY\perp AB$.

8. На прямой отмечено пять точек. Петя измерил все десять попарных расстояний между ними. Оказалось, что среди этих расстояний только пять различных.

Какой может быть наибольшая из найденных Петей длин отрезков, если наименьшая из них равна 1 ?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

10 класс

Второй день

5. У Маши есть бесконечно много монет, причём для каждого натурального n у неё есть ровно по одной монете достоинством $\frac{1}{n}$ тугрика. Монет других достоинств у Маши нет.

Каким наименьшим количеством монет Маша может оплатить (без сдачи) набор для шитья стоимостью $\frac{5}{7}$ тугрика?

6. В клетки таблицы 3×3 вписаны не обязательно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными составными числами.

Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы?

7. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник. Описанная вокруг треугольника ABD окружность пересекает отрезки BC и DC в точках K и L соответственно. Описанная вокруг треугольника BDC окружность пересекает отрезки AB и AD в точках M и N соответственно. Описанные около треугольников MBK и NDL окружности пересекаются в точках E и F.

Докажите, что точки E и F лежат на прямой AC.

8. На прямой отмечено пять точек. Петя измерил все десять попарных расстояний между ними и записал их значения на листке бумаги в порядке неубывания (среди записанных им чисел могли быть и равные – если длины каких-то разных отрезков равны). С течением времени некоторые из записанных Петей чисел стёрлись, и на листке сохранились только четыре первых и последнее из записанных им чисел: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 21$.

Какое число записал Петя следующим после числа 8?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов.

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

9 класс

Второй день

5. В клетки таблицы 3×3 вписаны не обязательно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными простыми числами.

Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы ?

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) через центр вписанной в него окружности проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке M и сторону BC в точке N. Оказалось, что площадь треугольника MNC равна площади четырёхугольника $ABNM$.

Найдите длину отрезка MC, если $AB = 5$ см.

7. На прямой отмечено пять точек. Петя измерил все десять попарных расстояний между ними и записал их значения на листке бумаги в порядке неубывания (среди записанных им чисел могли быть и равные – если длины каких-то разных отрезков равны). С течением времени некоторые из записанных Петей чисел стёрлись, и на листке сохранились только четыре первых и три последних из записанных им чисел: $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 10,\ 15,\ 18$.

Восстановите стёршиеся числа.

8. У Миши есть бесконечно много монет, причём для каждого натурального n у него есть ровно по одной монете достоинством $\dfrac{1}{n}$ тугрика. Монет других достоинств у Миши нет.

Каким наименьшим количеством монет Миша может оплатить (без сдачи) шоколадку стоимостью $\dfrac{4}{5}$ тугрика?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

8 класс

Второй день

5. Найдите все (не обязательно несократимые) дроби, числитель и знаменатель которых – натуральные числа, обладающие следующим свойством: если числитель дроби увеличить на 2, а знаменатель уменьшить на 2, то дробь увеличится в 2 раза.

6. Три велогонщика курсируют с постоянными скоростями между пунктами A и B. Каждый из гонщиков, доехав до крайнего пункта, разворачивается и движется в обратном направлении до другого крайнего пункта, где снова разворачивается и продолжает движение в обратную сторону, и т. д. Гонщики начали движение одновременно, причём первый и второй выехали из пункта A, а третий – из пункта B. Первыми встретились первый и третий гонщики на расстоянии 5 км от B, затем встретились второй и третий гонщики на расстоянии 4 км от A, третья встреча произошла между первым и вторым гонщиками на расстоянии 2 км от B.

На каком расстоянии от A произошла четвёртая встреча?

7. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BD.

Найдите углы треугольника ABC, если величина угла ABC в два раза больше величины угла ACB.

8. В клетки таблицы 3×3 вписаны попарно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными составными числами.

Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы ?

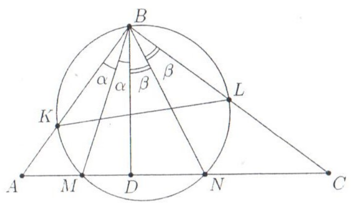
Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

Поскольку n — целое число, то единственным n, удовлетворяющем последнему неравенству, является $n=-1$, однако тогда $a=1$, что противоречит неравенству $a<1$. Следовательно, в случае 4) не существует действительных чисел x, удовлетворяющих исходному равенству.

Таким образом, искомое множество решений – это $x \in [-2/3; -1/2) \bigcup (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

10.2. Ответ: $KL = 4\sqrt{2}$.

Обозначим углы: $\alpha = \angle ABM = \angle MBD$ и $\beta = \angle CBN = \angle NBD$. Тогда $\angle ABC = 2(\alpha+\beta) = 90^\circ$. По теореме Пифагора гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC равна $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$, т.е. $AC = 10$.



Так как $\angle BMC = \angle BMD = 90^\circ - \angle DBM = 2(\alpha+\beta) - \alpha = \alpha + 2\beta = \angle MBC$, то треугольник BCM равнобедренный и $MC = BC = 8$. Аналогично получаем: $\angle BNA = \angle BND = 90^\circ - \angle NBD = 2(\alpha+\beta) - \beta = 2\alpha + \beta = \angle ABN$, и, следовательно, треугольник ANB равнобедренный и $AN = AB = 6$. Поэтому $MN = AN + MC - AC = 6 + 8 - 10 = 4$.

Из треугольника MBN по теореме синусов находим

$$2R = MN/\sin\angle MBN = MN/\sin(\alpha+\beta) = 4/\sin 45^\circ = 4\sqrt{2},$$

где R — радиус описанной вокруг треугольника MBN окружности. Но так как угол KBL прямой, то он опирается на диаметр этой окружности, т.е. $KL = 2R = 4\sqrt{2}$.

10.3. *Первое решение.* Обозначим $f(x) = ax^2 + bx + c$. Заметим, что

$$f(-2) = 4a - 2b + c, \quad f(2) = 4a + 2b + c \quad \text{и} \quad f(1) = a + b + c.$$

Почленно складывая эти равенства и учитывая равенство из условия задачи, получим

$$f(-2) + f(2) + f(1) = 0. \tag{$*$}$$

Если среди значений $f(-2)$, $f(2)$ или $f(1)$ имеется хотя бы одно нулевое, то утверждение задачи верно. Если же все они ненулевые, то вследствие равенства $(*)$ среди них найдутся два разного знака. Другими словами, квадратный трёхчлен $f(x)$ на отрезке $[-2;2]$ принимает значения разных знаков, а значит, он на этом отрезке имеет корень.

Второе решение. Без нарушения общности рассуждений далее считаем, что $a>0$. В противном случае достаточно умножить данный трёхчлен на -1, от чего его корни не изменятся, а у получившегося квадратного трёхчлена коэффициент при старшем члене станет положительным, и его коэффициенты также будут удовлетворять тому же соотношению из условия задачи.

Согласно условию задачи $b = -9a - 3c$. Поэтому дискриминант D данного квадратного трёхчлена равен

$$D = b^2 - 4ac = (-9a - 3c)^2 - 4ac = 81a^2 + 50ac + 9c^2. \tag{1}$$

Так как $D \geqslant 0$ при любых a и c (поскольку $50^2 - 4\cdot 81\cdot 9 < 0$ и $81 > 0$), то у квадратного трёхчлена из условия задачи есть действительные корни:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{9a + 3c - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{9a + 3c + \sqrt{D}}{2a}. \tag{2}$$

Докажем, что меньший его корень x_1 не превосходит 2. Неравенство $x_1 \leqslant 2$ вследствие первого равенства в (2) и неравенства $a>0$ равносильно неравенству

$$5a + 3c \leqslant \sqrt{D}. \tag{3}$$

Неравенство (3), если $5a+3c \leqslant 0$, очевидно, верно. Докажем, что оно верно и если $5a+3c>0$, т. е. если $-c/a < 5/3$. В этом случае, возводя обе части неравенства (3) в квадрат и учитывая представление (1), получаем равносильное неравенство $56a^2 + 20ac \geqslant 0$, или $14a + 5c \geqslant 0$, т. е. $-c/a \leqslant 14/5$. Но последнее неравенство верно, поскольку в рассматриваемом случае $-c/a < 5/3$, а $5/3 < 14/5$. Итак, $x_1 \leqslant 2$.

Точно так же доказывается, что $x_2 \geqslant -2$. В самом деле, неравенство $x_2 \geqslant -2$ вследствие второго равенства в (2) и неравенства $a>0$ равносильно неравенству

$$-13a - 3c \leqslant \sqrt{D}. \tag{4}$$

Неравенство (4), если $-13a - 3c \leqslant 0$, очевидно, верно. Докажем, что оно верно и в случае $-13a - 3c > 0$, т. е. если $-c/a > 13/3$. В этом случае, возводя обе части неравенства (4) в квадрат и учитывая представление (1), получаем равносильное неравенство $88a^2 + 28ac \leqslant 0$, или $22a + 7c \leqslant 0$, т. е. $-c/a \geqslant 22/7$. Но последнее неравенство верно, поскольку в рассматриваемом случае $-c/a > 13/3$, а $13/3 > 22/7$. Итак, $x_2 \geqslant -2$.

Докажем теперь, что данный квадратный трёхчлен имеет корень на отрезке $[-2;2]$. Допустим противное: на отрезке $[-2;2]$ у него корней нет. Это предположение (поскольку, как доказано выше, $x_1 \leqslant 2$ и $x_2 \geqslant -2$) равносильно тому, что $x_1 < -2$ и $x_2 > 2$. Другими словами, вследствие представлений (2) должны быть одновременно выполнены неравенства

$$-\frac{9a + 3c - \sqrt{D}}{2a} > 2 \quad \text{и} \quad \frac{9a + 3c + \sqrt{D}}{2a} > 2,$$

или, равносильно, неравенства

$$\sqrt{D} > 13a + 3c \quad \text{и} \quad \sqrt{D} > -5a - 3c. \tag{5}$$

Стандартным образом, для доказательства того, что система уравнений (5) несовместна, рассмотрим четыре случая, определяемых знаками правых частей неравенств (5):

$$1)\ \begin{cases} 13a + 3c < 0, \\ -5a - 3c < 0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 13a + 3c \geqslant 0, \\ -5a - 3c < 0, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 13a + 3c < 0, \\ -5a - 3c \geqslant 0, \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 13a + 3c \geqslant 0, \\ -5a - 3c \geqslant 0. \end{cases}$$

Случай 1) невозможен, поскольку складывая почленно неравенства системы 1), получим неверное неравенство $a < 0$.

В случае 2), возводя первое неравенство в (5) в квадрат, получим (все необходимые вычисления уже проделаны при возведении в квадрат неравенства (4)) равносильное неравенство $22a + 7c < 0$, или $-c/a > 22/7$. Но это неравенство противоречит второму неравенству $-c/a < 5/3$ системы 2), поскольку $5/3 < 22/7$.

В случае 3), возводя второе неравенство в (5) в квадрат, получим (все необходимые вычисления уже проделаны при возведении в квадрат неравенства (3)) равносильное неравенство $14a + 5c > 0$, или $-c/a < 14/5$. Но это неравенство противоречит второму неравенству $-c/a > 13/3$ системы 3), поскольку $13/3 > 14/5$.

В случае 4), возводя оба неравенства (5) в квадрат, получим, как показано при рассмотрении случаев 2) и 3), равносильные неравенства $-c/a > 22/7$ и $-c/a < 14/5$. Но одновременное выполнение этих неравенств невозможно, поскольку $14/5 < 22/7$.

Таким образом, система неравенств (5) несовместна, а значит, квадратный трёхчлен из условия задачи имеет корень на отрезке $[-2;2]$.

Третье решение. Так же, как и во втором решении, показываем, что у данного квадратного трёхчлена есть действительные корни.

Поскольку $a \neq 0$, то, разделив равенство из условия задачи на a, получим равенство

$$9 + \frac{b}{a} + 3\frac{c}{a} = 0. \qquad (1)$$

Согласно прямой теореме Виета для корней x_1 и x_2 данного квадратного трёхчлена верны равенства

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Заменяя в равенстве (1) величины b/a и c/a согласно равенствам (2), получим равенство

$$9 - x_1 - x_2 + 3x_1x_2 = 0.$$

Это равенство, очевидно, равносильно равенству

$$\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)\left(x_2 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{9}. \qquad (3)$$

Допустим, что, без нарушения общности, корень x_2 не принадлежит отрезку $[-2;2]$. Докажем, что тогда этому отрезку принадлежит корень x_1. Если $x_2 \notin [-2;2]$, то могут представиться только две возможности: либо а) $x_2 > 2$, либо б) $x_2 < -2$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

В случае а) $x_2 - \frac{1}{3} > \frac{5}{3}$, а значит, из равенства (3) заключаем, что $x_1 - \frac{1}{3} < 0$, т. е. $x_1 < \frac{1}{3}$, а также что $\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{5}{3} > -\frac{26}{9}$, откуда $x_1 > -\frac{7}{5}$. Итак, в случае а) имеем двойное неравенство $-\frac{7}{5} < x_1 < \frac{1}{3}$, в частности, $x_1 \in [-2;2]$.

В случае б) $x_2 - \frac{1}{3} < -\frac{7}{3}$, а значит, из равенства (3) заключаем, что $x_1 - \frac{1}{3} > 0$, т. е. $x_1 > \frac{1}{3}$, а также что $\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot -\frac{7}{3} > -\frac{26}{9}$, откуда $x_1 < \frac{11}{7}$. Итак, в случае б) имеем двойное неравенство $\frac{1}{3} < x_1 < \frac{11}{7}$, в частности, $x_1 \in [-2;2]$.

10.4. Ответ: два шестиугольника.

Пусть d_3, d_4, d_5, d_6 – количества получившихся в результате разрезания тре-, четырёх-, пяти- и шестиугольников, а d - число тех многоугольников, число сторон которых не меньше семи. Согласно условию $d_3 = 6$ и $d_5 \geqslant 1$, а про остальные из этих чисел в условии ничего не сказано. Во введённых обозначениях число всех получившихся многоугольников равно

$$k = d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d.$$

Сумма же S углов этих многоугольников (поскольку сумма углов тре-, четырёх-, пяти- и шестиугольника равна соответственно $180°$, $360°$, $540°$, $720°$, а сумма углов многоугольника с числом сторон, не меньшим семи, не менее $900°$) не менее

$$S \geqslant d_3 \cdot 180° + d_4 \cdot 360° + d_5 \cdot 540° + d_6 \cdot 720° + d \cdot 900° = (d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + 5d) \cdot 180°. \quad (*)$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство $24 + 5x \leqslant 27 + 4x$, откуда $x \leqslant 3$. Итак, пятиугольников не более трёх.

Остаётся привести пример, показывающий, что пятиугольников действительно может быть ровно 3 (см. любой из рис. 4 – 6 первого решения).

10 класс

10.1. Ответ: $x \in [-2/3; -1/2) \bigcup (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Пусть $[x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\{x\} = a$, $0 \leqslant a < 1$. Тогда $x = n + a$. В зависимости от возможных значений a рассмотрим следующие четыре случая 1) – 4).

1) $0 \leqslant a < 1/3$. Тогда $0 \leqslant 2a < 2/3$, $0 \leqslant 3a < 1$. Поэтому $\{2x\} = \{2n + 2a\} = \{2a\} = 2a$ и $[3x] = [3n + 3a] = 3n$, а значит, исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{2a}{3n}.$$

Очевидно, что это равенство выполнено тогда и только тогда, когда $a = 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) $1/3 \leqslant a < 1/2$. Тогда $2/3 \leqslant 2a < 1$, $1 \leqslant 3a < 3/2$. Поэтому $\{2x\} = \{2n + 2a\} = \{2a\} = 2a$ и $[3x] = [3n + 3a] = 3n + 1$, а значит, исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{2a}{3n + 1}.$$

Сокращая это равенство на a (в рассматриваемом случае $a \neq 0$), получим $2n = 3n + 1$, или $n = -1$. Следовательно, исходному равенству удовлетворяют все $x \in [-2/3; -1/2)$, и только они.

3) $1/2 \leqslant a < 2/3$. Тогда $1 \leqslant 2a < 4/3$, $3/2 \leqslant 3a < 2$. Поэтому $\{2x\} = \{2n + 2a\} = \{2a\} = 2a - 1$ и $[3x] = [3n + 3a] = 3n + 1$, а значит, исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{2a - 1}{3n + 1} \iff 3na + a = 2na - n \iff (n + 1)a = -n.$$

Так как $n = -1$ не удовлетворяет последнему равенству ни при каких a, то $a = -n/(n + 1)$. Далее,

$$\frac{1}{2} \leqslant a \iff \frac{1}{2} \leqslant -\frac{n}{n + 1} \iff \frac{3n + 1}{2(n + 1)} = \frac{1}{2} + \frac{n}{n + 1} \leqslant 0 \iff -1 < n \leqslant -1/3.$$

Поскольку n – целое число, то, следовательно, в случае 3) не существует действительных чисел x, удовлетворяющих исходному равенству.

4) $2/3 \leqslant a < 1$. Тогда $4/3 \leqslant 2a < 2$, $2 \leqslant 3a < 3$. Поэтому $\{2x\} = \{2n + 2a\} = \{2a\} = 2a - 1$ и $[3x] = [3n + 3a] = 3n + 2$, а значит, исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{2a - 1}{3n + 2} \iff 3na + 2a = 2na - n \iff (n + 2)a = -n.$$

Так как $n = -2$ не удовлетворяет последнему равенству ни при каких a, то $a = -n/(n + 2)$. Далее,

$$\frac{2}{3} \leqslant a \iff \frac{2}{3} \leqslant -\frac{n}{n + 2} \iff \frac{5n + 4}{2(n + 2)} = \frac{2}{3} + \frac{n}{n + 2} \leqslant 0 \iff -2 < n \leqslant -4/5.$$

ков отмечены дужками), либо увеличивается на 180° (если разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника — см. рис. 2, на котором углы, которые добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо вообще не изменяется (если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 3). Так как было сделано $6 + x$ разрезов и после каждого из них сумма углов увеличивается не более чем на 360°, то сумма S углов получившихся многоугольников удовлетворяет оценке

$$S \leqslant 180^\circ + (6 + x) \cdot 360^\circ = (13 + 2x) \cdot 180^\circ.$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство

$$(10 + 3x) \cdot 180^\circ \leqslant (13 + 2x) \cdot 180^\circ, \quad \text{или} \quad 10 + 3x \leqslant 13 + 2x,$$

откуда $x \leqslant 3$. Итак, пятиугольников не более трёх.

Остаётся привести пример таких прямолинейных разрезаний треугольника и его частей, после которых получится в точности три треугольника, четыре четырёхугольника и два пятиугольника. Указанные разрезания можно сделать многими различными способами — некоторые из них показаны на рис. 4 — 6.

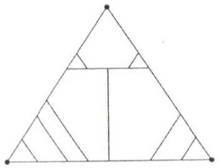


Рис. 4

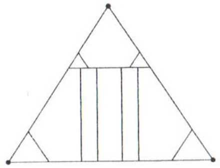


Рис. 5

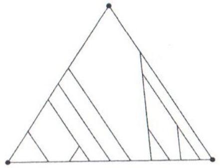


Рис. 6

Второе решение. Пусть x — число получившихся пятиугольников. Согласно условию всего многоугольников получилось $4 + 3 + x = 7 + x$, а общее число B вершин этих многоугольников равно

$$B = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + x \cdot 5 = 24 + 5x. \qquad (*)$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, было сделано $(7 + x) - 1 = 6 + x$ разрезов. Далее, после каждого разрезания общее число вершин у имеющихся многоугольников увеличивается либо на 4, либо на 3, либо на 2. В самом деле, если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника (см. рис. 1, на котором вершины, которые после разрезания добавляются к вершинам многоугольников, отмечены жирными точками), то к вершинам многоугольников добавляется 4 вершины: каждая из отмеченных на рис. 1 вершин считается дважды — как вершина одного и как вершина другого из многоугольников разрезания. Если же разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника (см. рис. 2, на котором вершины, которые после разрезания добавляются к вершинам многоугольников, отмечены жирными точками), то, как и выше, к вершинам многоугольников добавляется 4 вершины, но общая сумма вершин увеличивается только на 3, поскольку та вершина, через которую проходит разрез, сама из общего числа вершин получающих многоугольников исключается, а значит, в подсчёте не участвует. Наконец, если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника (см. рис. 3), то аналогично предыдущему заключаем, что общее число вершин увеличивается на 2. Так как было сделано $6 + x$ разрезов и после каждого из них общее число вершин увеличивается не более чем на 4, то для общего числа B вершин получившихся многоугольников имеем оценку

$$B \leqslant 3 + (6 + x) \cdot 4 = 27 + 4x.$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, всего было сделано $k - 1$ разрезов. Далее, после каждого разрезания сумма углов у имеющихся многоугольников: либо увеличивается на 360° (если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 1, на котором углы, которые после разрезания добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо увеличивается на 180° (если разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника — см. рис. 2, на котором углы, которые добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо вообще не изменяется

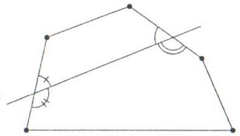


Рис. 1

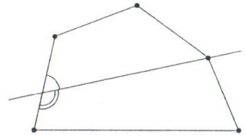


Рис. 2

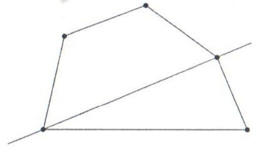


Рис. 3

(если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 3). Так как было сделано $k - 1$ разрезов и после каждого из них сумма углов увеличивается не более чем на 360°, то сумма S углов получившихся многоугольников удовлетворяет оценке

$$S \leqslant 180^\circ + (k - 1) \cdot 360^\circ = (2k - 1) \cdot 180^\circ = \big(2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d) - 1\big) \cdot 180^\circ.$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство

$$(d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + 5d) \cdot 180^\circ \leqslant \big(2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d) - 1\big) \cdot 180^\circ,$$

или

$$d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + 5d \leqslant 2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d) - 1,$$

откуда (члены с d_4 взаимно уничтожаются) получаем

$$2d_6 \leqslant d_3 - d_5 - 3d - 1. \qquad (**)$$

Так как $d_3 = 6$, $d_5 \geqslant 1$ и $d \geqslant 0$, то оценка $(**)$ влечёт оценку $2d_6 \leqslant 6 - 1 - 1 = 4$, а значит, $d_6 \leqslant 2$. Итак, шестиугольников не более двух.

Остаётся привести пример таких прямолинейных разрезаний треугольника и его частей, после которых получится в точности шесть треугольников, не менее одного пятиугольника и ровно два шестиугольника. Указанное разрезание можно сделать многими различными способами — некоторые из них показаны на рис. 4 и 5.

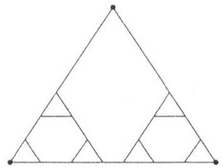


Рис. 4

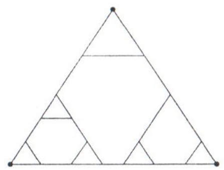


Рис. 5

Другое доказательство неравенства $d_6 \leqslant 2$ может быть проведено аналогично второму решению задачи № в **8** или **9** классах.

11 класс

11.1. Ответ: $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} [n; n+1/3)$.

Пусть $[x]=n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\{x\}=a$, $0 \leqslant a < 1$. Тогда $x = n + a$. В зависимости от возможных значений a рассмотрим следующие три случая 1) – 3).

1) $0 \leqslant a < 1/3$. Тогда $0 \leqslant 3a < 1$. Поэтому $\{3x\} = \{3n+3a\} = \{3a\} = 3a$ и $[3x] = [3n+3a] = 3n$, а исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{3a}{3n}.$$

Очевидно, что это равенство выполнено тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a \in [0; 1/3)$. Следовательно, исходному равенству в этом случае удовлетворяют все $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} [n; n+1/3)$, и только они.

2) $1/3 \leqslant a < 2/3$. Тогда $1 \leqslant 3a < 2$. Поэтому $\{3x\} = \{3n+3a\} = \{3a\} = 3a-1$ и $[3x] = [3n+3a] = 3n+1$, а исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{3a-1}{3n+1} \iff 3na + a = 3na - n \iff a = -n.$$

Поскольку n – целое число, а $1/3 \leqslant a < 2/3$, то, следовательно, случае 2) действительных чисел x, удовлетворяющих исходному равенству, не существует.

3) $2/3 \leqslant a < 1$. Тогда $2 \leqslant 3a < 3$. Поэтому $\{3x\} = \{3n+3a\} = \{3a\} = 3a-2$ и $[3x] = [3n+3a] = 3n+2$, а исходное равенство примет вид

$$\frac{a}{n} = \frac{3a-2}{3n+2} \iff 3na + 2a = 3na - 2n \iff a = -n.$$

Поскольку n – целое число, а $2/3 \leqslant a < 1$, то, следовательно, в случае 3) не существует действительных чисел x, удовлетворяющих исходному равенству.

Таким образом, искомое множество решений – это $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} [n; n+1/3)$.

11.2. Ответ: 605 чисел.

Заменим для удобства все числа их остатками при делении на 5 (от этого делимость или неделимость на 5 не изменится). Тогда у нас имеется ровно по $403 = 2015 : 5$ числа (остатка) 0, 1, 2, 3 и 4. Следующий ряд

$$3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,$$

в котором использованы все 403 числа 1 и 202 числа 3 (они повторяются через каждые 2 единицы), удовлетворяет условию задачи. Всего в этом примере 605 чисел.

Покажем, что больше, чем 605, чисел с соблюдением условия задачи выбрать и расставить так, как требуется, нельзя. Допустим, что выбрана последовательность чисел (остатков)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n, \qquad (*)$$

удовлетворяющая условиям 1) и 2). Как следует из приведённого примера, можно считать, что $n \geqslant 605$. Поэтому либо слева, либо справа от любого числа в этой последовательности найдутся ещё по крайней мере 5 чисел. Пусть, для определённости, справа от числа a расположены ещё числа b, c, d, e, f. Тогда сумма $(a+b+c)+(d+e+f)$, согласно условию 1), делится

9.3. Ответ: 126.

Заменим для удобства все числа их остатками при делении на 3 (от этого делимость или неделимость на 3 не изменится). Тогда у нас имеется ровно по 100 чисел (остатков) 0, 1 и 2. Следующий ряд

$$2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,$$

в котором использованы все 100 чисел (остатков) 1 и 26 чисел (остатков) 2 (они повторяются через каждые 4 единицы), удовлетворяет условию задачи. Всего в этом примере 126 чисел.

Покажем, что больше, чем 126, чисел с соблюдением условия задачи выбрать и расставить так, как требуется, нельзя. Пусть последовательность чисел (остатков)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n \qquad (*)$$

удовлетворяет условиям 1) и 2). Ввиду приведённого примера, можно считать, что $n \geqslant 127$. Тогда для любого числа из последовательности $(*)$ найдутся ещё по крайней мере 4 числа, стоящие либо слева от него, либо справа. Пусть, для определённости, справа от числа a расположены ещё числа b, c, d, e. Тогда по условию число $a+b+c+d+e$ делится на 3, а число $b+c+d+e$ на 3 не делится. Поэтому a не делится на 3. Таким образом, среди чисел последовательности $(*)$ нет чисел, кратных 3, т. е. (поскольку мы их заменили остатками) нет чисел 0, и, значит, есть только числа 1 и 2. Рассмотрим любую пятёрку подряд идущих чисел последовательности $(*)$, сумма которых по условию делится на 3. Среди них есть по крайней мере 3 одинаковых числа, а значит, их сумма делится на 3. Тогда и сумма двух оставшихся чисел делится на 3. Но эти два оставшиеся числа могут быть только 1 и 2. Таким образом, для всех пятёрок подряд идущих чисел последовательности $(*)$ имеет место альтернатива: либо в каждой из них четыре 1 и одна 2, либо в каждой из них четыре 2 и одна 1.

Разобьём теперь все числа последовательности $(*)$ на пятёрки подряд идущих чисел; в конце, возможно, останется неполная пятёрка. Пусть для определённости в любой пятёрке имеется по 4 единицы и 1 двойка. Так как всего имеется 100 единиц и в пятёрке их четыре, то полных пятерок не более $100 : 4 = 25$, и если их ровно 25, то оставшаяся (неполная) пятёрка может состоять только из одного числа: единиц уже нет, а двоек подряд стоящих может быть не более одной. Итого, в последовательности $(*)$ не более $25 \cdot 5 + 1 = 126$ чисел.

9.4. Ответ: три пятиугольника.

Первое решение. Пусть x – число получившихся пятиугольников. Согласно условию всего многоугольников получилось $4+3+x = 7+x$, а сумма S углов этих многоугольников равна

$$S = 4 \cdot 180^\circ + 3 \cdot 360^\circ + x \cdot 540^\circ = (10+3x) \cdot 180^\circ. \qquad (*)$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, всего было сделано $(7+x)-1 = 6+x$ разрезов.

Далее, после каждого разрезания сумма углов у имеющихся многоугольников: либо увеличивается на 360° (если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника – см. рис. 1, на котором углы, которые после разрезания добавляются к сумме углов многоугольни-

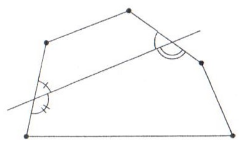


Рис. 1

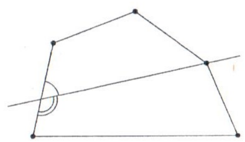


Рис. 2

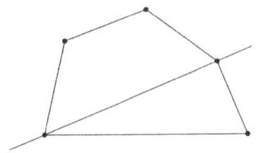


Рис. 3

9 класс

9.1. Ответ: 1 или -1.

Обозначим $A = \dfrac{a+b+c}{d} = \dfrac{d+a+b}{c} = \dfrac{c+d+a}{b} = \dfrac{b+c+d}{a}$, тогда

$$a+b+c = Ad, \quad b+c+d = Aa, \quad c+d+a = Ab \quad \text{и} \quad d+a+b = Ac. \qquad (*)$$

Почленно сложив равенства $(*)$, получим $3(a+b+c+d) = A(a+b+c+d)$, откуда следует, что либо $A = 3$ (это значение A достигается, например, при $a = b = c = d = 1$), либо $a+b+c+d = 0$ (достигается, например, при $a = b = c = 1$, $d = -3$).

Если $a+b+c+d = 0$, то

$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{(b+d)^3+(a+d)^3+(c+d)^3} = \frac{(-c-d)^3+(-a-d)^3+(-b-d)^3}{(b+d)^3+(a+d)^3+(c+d)^3} = -1.$$

Если $A = 3$, то равенства $(*)$ примут вид

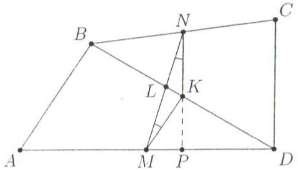
$$a+b+c = 3d, \quad b+c+d = 3a, \quad c+d+a = 3b \quad \text{и} \quad d+a+b = 3c.$$

Выразим $a+b$ из первого и последнего из этих уравнений: $a+b = 3d-c$ и $a+b = 3c-d$. Сложим полученные равенства: $a+b = c+d$. Аналогично получим: $b+c = d+a$ и $c+a = b+d$. Поэтому

$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{(b+d)^3+(a+d)^3+(c+d)^3} = \frac{(c+d)^3+(a+d)^3+(b+d)^3}{(b+d)^3+(a+d)^3+(c+d)^3} = 1.$$

9.2. Ответ: 91°.

Пусть точка K — середина диагонали BD, а L — точка пересечения MN и BD. Тогда MK и NK — средние линии треугольников ABD и BCD соответственно. Поэтому $MK = 0{,}5 \cdot AB = 0{,}5 \cdot CD = NK$. Следовательно, треугольник MNK равнобедренный, поэтому



$$\angle MNK = \angle NMK. \qquad (1)$$

Так как $MK \parallel AB$ (MK — средняя линия $\triangle ABD$), то

$$\angle KMD = \angle BAD = 55^\circ < 72^\circ = \angle NMD = \angle LMD.$$

Значит, точка L лежит на диагонали BD между токами B и K (см. рисунок).

Пусть P — точка пересечения прямой NK со стороной AD. Поскольку $NP \parallel CD$ (NK — средняя линия $\triangle BCD$), то для искомого угла ADC имеем

$$\angle ADC = \angle MPN = 180^\circ - \angle MNP - \angle NMP =$$

$$= \left[\angle MNP = \angle MNK \underset{(1)}{=} \angle NMK,\ \angle NMP = \angle NMD\right] =$$

$$= 180^\circ - \angle NMK - \angle NMD = 180^\circ - (\angle NMD - \angle KMD) - \angle NMD =$$

$$= \left[\angle KMD = \angle BAD\right] = 180^\circ - 2\angle NMD + \angle BAD = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ + 55^\circ = 91^\circ.$$

на 5. Ели бы $a = 0$, то получилось бы, что число $b+c+d+e+f$ кратно 5, вопреки условию 2). Итак, в последовательности $(*)$ могут присутствовать только ненулевые числа (остатки).

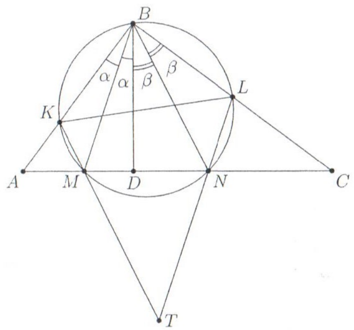
Рассмотрим 4 подряд идущих числа этой последовательности a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}. По условию числа $a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ и $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}$ делятся на 5. Поэтому и их разность $(a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}) - (a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) = a_{k+3} - a_k$ также делится на 5, т. е. числа (остатки) a_{k+3} и a_k совпадают. Следовательно, последовательность $(*)$ периодическая с периодом 3.

Возьмём любой её фрагмент, состоящий из трёх (последовательных) чисел a, b, c. По условию $a+b+c$ делится на 5. Пусть среди чисел (остатков) a, b, c нет равных. Как установлено выше, среди них нет числа 0. Поэтому $a+b+c = (1+2+3+4) - x = 10 - x$, где x — четвёртое ненулевое число, отличное от a, b, c. Получаем $10 - x$ кратно 5, что невозможно при $x \neq 0$. Итак, среди любой тройки подряд идущих чисел a, b, c последовательности $(*)$ есть равные. Понятно, что они равны не все, иначе бы все числа последовательности $(*)$ были бы равны, что противоречит условию 2). Поэтому в любой тройке подряд идущих чисел последовательности $(*)$ есть два равных числа (обозначим их a) и третье число b, $b \neq a$ (эти равные числа в любой тройке одни и те же в силу установленной выше периодичности с периодом 3 последовательности $(*)$).

Предположим, что количество чисел n в последовательности $(*)$ больше 605, т. е. не менее 606. Тогда все числа последовательности $(*)$ можно разбить на 202 непересекающиеся тройки и, возможно, ещё какие-то числа (если их больше 606) останутся. Как было показано, в каждой тройке два числа равны a. Поэтому в последовательности $(*)$ не менее $202 \cdot 2 = 404$ одинаковых чисел. Противоречие, так как таких чисел не более 403. Таким образом, наибольшее количество чисел, которое можно выбрать так, чтобы выполнялись все условия задачи, равно 605.

11.3. Ответ: $KL = 4\sqrt{2}$.

Обозначим углы: $\alpha = \angle ABM = \angle MBD$ и $\beta = \angle CBN = \angle NBD$. Тогда $\angle ABC = 2(\alpha+\beta)$. Поскольку $\angle MKL$ и $\angle MBL$ — вписанные углы, опирающиеся на дугу ML, то $\angle MKL = \angle MBL = \alpha + 2\beta$. Аналогично получаем: $\angle NLK = \angle NBK = 2\alpha + \beta$ (как вписанные углы, опирающиеся на дугу KN). Поэтому



$$\angle MTN = 180^\circ - (\angle TKL + \angle KLT) =$$

$$= 180^\circ - (\alpha + 2\beta + 2\alpha + \beta) = 180^\circ - 3(\alpha + \beta).$$

По условию $\angle ABC = 2\angle KTL$, откуда

$$2(\alpha+\beta) = 2(180^\circ - 3(\alpha+\beta)), \quad \text{или} \quad \alpha + \beta = 45^\circ.$$

Следовательно, $\angle ABC = 2(\alpha+\beta) = 90^\circ$. По теореме Пифагора гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC равна: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$, т.е. $AC = 10$.

Так как $\angle BMC = \angle BMD = 90^\circ - \angle DBM = 2(\alpha+\beta) - \alpha = \alpha + 2\beta = \angle MBC$, то треугольник BCM равнобедренный и $MC = BC = 8$. Аналогично, $\angle BNA = \angle BND = 90^\circ - \angle NBD = 2(\alpha+\beta) - \beta = 2\alpha + \beta = \angle ABN$, и, следовательно, треугольник ANB равнобедренный и $AN = AB = 6$. Поэтому $MN = AN + MC - AC = 6 + 8 - 10 = 4$.

Из треугольника MBN по теореме синусов находим

$$2R = MN/\sin\angle MBN = MN/\sin(\alpha+\beta) = 4/\sin 45^\circ = 4\sqrt{2},$$

где R — радиус описанной вокруг треугольника MBN окружности. Но так как угол KBL прямой, то он опирается на диаметр этой окружности, т. е. $KL = 2R = 4\sqrt{2}$.

11.4. Ответ: восьмиугольник.

Пусть у многоугольника с наибольшим числом сторон ровно q сторон ($q \geqslant 6$). Пусть d_3, d_4, d_5, d_6, d_q — числа получившихся в результате разрезания тре-, четырёх-, пяти-, шести- и q-угольников, а d - число тех многоугольников, число сторон которых не меньше семи и не больше $q-1$. Согласно условию $d_3 = 8$, $d_5 \geqslant 1$ и $d_6 \geqslant 1$, а про остальные из этих чисел в условии ничего не сказано. Во введённых обозначениях число всех получившихся многоугольников равно

$$k = d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_q + d.$$

Сумма же S углов этих многоугольников (поскольку сумма углов тре-, четырёх-, пяти- и шести- и q-угольника равна соответственно $180°$, $360°$, $540°$, $720°$ и $(q-2)\cdot 180°$, а сумма углов многоугольника с числом сторон, не меньшим семи, больше или равна $900°$) не менее

$$S \geqslant d_3 \cdot 180° + d_4 \cdot 360° + d_5 \cdot 540° + d_6 \cdot 720° + d_q(q-2)\cdot 180° + d \cdot 900° =$$

$$= (d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + d_q(q-2) + 5d)\cdot 180°. \qquad (*)$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, всего было сделано $k-1$ разрезов. Далее, после каждого разрезания сумма углов у имеющихся многоугольников: либо увеличивается на $360°$ (если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 1, на котором углы, которые после разрезания добавляются к сумме углов много-

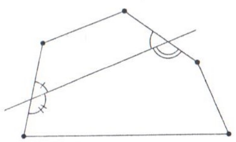


Рис. 1

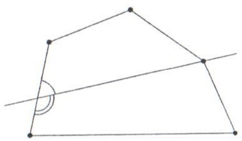


Рис. 2

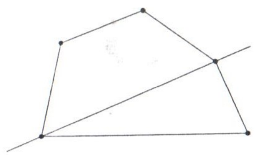


Рис. 3

угольников отмечены дужками), либо увеличивается на $180°$ (если разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника — см. рис. 2, на котором углы, которые добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо вообще не изменяется (если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 3). Так как было сделано $k-1$ разрезов и после каждого из них сумма углов увеличивается не более чем на $360°$, то сумма S углов получившихся многоугольников удовлетворяет оценке

$$S \leqslant 180° + (k-1)\cdot 360° = (2k-1)\cdot 180° = \big(2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_q + d) - 1\big)\cdot 180°.$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство

$$(d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + d_q(q-2) + 5d)\cdot 180° \leqslant \big(2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_q + d) - 1\big)\cdot 180°,$$

или

$$d_3 + 2d_4 + 3d_5 + 4d_6 + d_q(q-2) + 5d \leqslant 2(d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_q + d) - 1,$$

откуда (члены с d_4 взаимно уничтожаются) получаем

$$d_q(q-4) \leqslant d_3 - d_5 - 2d_6 - 3d - 1. \qquad (**)$$

8

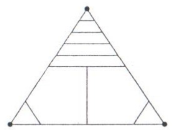


Рис. 4

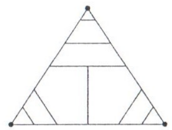


Рис. 5

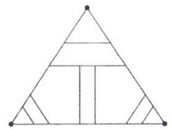


Рис. 6

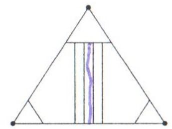


Рис. 7

Второе решение. Пусть x — число получившихся пятиугольников. Согласно условию всего многоугольников получилось $3 + 4 + x = 7 + x$, а общее число B вершин этих многоугольников равно

$$B = 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + x\cdot 5 = 25 + 5x. \qquad (*)$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, всего было сделано $(7+x) - 1 = 6 + x$ разрезов. Далее, после каждого разрезания общее число вершин у имеющихся многоугольников увеличивается либо на 4, либо на 3, либо на 2.

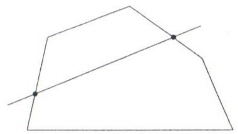


Рис. 1

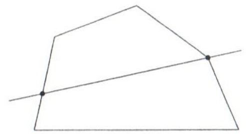


Рис. 2

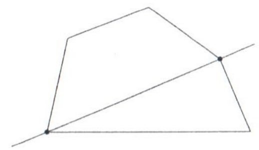


Рис. 3

В самом деле, если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника (см. рис. 1, на котором вершины, которые после разрезания добавляются к вершинам многоугольников, отмечены жирными точками), то к вершинам многоугольников добавляется 4 вершины: каждая из отмеченных на рис. 1 вершин считается дважды — как вершина одного и как вершина другого из многоугольников разрезания. Если же разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника (см. рис. 2, на котором вершины, которые после разрезания добавляются к вершинам многоугольников, отмечены жирными точками), то, как и выше, к вершинам многоугольников добавляется 4 вершины, но общая сумма вершин увеличивается только на 3, поскольку та вершина, через которую проходит разрез, сама из общего числа вершин получающих многоугольников исключается, а значит, в подсчёте не участвует. Наконец, если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника (см. рис. 3), то аналогично предыдущему заключаем, что общее число вершин увеличивается на 2. Так как было сделано $6 + x$ разрезов и после каждого из них общее число вершин увеличивается не более чем на 4, то для общего числа B вершин получившихся многоугольников имеем оценку

$$B \leqslant 3 + (6 + x)\cdot 4 = 27 + 4x.$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство $25 + 5x \leqslant 27 + 4x$, откуда $x \leqslant 2$. Итак, пятиугольников не может быть больше двух.

Остаётся привести пример, показывающий, что пятиугольников действительно может быть ровно 2 (см. любой из рис. 4 — 7 первого решения).

Далее, рассмотрим 4 подряд идущих числа этой последовательности a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}. По условию каждое из чисел $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$ и $a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ делится на 5. Поэтому и их разность $(a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})-(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})=a_{k+3}-a_k$ делится на 5, т. е. числа (остатки) a_{k+3} и a_k совпадают. Следовательно, в последовательности $(*)$ числа (остатки) повторяются с периодом 3. Поэтому

$$a_1=a_4=a_7=\ldots=a_{100}=a_3=a_6=a_9=\ldots=a_{99}=a_2=a_5=a_8=\ldots=a_{98},$$

т. е. в последовательности $(*)$ все числа (остатки) равны. Но, тогда сумма любых пяти (и не только подряд идущих) чисел этой последовательности делится на 5, что противоречит условию 2). Значит, ста натуральных чисел, удовлетворяющих условиям 1) и 2) задачи, не существует.

8.4. Ответ : два пятиугольника.

Первое решение. Пусть x — число получившихся пятиугольников. Согласно условию всего многоугольников получилось $3+4+x=7+x$, а сумма S углов этих многоугольников равна

$$S=3\cdot180^\circ+4\cdot360^\circ+x\cdot540^\circ=(11+3x)\cdot180^\circ. \qquad (*)$$

Так как после каждого разрезания число многоугольников увеличивается на 1 (из одного многоугольника после разрезания получается два), то, следовательно, всего было сделано $(7+x)-1=6+x$ разрезов. Далее, после каждого разрезания сумма углов у имеющихся многоугольников: либо увеличивается на 360° (если разрез не проходит через вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 1, на котором углы, которые после разрезания добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо увеличивается на 180° (если разрез проходит только через одну вершину разрезаемого многоугольника — см. рис. 2, на котором углы, которые добавляются к сумме углов многоугольников отмечены дужками), либо вообще не изменяется (если разрез проходит через две вершины разрезаемого многоугольника — см. рис. 3).

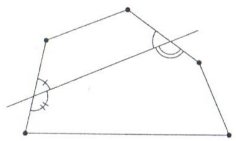


Рис. 1

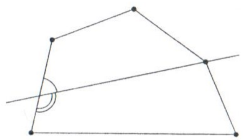


Рис. 2

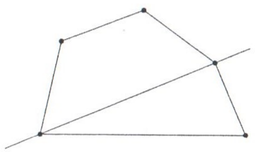


Рис. 3

Так как было сделано $6+x$ разрезов и после каждого из них сумма углов увеличивается не более чем на 360°, то сумма S углов получившихся многоугольников удовлетворяет оценке превосходит

$$S\leqslant180^\circ+(6+x)\cdot360^\circ=(13+2x)\cdot180^\circ.$$

Поэтому вследствие $(*)$ верно неравенство

$$(11+3x)\cdot180^\circ\leqslant(13+2x)\cdot180^\circ, \quad \text{или} \quad 11+3x\leqslant13+2x,$$

откуда $x\leqslant2$. Итак, пятиугольников не может быть больше двух.

Остаётся привести пример таких прямолинейных разрезаний треугольника и его частей, после которых получится в точности три треугольника, четыре четырёхугольника и два пятиугольника. Указанное разрезание можно сделать многими различными способами — некоторые из них показаны на рис. 4 — 7.

Так как $d_3=8$, $d_5\geqslant1$, $d_6\geqslant1$ и $d\geqslant0$, то правая часть оценки $(**)$ не превосходит $d_3-d_5-2d_6-3d-1\leqslant8-1-2-1=4$, а её левая часть, поскольку $d_q\geqslant1$ и $q>4$, не менее $q-4$. Поэтому $q-4\leqslant4$, откуда $q\leqslant8$. Итак, многоугольник с наибольшим числом сторон имеет не более 8 -и сторон.

Остаётся привести пример таких прямолинейных разрезаний треугольника и его частей, после которых получится в точности восемь треугольников, не менее одного пятиугольника, не менее одного шестиугольника и хотя бы один восьмиугольник. Пример такого разрезания приведён на рис. 4.

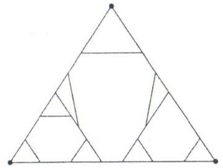


Рис. 4

Другое доказательство неравенства $q\leqslant8$ может быть проведено аналогично второму решению задачи № в **8** или **9** классах.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

Решения

Первый день

8 класс

8.1. Ответ: 8 или -1.

Обозначим $A = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{b}$, тогда

$$a+b = Ac, \quad b+c = Aa \quad \text{и} \quad c+a = Ab. \tag{$*$}$$

Найдём значения, которые может принимать A. Почленно сложив равенства $(*)$, получим: $2(a+b+c) = A(a+b+c)$, откуда следует, что либо $A = 2$ (это значение A достигается, например, при $a = b = c = 1$), либо $a+b+c = 0$. Если $a+b+c=0$, то $A = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{-c}{c} = -1$ (это значение A достигается, например, при $a = b = 1$, $c = -2$). Итак, величина A может принимать только два значения: 2 или -1.

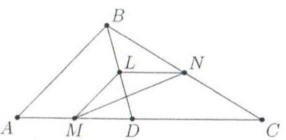
Заменим в выражении из условия задачи суммы $a+b$, $b+c$ и $c+a$ согласно равенствам $(*)$, получим

$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{(Ac)^3+(Aa)^3+(Ab)^3}{a^3+b^3+c^3} = A^3,$$

а значит, значение этого выражения может быть равно только 8 или -1.

8.2. Ответ: $46°$.

Пусть L — середина отрезка BD. Тогда LN — средняя линия треугольника BDC,



поэтому $LN = 0,5 \cdot DC$ и $LN \parallel DC$. Аналогично, LM — средняя линия треугольника ABD, поэтому $LM = 0,5 \cdot AB$ и $LM \parallel AB$. Так как $DC = AB$, то $LN = LM$, и, следовательно, треугольник MLN равнобедренный, откуда $\angle LMN = \angle LNM$. Поскольку $LN \parallel CD$, то $LN \parallel CA$, а значит, $\angle LNM = \angle NMC$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и CA и их секущей NM). Поэтому $\angle LMC = \angle LMN + \angle NMC = 2\angle NMC$. С другой стороны, из параллельности прямых LM и AB следует равенство углов $\angle BAC = \angle LMC$. Таким образом, $\angle BAC = 2\angle NMC = 2 \cdot 23° = 46°$.

8.3. Ответ: нет, нельзя.

Допустим, что некоторые 100 целых чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{100} \tag{$*$}$$

расставлены по кругу так, что выполняются условиям 1) и 2) (мы считаем, что в последовательности $(*)$ первое число a_1 и последнее число a_{100} стоят рядом. Заменим все числа $(*)$ их остатками при делении на 5 (от этого делимость или неделимость на 5 не изменится). Тогда в последовательности $(*)$ все числа — это числа 0, 1, 2, 3 или 4.

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

8 класс

Первый день

1. При всех допустимых значениях действительных чисел a, b, c найдите все возможные значения выражения

$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{a^3+b^3+c^3},$$

если $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}$.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $CD=AB$. Точки M и N – середины отрезков AD и BC соответственно.

Найдите величину угла BAC, если $\angle NMC=23^\circ$.

3. Можно ли подобрать 100 целых чисел и расставить их по кругу так, чтобы были выполнены следующие два условия: 1) сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 5; 2) сумма любых пяти подряд идущих чисел не делится на 5?

4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получилось либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника, и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проделав указанную операцию несколько раз, в результате получили три треугольника, четыре четырёхугольника и какое-то число пятиугольников (многоугольников с числом сторон, бóльшим пяти, получено не было).

Какое наибольшее число пятиугольников могло при этом получиться?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

10 класс

Первый день

1. Найдите все действительные x, удовлетворяющие равенству

$$\frac{\{x\}}{[x]} = \frac{\{2x\}}{[3x]}.$$

(Здесь $[a]$ — целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\}$ — дробная часть числа a, т.е. $\{a\} = a - [a]$.)

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B на сторону AC опущена высота BD. На стороне AC отмечены точки M и N отмечены так, что BM и BN — биссектрисы углов ABD и CBD соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника MBN, пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно.

Найдите длину отрезка KL, если известно, что $AB = 6$ и $BC = 8$.

3. Известно, что коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ удовлетворяют равенству $9a + b + 3c = 0$.

Докажите, что у этого квадратного трёхчлена есть корень, принадлежащий отрезку $[-2; 2]$.

4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получилось либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника, и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проделав указанную операцию несколько раз, в результате получили некоторое число многоугольников, про которые известно только то, что среди них имеется ровно шесть треугольников и хотя бы один пятиугольник.

Какое наибольшее число шестиугольников могло при этом получиться ?

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

11 класс

Первый день

1. Найдите все действительные x, удовлетворяющие равенству

$$\frac{\{x\}}{[x]} = \frac{\{3x\}}{[3x]}.$$

(Здесь $[a]$ — целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a, а $\{a\}$ — дробная часть числа a, т.е. $\{a\} = a - [a]$.)

2. Даны числа $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2014,\ 2015$.

Какое наибольшее количество из них можно выбрать и расставить в некотором порядке так, чтобы получилась последовательность чисел, удовлетворяющая следующим двум свойствам: 1) сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 5; 2) сумма любых пяти подряд идущих чисел не делится на 5?

3. В треугольнике ABC из вершины B на сторону AC опущена высота BD. На стороне AC отмечены точки M и N так, что BM и BN — биссектрисы углов ABD и CBD соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника MBN, пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Точка T — точка пересечения прямых KM и LN.

Найдите длину отрезка KL, если известно, что $\angle ABC = 2\angle KTL$ и $AB = 6,\ BC = 8$.

4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получилось либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника, и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проделав указанную операцию несколько раз, в результате получили некоторое число многоугольников, про которые известно только то, что среди них имеется ровно восемь треугольников и хотя бы по одному пятиугольнику и шестиугольнику.

Многоугольник с каким наибольшим числом сторон может быть среди получившихся многоугольников?

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

19 декабря 2014 г.

LXV Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

12 – 16 января 2015 года

9 класс

Первый день

1. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}{(b+d)^3+(a+d)^3+(c+d)^3}$$

при всех допустимых значениях действительных чисел a, b, c, d, если

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{d+a+b}{c}=\frac{c+d+a}{b}=\frac{b+c+d}{a}.$$

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Точки M и N – середины сторон AD и BC соответственно. Известно, что $\angle BAD = 55°$ и $\angle NMD = 72°$.

Найдите величину угла ADC.

3. Даны числа $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 299,\ 300$.

Какое наибольшее количество из них можно выбрать и расставить их в ряд в некотором порядке так, чтобы получилась последовательность чисел, удовлетворяющая следующим двум свойствам: 1) сумма любых четырёх подряд идущих чисел не делится на 3; 2) сумма любых пяти подряд идущих чисел делится на 3?

4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получилось либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника, и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проделав указанную операцию несколько раз, в результате получили четыре треугольника, три четырёхугольника и какое-то число пятиугольников (многоугольников с числом сторон, бóльшим пяти, получено не было).

Какое наибольшее число пятиугольников могло при этом получиться?