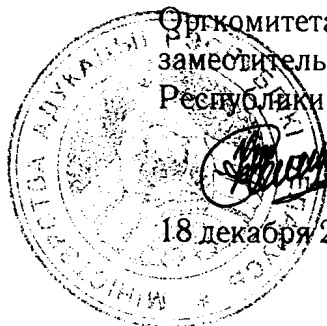


УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя

Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь



18 декабря 2009 г.

К.С.ФАРИНО

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

7 класс

Первый день

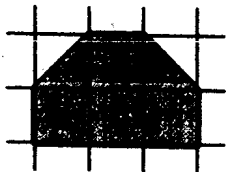
1. Словами ПЕНЬ и КОЛОДА зашифрованы некоторые два натуральных числа. При этом разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одну и ту же цифру. Известно, что число, зашифрованное словом ПЕНЬ, делится на 9, а число, зашифрованное словом КОЛОДА, делится на 45.

Найдите (с обоснованием) цифру, которую обозначает буква А.

2. Дедушке значительно больше лет, чем двум его внукам вместе. Сейчас произведение его возраста и возрастов двух его внуков делится на 10, как, впрочем, и год назад. И два года назад оно также делилось на 10 и было равно 780.

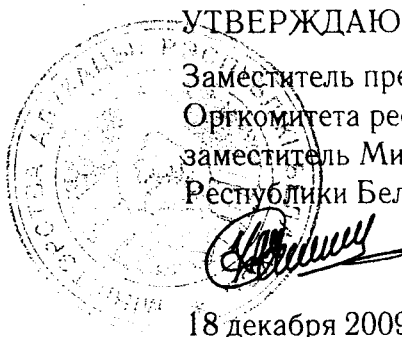
Чему равно произведение возрастов дедушки и двух его внуков сейчас?

3. Из клетчатой бумаги со стороной клетки 1 вырезан шестиугольник так, как показано на рисунке.



Можно ли его разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

4. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на доске 7×7 , так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×2 , 1×3 и 3×1 было отмечено не менее двух клеток?



УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

8 класс

Первый день

1. Словами БРЕСТ и ГРОДНО зашифрованы некоторые два натуральных числа. При этом разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одну и ту же цифру. Известно, что число, зашифрованное словом БРЕСТ, делится на 9, а число, зашифрованное словом ГРОДНО, делится на 45.

Найдите (с обоснованием) цифру, которую обозначает буква О.

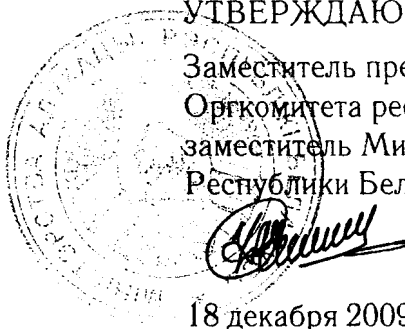
2. И спросил Иван Царевич у Кощея Бессмертного: "А сколько же лет тебе, такому дряхлому?" "Какой же я дряхлый? — ответил Кощей, — Мне же еще и 10000 лет нет? Но, уж, конечно, поболее будет, чем десяти таким 18-летним юнцам, как ты, вместе взятым." "Что-то скрываешь ты свой точный возраст," — заметил Иван Царевич. "Вовсе нет, — сказал Кощей, — "Считай сам, коли грамотный. Мой возраст равен сумме квадратов пяти последовательных натуральных чисел. А сумма этих пяти чисел делится на 5."

Сколько лет Кощею Бессмертному?

3. В неравностороннем прямоугольном треугольнике ABC ($AC > BC$, $\angle C = 90^\circ$) на стороне AC отмечена точка N так, что $AN = BC$. Точка K — середина отрезка CN , точка M — середина стороны AB .

Найдите величину угла $\angle AKM$.

4. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на доске 8×8 , так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×2 , 1×3 и 3×1 было отмечено не менее двух клеток?



УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

8 класс

Первый день

1. Словами БРЕСТ и ГРОДНО зашифрованы некоторые два натуральных числа. При этом разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одну и ту же цифру. Известно, что число, зашифрованное словом БРЕСТ, делится на 9, а число, зашифрованное словом ГРОДНО, делится на 45.

Найдите (с обоснованием) цифру, которую обозначает буква О.

2. И спросил Иван Царевич у Кощея Бессмертного: "А сколько же лет тебе, такому дряхлому?" "Какой же я дряхлый? — ответил Кощей, — Мне же еще и 10000 лет нет? Но, уж, конечно, поболее будет, чем десяти таким 18-летним юнцам, как ты, вместе взятым." "Что-то скрываешь ты свой точный возраст," — заметил Иван Царевич. "Вовсе нет, — сказал Кощей, — "Считай сам, коли грамотный. Мой возраст равен сумме квадратов пяти последовательных натуральных чисел. А сумма этих пяти чисел ^{является квадратом натурального числа} делится на 5".

Сколько лет Кощею Бессмертному?

3. В неравнобедренном прямоугольном треугольнике ABC ($AC > BC$, $\angle C = 90^\circ$) на стороне AC отмечена точка N так, что $AN = BC$. Точка K — середина отрезка CN , точка M — середина стороны AB .

Найдите величину угла $\angle AKM$.

4. Какое наименьшее число клеток нужно отметить на доске 8×8 , так, чтобы в каждом прямоугольнике 2×2 , 1×3 и 3×1 было отмечено не менее двух клеток?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь



К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

9 класс

Первый день

1. В многозначных числах ДЕВЯТКА, ДЕВЯНОСТО и СТО буквами обозначены цифры (разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одинаковые цифры). Оказалось, что ДЕВЯТКА делится на 9, а ДЕВЯНОСТО делится на 90.

Может ли СТО делиться на 9?

2. Пусть n, a, b, x, y , — натуральные числа, такие, что каждое из чисел $ax - 1$, $by - 1$ и $x + y - 1$ делится на n .

Докажите, что тогда $ab - a - b$ также делится на n .

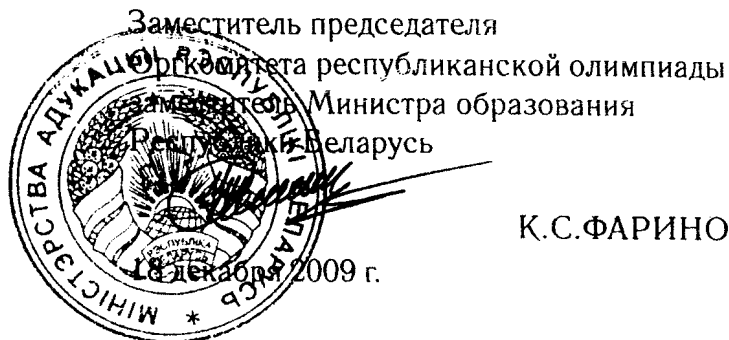
3. В треугольнике ABC угол при вершине C равен 60° . На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка D так, что $AD = BC$, а на продолжении AB за точку B отмечена точка F так, что $BF = AC$. Точки N, M, K — середины отрезков CD, AB, CF соответственно.

Найдите величину угла NMK .

4. Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 3 монеты оказались лишними, и он хотел присвоить их себе. Разбойники рассердились и убили атамана. Новый атаман, которого они выбрали тайным голосованием, также разделил монеты поровну. Но 2 монеты у него остались, и он тоже захотел их присвоить. Снова разбойники, рассердившись, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман также разделил все монеты поровну. Но 1 монета у него осталась, и он хотел ее присвоить. От этого атамана разбойники избавились так же, как и от предыдущих. Наконец, четвертый атаман разделил все монеты поровну, и каждому из разбойников досталось по 335 монет.

Какое наибольшее число монет могли делить разбойники?

УТВЕРЖДАЮ



К.С.ФАРИНО

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

10 класс

Первый день

1. Словами ПРИМЕР, ЗАДАЧА, ПАРТА зашифрованы некоторые три натуральных числа. При этом разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одну и ту же цифру. Известно, что числа, зашифрованные словами ПРИМЕР и ЗАДАЧА, делятся на 45, а число, зашифрованное словом ПАРТА, делится на 7.

Какое число зашифровано словом ПАРТА?

2. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел x и y , удовлетворяющие равенству

$$(x - y)^2 + x + y + 1 = x^2 y^2.$$

3. Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC , O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Известно, что четырехугольник CHO_1B вписанный.

Найдите величину угла O_1BO_2 .

4. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = 4$ м, $AC = BC = 3$ м. Две улитки ползут с постоянными скоростями из вершин A и C в вершину B по сторонам AB и CB . Через 5 минут улитки оказываются в точках A_1 и C_1 таких, что четырехугольник AA_1C_1C — описанный. Еще через 2 минуты улитки оказываются в точках A_2 и C_2 таких, что четырехугольник AA_2C_2C — вписанный.

Найдите отношение скоростей улиток.

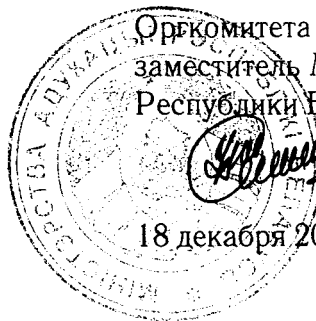
УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя

Оргкомитета республиканской олимпиады

заместитель Министра образования

Республики Беларусь



К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2010 года

11 класс

Первый день

1. Словами ПЛАНИМЕТРИЯ и РЕПА зашифрованы некоторые два натуральных числа. При этом разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одну и ту же цифру. Известно, что число, зашифрованное словом ПЛАНИМЕТРИЯ, делится на 990.

Докажите, что число, зашифрованное словом РЕПА, делится на 9.

2. Арифметическая прогрессия состоит из 2010 натуральных чисел.

Докажите, что если сумма всех членов этой прогрессии делится на 7, то и сумма четвертых степеней членов этой прогрессии делится на 7.

3. Точка K — произвольная точка стороны AB равностороннего треугольника ABC . На стороне AC отмечена точка L так, что $AK = CL$. Точка N — середина отрезка AL . Из точки N опущен перпендикуляр NH на сторону BC . Пусть X — точка пересечения отрезков NH и CK .

Найдите геометрическое место точек X , когда точка K пробегает всю сторону AB .

4. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$ м, $BC = 4$ м, $AC = 3$ м. Две улитки ползут с постоянными скоростями из вершин A и B в вершину C по сторонам AC и BC . Через 15 минут улитки оказываются в точках A_1 и B_1 таких, что четырехугольник AA_1B_1B — вписанный. Еще через 4 минуты улитки оказываются в точках A_2 и B_2 таких, что четырехугольник AA_2B_2B — описанный.

Найдите отношение скоростей улиток.

7.1. Ответ: 5.

Всего в словах ПЕНЬ и КОЛОДА использовано ровно 9 различных букв:

П, Е, Н, Ъ, К, О, Л, Д, А, (*)

– а значит, этими девятью буквами зашифрованы 9 различных цифр. Далее не будем делать различия между цифрой и обозначающей её буквой. Поскольку всего различных цифр 10 и из них 9 использованы в (*), то через X обозначим ту единственную цифру, которой нет в заданных словах. Значит, цифры (*) и цифра X вместе дают все цифры 0, 1, ..., 9, и поэтому их сумма

$$П + Е + Н + Ъ + К + О + Л + Д + А + X = 0 + 1 + \dots + 9 = 45 \quad (**)$$

и, в частности, делится на 9. С другой стороны, так как по условию каждое из чисел ПЕНЬ и КОЛОДА делится на 9, то согласно признаку делимости на 9, сумма цифр каждого из этих чисел делится на 9, а тогда на 9 делится и общая сумма цифр этих чисел, т. е.

$$П + Е + Н + Ъ + К + О + Л + О + Д + А : 9. \quad (**)$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (*), видим, что девять цифр (*) взаимно уничтожаются, а получившийся результат – число $X - О$ делится на 9. Но разность цифр $X - О$ может делиться на 9 только в одном случае: X и $О$ – это, в каком-то порядке, цифры 0 и 9.

Воспользуемся теперь тем, что согласно условию число КОЛОДА делится на 5. Это согласно признаку делимости на 5 равносильно тому, что цифра A равна либо 0, либо 5. Но цифра A не может равняться 0, поскольку 0, как доказано выше, это либо X , либо $О$. Стало быть, $A = 5$.

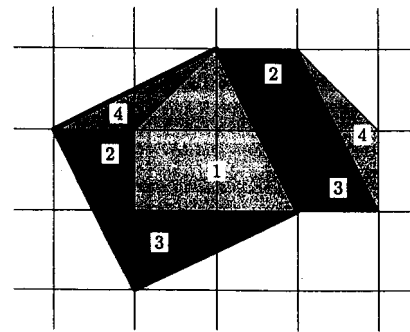
7.2. Ответ: 2010.

Пусть x , y и z – возрасты (в каком-то порядке), которые имели дедушка и два его внука 2 года назад. Тогда согласно условию $x y z = 780$, в

частности, среди чисел x , y и z есть число, кратное 5. Пусть для определенности это число x . Так как по условию $(x+1)(y+1)(z+1)$ делится на 10 и, значит, делится на 5, то среди x , y и z имеется также число с остатком 4 при делении на 5. Ясно, что это не число x . Пусть для определенности остаток 4 при делении на 5 имеет число y . Кроме того, так как по условию и $(x+2)(y+2)(z+2)$ также делится на 10 и, значит, на 5, то среди x , y и z имеется и число с остатком 3 при делении на 5. Ясно, что таким числом не может быть ни x , ни y . Поэтому остаток 3 при делении на 5 имеет число z . Разложим число 780 на простые множители: $780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Чтобы найти x , y и z , достаточно разбить эти делители на 3 группы так, чтобы произведение чисел в первой группе (или само число, если оно единственное в группе) было кратно 5, во второй – имело остаток 4, при делении на 5, а в третьей – остаток 3 при делении на 5. Легко видеть, что остаток 3 имеют только числа 3 и 13, но не имеют никакие другие множители из разложения числа 780 и никакие их произведения этих множителей. В первом случае, т. е. если $z = 3$, возможно только: $y = 2 \cdot 2 = 4$, $x = 5 \cdot 13 = 65$. Тогда $(x+2)(y+2)(z+2) = 5 \cdot 6 \cdot 67 = 2010$. Во втором случае, т. е. если $z = 13$, возможно только: $y = 2 \cdot 2 = 4$, $x = 3 \cdot 5 = 15$. Но в этом случае ни одно из найденных значений x , y и z не может быть возрастом дедушки. Таким образом, сейчас произведение возрастов дедушки и двух его внуков равно 2010.

7.3. Ответ: можно.

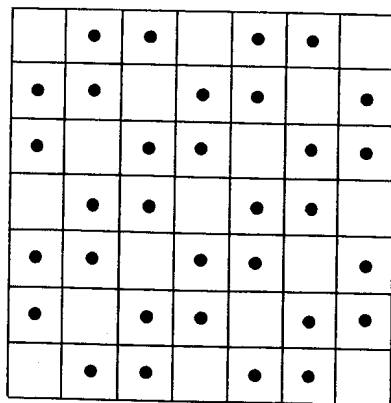
Соответствующий пример приведен на рисунке.



7.4. Ответ: 32 клетки.

Доска 7×7 состоит из 49 клеток. При этом 48 ее клеток (без одной угловой) легко разбить на $48 : 3 = 16$ прямоугольников 1×3 и 3×1 . Так как в каждом из таких прямоугольников по условию задачи должно быть отмечено не менее 2-х клеток, то всего должно быть отмечено $16 \cdot 2 = 32$

клетки. Легко построить пример, удовлетворяющий условию задачи, с 32 отмеченными клетками (см. рис).



8 класс

8.1. Ответ: 5.

Заметим вначале, что поскольку согласно условию число ГРОДНО делится на 5, то по признаку делимости на 5 буква О может обозначать только либо цифру 0, либо цифру 5.

Всего в словах БРЕСТ и ГРОДНО использовано ровно 9 различных букв:

Б, Р, Е, С, Т, Г, О, Д, Н, (*)

— а значит, этими девятью буквами зашифрованы 9 различных цифр. Далее не будем делать различия между цифрой и обозначающей её буквой. Поскольку всего различных цифр 10 и из них 9 использованы в (*), то через X обозначим ту единственную цифру, которой нет в заданных словах. Значит, цифры (*) и цифра X вместе дают все цифры 0, 1, ..., 9, и поэтому их сумма

$$Б + Р + Е + С + Т + Г + О + Д + Н + X = 0 + 1 + \dots + 9 = 45 \quad (**)$$

и, в частности, делится на 9. Воспользуемся теперь тем, что согласно условию каждое из чисел БРЕСТ и ГРОДНО делится на 9. Это согласно признаку делимости на 9 равносильно тому, что сумма цифр каждого из этих чисел делится на 9, а тогда на 9 делится и общая сумма цифр этих чисел, т. е.

$$Б + Р + Е + С + Т + Г + Р + О + Д + Н + О : 9. \quad (**)$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (*), видим, что девять цифр (*) взаимно уничтожаются, а получившийся результат — число $X - (О + Р)$ делится на 9, т. е.

$$X - (О + Р) : 9. \quad (**)$$

Как показано в начале решения, либо $О = 0$, либо $О = 5$. Допустим, что $О = 0$. Тогда соотношение (**) примет вид: $X - Р : 9$. Но разность цифр $X - Р$ может делиться на 9 только в одном случае: X и $Р$ — это, в каком-то порядке, цифры 0 и 9. Но никакая из цифр X или $Р$ не может равняться 0, если $О = 0$. Стало быть, $О = 5$.

8.2. Ответ: 2010 лет.

Пусть $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ — те пять последовательных натуральных чисел, о которых идет речь в условии задачи. Тогда возраст Кося равен $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10$. При этом согласно условию $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 5n$ является точным квадратом. Пусть $5n = m^2$, где m — некоторое натуральное число. Так как $m^2 = 5n$ делится на 5, то $m = 5k$ для некоторого натурального k и, значит, $n = 5k^2$. Тогда возраст Кося $5n^2 + 10 = 5(5k^2)^2 + 10 = 125k^4 + 10$. Подставив $k = 1$, получим значение $125 \cdot 1^4 + 10 = 135$. Но согласно условию возраст Кося больше 135 лет. При $k = 2$ получим $125 \cdot 2^4 + 10 = 2010$. При $k \geq 3$ значение $125k^4 + 10 \geq 125 \cdot 3^4 + 10 = 10135$, что по условию больше возраста Кося. Таким образом, Кося 2010 лет.

8.3. Ответ: 45° .

Пусть $AC = b, BC = a$. Тогда $CN = b - a$ и

$$CK = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}(b - a). \quad (1)$$

Проведем $MN \parallel BC$. Так как MN — средняя линия треугольника ABC , то

$$MN = \frac{1}{2}a \quad (2)$$

и $CH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b$. Поэтому из (1), ($CH > CK$), получим

$$HK = CH - CK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}a.$$

Тогда из (2) следует, что $HK = MN$, т. е. треугольник KMN — равнобедренный. Поскольку этот треугольник еще и прямоугольный ($MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp AC$), то

$$\angle AKM = \angle HKM = 45^\circ.$$

8.4. Ответ: 42 клетки.

Доску 8×8 легко разбить на 20 прямоугольников 1×3 и 3×1 и один квадрат 2×2 . Так как в каждом из таких прямоугольников по условию задачи должно быть отмечено не менее 2-х клеток, то всего должно быть отмечено $21 \cdot 2 = 42$ клетки. Легко построить пример, удовлетворяющий условию задачи, с 42 отмеченными клетками (см. рис).

★		★	★		★	★	
	★	★		★	★		★
★	★		★	★		★	★
★		★	★		★	★	
	★	★		★	★		★
★	★		★	★		★	★
★		★	★		★	★	
	★	★		★	★		★

9 класс

9.1. Ответ: нет, не может.

Так как согласно условию число ДЕВЯНОСТО делится на 10, то по признаку делимости на 10 буква О обозначает цифру 0. В дальнейшем не будем делать различия между цифрой и обозначающей её буквой.

Всего в словах ДЕВЯТКА, ДЕВЯНОСТО и СТО использовано ровно 10 различных букв:

Д, Е, В, Я, Т, К, А, Н, О, С (*)

— а значит, цифры (*) — это, в каком-то порядке, все десять цифр 0, 1, ..., 9, и поэтому их сумма

$$Д + Е + В + Я + Т + К + А + Н + О + С = 0 + 1 + \dots + 9 = 45 \quad (**)$$

и, в частности, делится на 9. Так как по условию число ДЕВЯТКА делится на 9, то по признаку делимости на 9 это равносильно тому, что сумма цифр

этого числа делится на 9, т. е.

$$Д + Е + В + Я + Т + К + А : 9. \quad (**)$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (*), получаем, что сумма $Н + О + С$ делится на 9, или, поскольку $О = 0$, имеем:

$$Н + С : 9. \quad (**)$$

Допустим, что число СТО делится на 9. По признаку делимости на 9 это равносильно тому, что сумма его цифр делится на 9, поскольку $О = 0$, имеем:

$$С + Т : 9. \quad (**)$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (**), получаем, что разность $Н - Т$ делится на 9. Но разность цифр $Н - Т$ может делиться на 9 только в одном случае: цифры $Н$ и $Т$ — это, в каком-то порядке, цифры 0 и 9. Но никакая из цифр $Н$ или $Т$ не может равняться нулю, поскольку, как доказано выше, $О = 0$. Стало быть, число СТО не делится на 9.

Как видим, для решения задачи достаточно несколько меньше, чем дано в условии: число ДЕВЯНОСТО делится на 10.

Отметим, хотя для решения задачи это не нужно, что ситуация, описанная в её условии, возможна: например, словом ДЕВЯТКА зашифровано число 1827936, а словом ДЕВЯНОСТО — число 182740590.

Второе решение. Так как число ДЕВЯНОСТО делится на 90, то оно делится на 10 и делится на 9. Поэтому, во-первых, оно заканчивается цифрой 0 и, значит, $О = 0$, во-вторых, сумма цифр (учитывая, что $О = 0$) $Д + Е + В + Я + Н + С + Т$ делится на 9. В последней сумме 7 различных ненулевых цифр. Вместе с еще двумя ненулевыми цифрами $К$ и $А$ эта сумма равнялась бы $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ — делится на 9. Значит, $К + А$ делится на 9. Далее, так как ДЕВЯТКА делится на 9, то $Д + Е + В + Я + Т + К + А$ делится на 9 и, значит, $Д + Е + В + Я + Т$ делится на 9. Но тогда

$$С + Н = (Д + Е + В + Я + Н + С + Т) - (Д + Е + В + Я + Т)$$

делится на 9. Следовательно, $С + Т \neq 9$. Поэтому и $С + Т + О$ не делится на 9 и, значит, СТО не делится на 9

9.2. Из условия $(x + y - 1) : n$ следует, что $ab(x + y - 1) : n$. Так как

$$ab(x + y - 1) = abx + aby - ab = (ax - 1)b + b + (by - 1)a + a - ab =$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (*), получим, что разность $T - (P + 2A)$ делится на 9. Как доказано в начале решения, могут представиться только две возможности: либо $P = 5$, $A = 0$, либо $P = 0$, $A = 5$. Рассмотрим отдельно каждую из них. Если $P = 5$, $A = 0$, то разность $T - (P + 2A) = T - 5$. Число $T - 5$ делится на 9, только если цифра $T = 5$. Но это невозможно, так как $P = 5$. Следовательно, $P = 0$, $A = 5$. В этом случае $T - (P + 2A) = T - 10$. Число $T - 10$ делится на 9, если только цифра $T = 1$.

Итак, $T = 1$, $P = 0$, $A = 5$, а значит, искомое число ПАРТА — это число П5015, в котором остаётся только найти значение его первой буквы П. Запишем это число в виде $P \cdot 10^4 + 5015$ и воспользуемся тем, что оно по условию делится на 7. Так как числа 10^4 и 5015 при делении на 7 дают остатки 4 и 3 соответственно, то $P \cdot 10^4 + 5015 = 7k + 4P + 3$, где k — некоторое натуральное число. Поэтому число П5015 делится на 7, если и только если делится на 7 число $4P + 3$. Но последнее, так как П — цифра, возможно, только если $P = 1$ или $P = 8$. Равенство $P = 1$ невозможно, поскольку, как показано выше, $T = 1$. Следовательно, $P = 8$ и ПАРТА = 85015.

Отметим, что рассуждения, связанные с делимостью на 7 числа П5015, можно несколько сократить, если воспользоваться признаком делимости на 7: число делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится знакопеременная сумма, составленная из троек чисел, на которые разбивается число, начиная с его конца (последняя тройка, возможно, неполная). Из этого признака сразу вытекает, что число П5015 делится на 7, если и только если на 7 делится разность П5 — 15 = 10(П — 1), а последнее возможно, только если цифра П = 1 или П = 8.

10.2. Ответ: $\{(x, y) = (3, 1), (1, 3)\}$.

Положим $s = x + y$, $p = xy$. Тогда исходное равенство переписывается в виде

$$s^2 - 4p + s + 1 = p^2, \implies s^2 + s + 5 = (p + 2)^2.$$

Значит, $s^2 + s + 5$ — полный квадрат. Также очевидно, что $s \neq 0$ и $s \neq -1$.

Если $s \geq 1$, то $s^2 < s^2 + s + 5 < (s + 2)^2$; значит, $s^2 + s + 5 = (s + 1)^2$, откуда $s = 4$, тогда $p \in \{-7, 3\}$. Если $s \leq -2$, то $(s + 1)^2 < s^2 + s + 5 < (s - 1)^2$, поэтому $s^2 + s + 5 = s^2$, откуда $s = -5$ и $p \in \{-7, 3\}$.

По теореме обратной к теореме Виета x и y — корни уравнения $\lambda^2 - s\lambda + p = 0$. Подстановкой пар

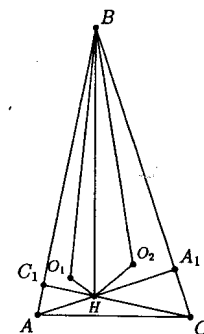
$$\{(s, p) = (4, -7), (4, 3), (-5, -7), (-5, 3)\}$$

лишь во втором случае получаем целые корни (корни 1 и 3). Следовательно,

$$\{(x, y) = (3, 1), (1, 3)\}.$$

10.3. Ответ: 15° .

Так как O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABH , то BO_1 и HO_1 — биссектрисы углов ABH и AHB соответственно. Поэтому



$$\begin{aligned} \angle BO_1H &= 180^\circ - \angle O_1BH - \angle O_1HB = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABH - \frac{1}{2}\angle AHB = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABH + \angle AHB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAH) = \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAH. \end{aligned}$$

Поскольку $AA_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AB$, то $\angle BAH = \angle BAA_1 = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCC_1 = \angle BCH$. Следовательно, $\angle BO_1H = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCH$. Так как четырехугольник CHO_1B вписанный, то

$$180^\circ = \angle BO_1H + \angle BCH = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCH + \angle BCH \implies \angle BCH = 60^\circ.$$

Поэтому

$$\angle CBA = \angle CBO_1 = 90^\circ - \angle BCH = 30^\circ.$$

Так как O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник CBH , то BO_2 — биссектриса угла CBH . Следовательно,

$$\begin{aligned} \angle O_1BO_2 &= \angle O_1BH + \angle O_2BH = \frac{1}{2}\angle ABH + \frac{1}{2}\angle CBH = \\ &= \frac{1}{2}(\angle ABH + \angle CBH) = \frac{1}{2}\angle ABC = 15^\circ. \end{aligned}$$

10.4. Ответ: 1,5.

Пусть скорость улитки, ползущей из вершины C , равна v (м/мин), а скорость улитки, ползущей из вершины A — xv (м/мин). Из условия задачи легко находим $\cos \angle B = 2/3$.

Через 5 минут после начала движения улитки оказываются в точках A_1 и C_1 таких, что $AA_1 = 5xv$, $CC_1 = 5v$. По теореме косинусов из треугольника A_1BC_1 имеем

$$A_1C_1^2 = BC_1^2 + BA_1^2 - 2BC_1 \cdot BA_1 \cdot \frac{2}{3} = (3-5v)^2 + (4-5xv)^2 - \frac{4}{3}(3-5v)(4-5xv) = \\ = 9 - (20x + \frac{10}{3})v + 25(x^2 + 1 - \frac{4}{3}x)v^2.$$

Так как четырехугольник AA_1C_1C описанный, то

$$A_1C_1^2 = (AA_1 + CC_1 - AC)^2 = (5xv + 5v - 3)^2 = 9 - 30(x+1)v + 25(x+1)^2v^2.$$

Приравнявая, получим

$$25v^2(2x + \frac{4}{3}x) = (10x + \frac{80}{3})v,$$

откуда

$$25xv = 3x + 8. \quad (1)$$

Далее, по условию, через 7 минут после начала движения улитки были в точках A_2 и C_2 таких, что AA_2C_2C — вписанный четырехугольник. Тогда по теореме об отрезках секущих

$$BA_2 \cdot BA = BC_2 \cdot BC \implies (4 - 7xv) \cdot 4 = (3 - 7x) \cdot 3,$$

откуда

$$1 = v(4x - 3). \quad (2)$$

Перемножая равенства (1) и (2), получим

$$25x = (4x - 3)(3x + 8) \quad \text{или} \quad 6x^2 - x - 12 = 0 \implies x = 3/2.$$

11 класс

11.1. Заметим вначале, что поскольку согласно условию число ПЛАНИМЕТРИЯ делится на 10, то по признаку делимости на 10 буква Я обозначает цифру 0. В дальнейшем не будем делать различия между цифрой и обозначающей её буквой.

Всего в слове ПЛАНИМЕТРИЯ использовано ровно 10 различных букв:

$$\text{П, Л, А, Н, И, М, Е, Т, Р, Я} \quad (*)$$

— а значит, цифры (*) — это, в каком-то порядке, все десять цифр 0, 1, ..., 9, и поэтому их сумма

$$\text{П} + \text{Л} + \text{А} + \text{Н} + \text{И} + \text{М} + \text{Е} + \text{Т} + \text{Р} + \text{Я} = 0 + 1 + \dots + 9 = 45 \quad (**)$$

и, в частности, делится на 9.

Воспользуемся теперь тем, что согласно условию число ПЛАНИМЕТРИЯ делится на 9. По признаку делимости на 9 это равносильно тому, что сумма цифр этого числа делится на 9, т. е.

$$\text{П} + \text{Л} + \text{А} + \text{Н} + \text{И} + \text{М} + \text{Е} + \text{Т} + \text{Р} + \text{И} + \text{Я} : 9. \quad (**)$$

Вычитая из левой части (**) левую часть (**), после взаимного уничтожения десяти цифр (*) получаем, что оставшаяся цифра И делится на 9, т. е. либо И = 0, либо И = 9. Но цифра И не может равняться нулю, поскольку, как показано в начале решения, Я = 0. Следовательно, И = 9. Заменяя в равенстве (**) Я нулём, а И девяткой, получаем

$$\text{П} + \text{Л} + \text{А} + \text{Н} + \text{М} + \text{Е} + \text{Т} + \text{Р} = 36. \quad (**)$$

Так как согласно условию число ПЛАНИМЕТРИЯ делится на 11, то это по признаку делимости на 11 равносильно тому, что делится на 11 знакопеременная сумма, составленная из последовательных цифр этого числа, т. е.

$$\text{П} - \text{Л} + \text{А} - \text{Н} + \text{И} - \text{М} + \text{Е} - \text{Т} + \text{Р} - \text{И} + \text{Я} : 11,$$

или, учитывая, что Я = 0 и обе буквы И взаимно уничтожаются, а также объединяя в этом соотношении в отдельные группы положительные и отрицательные слагаемые, получаем

$$(\text{П} + \text{А} + \text{Е} + \text{Р}) - (\text{Л} + \text{Н} + \text{М} + \text{Т}) : 11, \quad (***)$$

Обозначим $X = \text{П} + \text{А} + \text{Е} + \text{Р}$ и $Y = \text{Л} + \text{Н} + \text{М} + \text{Т}$. Тогда равенство (**) переписывается в виде $X + Y = 36$, а соотношение (***) — в виде $X - Y : 11$, т. е. имеем систему

$$\begin{cases} X + Y = 36, \\ X - Y : 11. \end{cases} \quad (***)$$

Найдём возможные значения разности $X - Y$. Так как $X = \text{П} + \text{А} + \text{Е} + \text{Р}$ и цифры П, А, Е, Р отличны от 0 и 9, то $X \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и $X \leq 5 + 6 + 7 + 8 = 26$, т. е. $10 \leq X \leq 26$. Точно так же $10 \leq Y \leq 26$. Следовательно, $-16 \leq X - Y \leq 16$. Но число $X - Y$ делится на 11, а значит, оно может принимать разве что три различных значения: либо

$X - Y = -11$, либо $X - Y = 0$, либо $X - Y = 11$. Соответственно этим значениям вследствие системы $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ получаем три системы:

$$\text{либо } \begin{cases} X + Y = 36, \\ X - Y = -11, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} X + Y = 36, \\ X - Y = 0, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} X + Y = 36, \\ X - Y = 11. \end{cases}$$

Первая и третья из этих линейных систем целочисленных решений не имеют, а решение второй $X = Y = 18$. В частности, $X = 18$, т. е. сумма цифр $\Pi + A + E + P = 18$ и, значит, делится на 9. Но эта сумма и есть сумма цифр числа РЕПА, которое, стало быть, в силу признака делимости на 9 делится на 9. Утверждение задачи доказано.

Отметим, хотя для решения задачи это не нужно, что ситуация, описанная в её условии, возможна: например, словом ПЛАНИМЕТРИЯ зашифровано число 13249576890.

11.2. Пусть $a_0 = a$, $a_1 = a + d$, ..., $a_{2009} = a + 2009d$ — члены данной арифметической прогрессии. Обозначим

$$S = a + (a + d) + \dots + (a + 2009d), \quad T = a^4 + (a + d)^4 + \dots + (a + 2009d)^4.$$

По условию $S : 7$. Так как $S = \frac{a + (a + 2009d)}{2} \cdot 2010 = (2a + 2009d)1005$, а числа 1005 и 7 взаимно простые, то $(2a + 2009d) : 7$. Поскольку $2009 = 7 \cdot 287$, то число $2a$, а значит и a делится на 7.

Если $d : 7$, то все члены прогрессии делятся на 7, а тогда и их четвертые степени делятся на 7, следовательно, и их сумма T будет делиться на 7.

Пусть теперь d не делится на 7. Рассмотрим 7 последовательных членов прогрессии

$$a + kd, \quad a + (k+1)d, \quad \dots, \quad a + (k+6)d, \quad (1)$$

где k — некоторое число от 1 до 2003. Заметим, что все эти числа имеют разные остатки от деления на 7. Действительно, в противном случае, два из этих семи чисел, скажем $a + nd$ и $a + md$, $0 \leq m < n \leq 6$, имеют одинаковые остатки от деления на 7, и тогда их разность делится на 7. Это означает, что $(a + nd) - (a + md) = d(n - m) : 7$. Поскольку d не делится на 7, а 7 — простое число, то d и 7 взаимно просты, и, значит, $(n - m) : 7$, чего быть не может так как $1 \leq (n - m) \leq 6$.

Так как мы имеем семь чисел (1), то они имеют все семь возможных остатков от деления на 7: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (порядок остатков может не совпадать с порядком чисел (1)). Но тогда их четвертые степени будут сравнимы по модулю 7 с числами

$$0^4 \equiv 0, \quad 1^4 \equiv 1, \quad 2^4 \equiv 2, \quad 3^4 \equiv 4, \quad 4^4 \equiv (-3)^4 \equiv 4,$$

$$5^4 \equiv (-2)^4 \equiv 2, \quad 6^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1.$$

Значит,

$$(a + kd)^4 + (a + (k+1)d)^4 + \dots + (a + (k+6)d)^4 \equiv 1 + 2 + 4 + 4 + 2 + 1 = 14 \equiv 0 \pmod{7}.$$

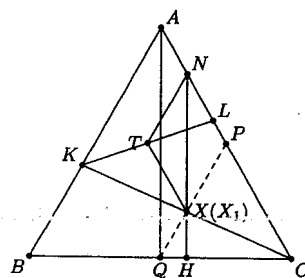
Поэтому

$$T = a^4 + (a_1^4 + \dots + a_7^4) + (a_8^4 + \dots + a_{14}^4) + \dots + (a_{2003}^4 + \dots + a_{2009}^4) \equiv a^4 + 0 + \dots + 0 \equiv 0 \pmod{7},$$

так как a , а, следовательно, и a^4 делится на 7.

11.3. Ответ: искомое ГМТ — средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB .

Покажем, что точка X является серединой отрезка KC .



Действительно, пусть X_1 — середина отрезка KC , T — середина отрезка KL . Рассмотрим треугольник X_1TN . Имеем $TN = \frac{1}{2}KA$ (как средняя линия в треугольнике KAC) и $TX_1 = \frac{1}{2}LC$ (как средняя линия в треугольнике KLC), откуда $TN = TX_1$, т. е. треугольник NTX_1 равнобедренный. При этом $\angle X_1TN = 120^\circ$, так как угол между лучами NT и TX_1 , как лучами, сонаправленными лучам AB и AC , равен 60° . Тогда $\angle TNX_1 = 30^\circ$.

Пусть Q — середина стороны BC . Тогда AQ — высота и $\angle BAQ = 30^\circ = \angle TNX_1$. Поэтому $NX_1 \parallel AQ$ и тогда NX_1 — перпендикуляр к BC . Это означает, что $X = X_1$, т. е. X — середина отрезка KC . Но тогда X принадлежит средней линии, параллельной стороне AB .

Заметим, что когда точка K , двигаясь по стороне AB , занимает положение точки B , точка X становится точкой Q , а когда K совпадает с точкой A , точка X совпадает с серединой P стороны AC .

Таким образом, искомое ГМТ — средняя линия QP треугольника ABC , параллельная стороне AB .

11.4. Ответ: 1,8.

Пусть скорость улитки, ползущей из вершины A , равна v (м/мин), а скорость улитки, ползущей из вершины B — xv (м/мин). Из условия задачи находим $AA_1 = 15v$, $BB_1 = 15xv$, $AA_2 = 19v$, $BB_2 = 19xv$.

Так как точки A , A_1 , B_1 , B по условию лежат на одной окружности, то по теореме об отрезках секущих имеем $CB \cdot CB_1 = CA \cdot CA_1$, или

$4(4 - 15xv) = 3(3 - 15v)$, откуда

$$7 = 15v(4x - 3). \quad (1)$$

Далее, по теореме Пифагора

$$A_2B_2^2 = (4 - 19xv)^2 + (3 - 19v)^2 = 25 - 19v(8x + 6) + 19^2v^2(x^2 + 1).$$

Так как четырехугольник AA_2B_2B описанный, то

$$A_2B_2^2 = (AA_2 + BB_2 - AB)^2 = (19v + 19xv - 5)^2 = 25 - 19v(10x + 10) + 19^2v^2(x + 1)^2.$$

Приравнявая правые части двух последних равенств, после преобразований получаем $19^2v^2 \cdot 2x = 19v(2x + 4)$, или

$$19xv = x + 2. \quad (2)$$

Перемножая (1) и (2), получаем

$$7 \cdot 19x = 15(4x - 3)(x + 2), \quad \text{или} \quad 30x^2 - 29x - 45 = 0.$$

Вычисляя дискриминант, находим положительный корень этого уравнения:

$$D = 29^2 + 4 \cdot 30 \cdot 45 = 841 + 5400 = 6241 = 79^2, \quad x = \frac{29 + 79}{60} = 1,8.$$

УТВЕРЖДАЮ



Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

18 декабря 2009 г.

К.С.ФАРИНО

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2009 года

7 класс

Второй день

5. В шеренгу выстроились 30 солдат. Ни какие два солдата не имеют одинакового роста, причем рост каждого из них больше 1,5 метра, но меньше 2 метров. Оказалось, что суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, на 0,5 метра больше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах.

Докажите, что у какого-то не крайнего солдата рост меньше, чем у каждого из обоих его соседей слева и справа.

6. На доске записано несколько натуральных чисел. За один ход разрешается стереть произвольные два имеющихся числа a и b и вместо них записать число $\overline{ab} + 1$, где $\overline{ab}$ — число, которое получится, если к числу a приписать число b . (Например, приписав к числу 234 число 10, а затем прибавив 1, получим 23411.) Через несколько таких ходов на доске останется одно число.

Если на доске первоначально записаны числа 1, 2, 3, может ли оставшееся число быть а) точным кубом? б) точным квадратом?

7. В 7 "А" классе некоторой школы учатся 33 школьника. Каждый из них дружит с пятью или семью учениками этой школы.

Докажите, что по крайней мере у одного ученика 7 "А" класса есть друг не из этого класса.

8. В первом полугодии Вася написал несколько тестов по математике и вычислил свой средний балл по всем этим тестам. В январе Вася написал еще один тест, в котором он набрал 8 баллов, и снова подсчитал свой средний балл. Выяснилось, что его средний балл стал на 1 меньше среднего балла за тесты в первом полугодии. В феврале Вася написал еще один тест, в котором набрал 30 баллов, и определил, что теперь его средний балл стал на 2 балла больше, чем в январе.

Найдите, какой средний балл набрал Вася по всем тестам, включая февральский тест.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя

Оргкомитета республиканской олимпиады

Заместитель Министра образования

Республики Беларусь



К.С.ФАРИНО

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2009 года

8 класс

Второй день

5. Найдите значение выражения $a^2 + 3b^2 + ab + 2b$, если a и b — корни квадратного уравнения $x^2 + x - 33 = 0$.

6. Через центр вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне AC . Эта прямая пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC — в точке L .

Найдите периметр треугольника KBL , если $AB = 3,5$ и $BC = 4,5$.

7. На доске записано несколько натуральных чисел. За один ход разрешается стереть произвольные два имеющихся числа a и b и вместо них записать число $\overline{ab} - 1$, где $\overline{ab}$ — число, которое получится, если к числу a приписать число b . (Например, приписав к числу 234 число 10, а затем отняв 1, получим 23409.) Через несколько таких ходов на доске останется одно число.

Может ли оставшееся число быть точным квадратом, если на доске первоначально записаны числа

а) 1, 2, 3, 4, 5 ?

б) 1, 2, 3, 4 ?

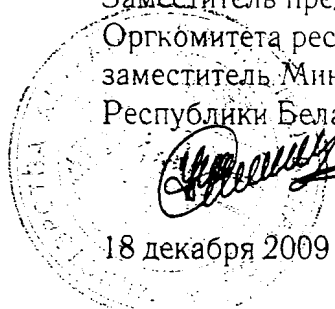
8. В 8"а" классе некоторой школы 15 учениц. Каждая из них послала каким-то 7 своим одноклассникам перед Новым годом по поздравительной открытке. Оказалось, что староста класса Галя получила ровно 6 поздравительных открыток от одноклассниц.

а) Докажите, что среди этих 15 учениц найдутся хотя бы две, которые обменялись поздравительными открытками, т. е. две такие ученицы A и B , что A послала открытку B и B послала открытку A .

б) Может ли таких, обменявшихся поздравительными открытками одноклассниц, быть только две?

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь



К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2009 года

9 класс

Второй день

5. Даны попарно различные числа a , b , c .

Докажите, что по крайней мере одно из уравнений

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0, \quad x^2 - 2bx + c^2 = 0, \quad x^2 - 2cx + a^2 = 0$$

не имеет корней.

6. Центр вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности и точка пересечения медиан этого треугольника лежат на прямой, параллельной стороне AC . Эта прямая пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC — в точке L .

Найдите периметр треугольника KBL , если $AC = 4,5$.

7. На доске записано несколько натуральных чисел. За один ход разрешается стереть произвольные два имеющихся числа a и b и вместо них записать число $\overline{ab} + 1$, где $\overline{ab}$ — число, которое получится, если к числу a приписать число b . (Например, приписав к числу 234 число 10, а затем прибавив 1, получим 23411.) Через несколько таких ходов на доске останется одно число.

Если на доске первоначально записаны числа 1, 2, 3, 4, может ли оставшееся число быть

а) точным кубом? б) точным квадратом?

8. В 9"а" классе некоторой школы 12 учениц. Каждая из них послала каким-то 6 своим одноклассницам перед Новым годом по поздравительной открытке. Оказалось, что каких бы трех учениц A , B , C из этих 12 ни выбрать, среди них найдутся две такие, ни одна из которых не послала открытки другой.

Докажите, что любая ученица получила поздравительные открытки только от тех своих одноклассниц, которым сама послала поздравительные открытки.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
Оргкомитета республиканской олимпиады
заместитель Министра образования
Республики Беларусь

К.С.ФАРИНО

18 декабря 2009 г.

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2009 года

10 класс

Второй день

5. Докажите, что для любых действительных чисел a , b , c по крайней мере одно из уравнений

$$x^2 - ax + b - 1 = 0, \quad x^2 - bx + c - 1 = 0, \quad x^2 - cx + a - 1 = 0$$

имеет действительный корень.

6. В треугольнике ABC проведена высота BH . Пусть r , r_1 , r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , ABH , CBH соответственно.

Найдите угол ABC , если $BH = r + r_1 + r_2$.

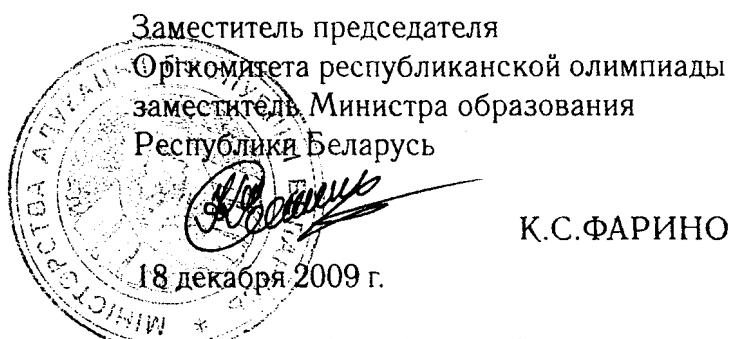
7. На доске записано несколько натуральных чисел. За один ход разрешается стереть произвольные два имеющихся числа a и b и вместо них записать число $\overline{ab} + 1$, где $\overline{ab}$ — число, которое получится, если к числу a приписать число b . (Например, приписав к числу 234 число 10, а затем прибавив 1, получим 23411.) Через несколько таких ходов на доске останется одно число. Может ли оставшееся число быть точным кубом, если на доске первоначально записаны числа

а) 1, 2, 3, 4? б) 1, 2, 3, 4, 5?

8. 15 учениц 10"А"класса некоторой школы обменивались на Новый год СМС-ками. Каждая из них послала СМС ровно 8 своим одноклассницам. Оказалось, что ровно 9 из них не получили ни одной ответной СМС.

Докажите, что из остальных 6 одноклассниц любые две обменялись СМС каждая с каждой.

УТВЕРЖДАЮ



К.С.ФАРИНО

LX Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

11 – 14 января 2009 года

11 класс

Второй день

5. Попарно различные ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y}.$$

Найдите все возможные значения $x + y + z$.

6. На доске записано несколько натуральных чисел. За один ход разрешается стереть произвольные два имеющихся числа a и b и вместо них записать число $\overline{ab} + 1$, где $\overline{ab}$ — число, которое получится, если к числу a приписать число b . (Например, приписав к числу 234 число 10, а затем прибавив 1, получим 23411.) Через несколько таких ходов на доске останется одно число. Может ли оставшееся число быть точным квадратом, если на доске первоначально записаны числа а) 1, 2, 3, 4, 5, 6? б) 1, 2, 3, 4, 5?

7. На медиане BM треугольника ABC (точка M — середина стороны AC) отметили точку P . Пусть прямые AP и CP пересекают BC и AB в точках E и D соответственно.

Докажите, что $S_{ABC} \geq 4S_{CDE}$, где S_{XYZ} — обозначает площадь треугольника XYZ .

8. В 11"а" классе некоторой школы 12 учениц. Каждая из них послала каким-то k своим одноклассницам перед Новым годом по поздравительной открытке. Оказалось, что есть две такие ученицы, из которых только одна отправила открытку другой и что, каких бы трех учениц A, B, C из этих 12 ни выбрать, среди них найдутся две такие, ни одна из которых не послала открытки другой.

При каком наибольшем k такое возможно?

7.5. Пусть a_i — рост i -го солдата в шеренге, $i = 1, 2, \dots, 30$, и пусть a_s — рост самого высокого солдата. Предположим, что утверждение задачи не верно. Тогда от 1-го до s -го солдаты стоят в порядке увеличения роста, а с s -го до 30-го — в порядке убывания роста. Впрочем, если $s = 30$, то все солдаты в шеренге стоят в порядке увеличения роста, т.е. вторая группа солдат (в которой рост солдат уменьшается) отсутствует. Значение $s = 1$ не возможно, так как тогда все солдаты стояли бы в порядке убывания роста и, значит, суммарный рост солдат, стоящих на четных местах, был бы меньше суммарного роста солдат, стоящих на нечетных местах, что противоречит условию задачи. Рассмотрим теперь группу солдат от 1-го до s -го, если s — четное число, или группу солдат от 1-го до $(s - 1)$ -го, если s — нечетное. Тогда в этой группе четное число солдат. В группе, которую составляют все остальные солдаты, также четное число солдат (возможно 0), причем в этой группе солдаты стоят в порядке убывания их роста. Поэтому во второй группе разность между суммарным ростом солдат с четными номерами и суммарным ростом солдат с нечетными номерами, отрицательная (или равна 0, если в этой группе нет солдат). Следовательно, в первой группе разность между суммарным ростом солдат с четными номерами и суммарным ростом солдат с нечетными номерами должна быть не менее 0,5 метра. Но эта разность, поскольку в первой группе солдаты стоят в порядке увеличения роста, не больше, чем разность между ростом последнего (самого высокого) солдата и ростом первого (самого низкого) солдата в этой группе. Получаем противоречие, так как по условию любые два солдата могут отличаться ростом менее, чем на 0,5 метра.

7.6. Ответ: а) да, может; б) нет, не может.

а) Пример получения куба:

$$1, 2, 3 \xrightarrow{2,3} 1, 24 \xrightarrow{1,24} 125 = 5^3.$$

б) Заметим, что если имеется два натуральных числа A и B , то общая сумма всех цифр чисел A и B равна сумме цифр числа $\overline{AB}$, полученного

приписыванием B к A . Так как остатки при деления на 9 у числа и у суммы его цифр одинаковы, то данная в условии операция к сумме цифр всех имеющихся на доске чисел прибавляет 1. Поскольку в самом начале есть 3 числа, а в конце остается одно число, то всего проводится две операции, и поэтому к начальной сумме цифр всех чисел добавляется 2. Таким образом, оставшееся на доске число x будет иметь остаток $(1 + 2 + 3) + 2 = 8$ при делении на 9. В частности, $x + 1$ будет делиться на 3, что невозможно, если x является квадратом (при $k = 3n$ имеем $k = 9n^2$, а при $k = 3n \pm 1$ имеем $k^2 = 3n(3n \pm 2) + 1$).

7.7. Предположим, что все школьные друзья каждого из 33-х учеников 7-го класса учатся в этом же классе.

Составим список всех возможных пар, которые можно образовать из учеников этого класса. Вычеркнем из него те пары, ученики в которых не дружат между собой. В списке останутся те и только те пары, ученики в которых между собой дружат. Пусть в нашем списке осталось N пар. Запасёмся мешком конфет. Вызвав пару учеников из нашего списка, выдадим каждому из двоих по конфете, а эту пару из списка вычеркнем, затем вызовем другую пару из нашего списка, выдадим каждому из них по конфете, а саму пару из списка вычеркнем, и так будем действовать до тех пор, пока в списке не останется невычеркнутых пар.

Сколько конфет мы раздали? Обозначим их число через S . С одной стороны, каждой из N пар списка мы выдали по 2 конфеты, а значит, раздали $2N$ конфет, т.е. $S = 2N$ и является чётным. С другой стороны, число конфет, которые мы раздали, равно числу наших конфет, которые имеются на руках у учеников 7-го класса. Но у каждого из них согласно предположению 5 или 7 конфет — в соответствии с тем, с каким числом учеников класса он дружит (т.е. сколько раз он подходил к нам для получения конфеты). Значит, число S конфет, которые мы раздали, равно сумме из 33 слагаемых (число учеников класса), каждое из которых равно 5 или 7, т.е. S — сумма нечётного количества нечётных чисел, а значит, S — нечётное число.

Итак, сделанное в начале решения предположение привело нас к противоречию: сумма S должна быть и чётной и нечётной одновременно, что невозможно. Следовательно, сделанное предположение неверно, а верно его отрицание, именно: хотя бы у одного ученика 7-го класса есть школьный друг не из этого класса.

7.8. Ответ: 16.

Пусть N — количество тестов, написанных Васей в первом полугодии, а b — средний балл Васи за первое полугодие. Тогда из условия следует,

что

$$\frac{Nb+8}{N+1} = b-1 \quad \text{и} \quad \frac{Nb+8+30}{N+2} = (b-1)+2.$$

Тогда из первого уравнения получаем $9 = b - N$, а из второго получаем $36 = N + 2b$. Поэтому $b = 15$. Следовательно, средний балл Васи за все тесты, включая февральский, равен $(b-1)+2 = 16$.

8 класс

8.5. Ответ: 100.

Преобразуем исходное выражение:

$$A = a^2 + 3b^2 + ab + 2b = a^2 + b^2 + ab + 2(b^2 + b) = (a+b)^2 - ab + 2(b^2 + b).$$

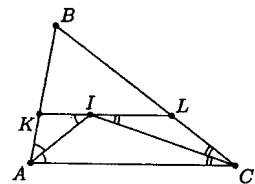
Так как a и b — корни уравнения $x^2 + x - 33 = 0$, то $b^2 + b - 33 = 0$, и по теореме Виета имеем $a+b = -1$, $ab = -33$. Таким образом, искомое значение

$$A = (a+b)^2 - ab + 2(b^2 + b) = 1 + 33 + 2 \cdot 33 = 100.$$

8.6. Ответ: 8.

Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Тогда IA и IC — биссектрисы углов BAC и BCA соответственно. Следовательно,

$$\angle KAI = \angle IAC, \quad \angle LCI = \angle ICA. \quad (1)$$



С другой стороны, $KL \parallel AC$, откуда $\angle KIA = \angle IAC$ (как внутренние накрест лежащие углы). Поэтому из (1) получаем $\angle KAI = \angle KIA$. Значит, треугольник AIK равнобедренный и $AK = KI$. Аналогично, $CL = LI$.

Таким образом,

$$KL = KI + IL = AK + CL \implies P(\triangle KBL) = BK + KL + BL = (BK + AK) + (BL + CL) = AB + BC = 3,5 + 4,5 = 8,$$

где $P(\triangle KBL)$ — искомый периметр треугольника KBL .

8.7. Ответ: а) нет, не может; б) да, может.

а) Заметим, что если имеется два натуральных числа A и B , то общая сумма всех цифр чисел A и B равна сумме цифр числа $\overline{AB}$, полученного приписыванием B к A . Так как остатки при делении на 9 у числа и у суммы его цифр одинаковы, то данная в условии операция от суммы цифр всех имеющихся на доске чисел отнимает 1. Поскольку в самом начале

есть 5 чисел, а в конце остается одно число, то всего проводится 4 операции, и поэтому от начальной суммы цифр всех чисел отнимается 4. Таким образом, оставшееся на доске число x будет иметь такой же остаток, как и число $(1+2+3+4+5) - 4 = 11$, т.е. 2, при делении на 9. В частности, $x+1$ будет делиться на 3, что невозможно, если x является квадратом (при $k = 3n$ имеем $k = 9n^2$, а при $k = 3n \pm 1$ имеем $k^2 = 3n(3n \pm 2) + 1$).

б) Пример получения квадрата:

$$1, 2, 3, 4 \xrightarrow{4,1} 2, 3, 40 \xrightarrow{40,3} 2, 402 \xrightarrow{2,402} 2401 = 49^2.$$

8.8. Ответ: б) да, может.

а) Всего 15 ученицами было отправлено друг другу $7 \cdot 15 = 105$ поздравительных открыток. Число отправленных открыток равно числу полученных открыток. Так как Галя получила 6 открыток, то остальные $15 - 1 = 14$ её одноклассниц получили вместе $105 - 6 = 99$ открыток. Поскольку $99 : 14 > 7$, то среди них есть ученица (назовём её A), получившая не менее 8 открыток. Если бы все открытки, которые получила A , были от одноклассниц, которым она не посылала открыток, то, поскольку она послала открытки 7 одноклассницам, у неё должно было бы быть не менее $8 + 7 = 15$ одноклассниц — тогда как их только 14. Значит, какая-то из 8-и полученных ученицей A открыток — от одноклассницы, которой и она послала открытку.

б) Пронумеруем одноклассниц числами от 1 до 15, и пусть они стоят по кругу в порядке возрастания номеров, если двигаться по ходу часовой стрелки. Если бы каждая одноклассница послала открытки следующим после неё по ходу часовой стрелки 7 одноклассницам, то каждая из одноклассниц получила бы по открытке от 7 предшествующих ей (если смотреть по ходу часовой стрелки) одноклассниц, т.е. каждая отправила и получила бы по 7 открыток, но обмена открытками ни у каких двух одноклассниц не было бы. Изменим в так заданной рассылке открыток только одно: 1-ая одноклассница вместо того, чтобы послать открытку 2-ой, послала её 9-ой однокласснице. Тогда 2-ая (это и есть Галя) получила 6 открыток, а обменялись открытками только две: 1-ая и 9-ая одноклассницы.

9 класс

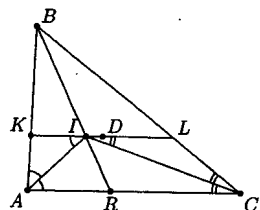
9.5. Предположим, от противного, что все уравнения имеют действительные корни. Тогда дискриминанты все трех уравнений неотрицательные, т.е.

$$4a^2 - 4b^2 \geq 0, \quad 4b^2 - 4c^2 \geq 0, \quad 4c^2 - a^2 \geq 0, \implies a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq a^2.$$

Тогда $a^2 = b^2 = c^2$. Последнее равенство невозможно, поскольку все числа a, b, c по условию попарно различны (так как $a \neq c$ и $b \neq c$, то $a = -c$ и $b = -c$, откуда $a = b$). Полученное противоречие и доказывает, что по крайней мере одно из уравнений не имеет действительных корней.

9.6. Ответ: 9.

Пусть D — точка пересечения медиан треугольника ABC , а I — центр вписанной в этот треугольник окружности. Тогда IA и IC — биссектрисы углов BAC и BCA соответственно. Следовательно,



$$\angle KAI = \angle IAC, \quad \angle LCI = \angle ICA. \quad (1)$$

С другой стороны, $KL \parallel AC$, откуда $\angle KIA = \angle IAC$ (как внутренние накрест лежащие углы).

Поэтому из (1) получаем $\angle KAI = \angle KIA$. Значит, треугольник AIK равнобедренный и $AK = KI$. Аналогично, $CL = LI$. Поскольку точка D пересечения медиан треугольника делит медианы, в частности, медиану из вершины B , в отношении $2 : 1$, считая от вершины, то

$$IL : RC = 2 : 3, \quad BL : IL = [LC = IL] = BL : LC = 2 : 1 \implies$$

$$IL = \frac{2}{3}RC, \quad BL = 2IL = \frac{4}{3}RC.$$

Аналогично,

$$KI = \frac{2}{3}AR, \quad BK = \frac{4}{3}AR.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(\Delta KBL) &= BK + KL + BL = (BK + KI) + (BL + IL) = \\ &= \left(\frac{4}{3}AR + \frac{2}{3}AR\right) + \left(\frac{4}{3}RC + \frac{2}{3}RC\right) = 2AR + 2RC = \\ &= 2(AR + RC) = 2AC = 2 \cdot 4,5 = 9, \end{aligned}$$

где $P(\Delta KBL)$ — искомый периметр треугольника KBL .

9.7. Ответ а) нет, не может; б) да, может.

а) Заметим, что если имеется два натуральных числа A и B , то общая сумма всех цифр чисел A и B равна сумме цифр числа $\overline{AB}$, полученного приписыванием B к A . Так как остатки при деления на 9 у числа и у суммы его цифр одинаковы, то данная в условии операция к сумме цифр всех имеющихся на доске чисел прибавляет 1. Поскольку в самом начале есть 4 числа, а в конце остается одно число, то всего проводится 3 операции, и поэтому к начальной сумме цифр всех чисел добавляется 3. Таким

образом, оставшееся на доске число x будет иметь такой же остаток, как и число $(1 + 2 + 3 + 4) + 3 = 13$, т.е. 4, при делении на 9.

Однако, точные кубы при делении на 9 могут давать лишь остатки 0, 1, 8 (так как $0^3, 3^3, 6^3$ дают остаток 0, $1^3, 4^3, 7^3$ дают остаток 1, $2^3, 5^3, 8^3$ дают остаток 8).

б) Пример получения куба:

$$1, 2, 3, 4 \xrightarrow{4,3} 1, 2, 44 \xrightarrow{44,2} 1, 443 \xrightarrow{1,443} 1444 = 38^2.$$

9.8. Пусть A — какая-либо из учениц. Через N обозначим множество тех одноклассниц ученицы A , которым она открыток не посылала (таких согласно условию 5 человек), а через E — множество тех её одноклассниц, которым она послала открытки (таких по условию 6 человек). Каких бы двух учениц B и C из множества E ни взять, ни одна из них не могла послать открытки другой (иначе, в противном случае, тройка A, B, C не удовлетворяла бы условию задачи — из любых двух учениц этой тройки хотя бы одна послала открытку другой). Значит, каждая ученица из множества E , поскольку она отправила 6 открыток, послала открытки каждой из 5 одноклассниц множества N , а также — открытку самой A . В частности, от каждой из тех 6 одноклассниц, которым A послала открытки, она получила ответные поздравительные открытки. Остаётся доказать, что кроме этих 6-и открыток других открыток ученица A не получала. В самом деле, если бы A получила открытку от какой-то одноклассницы B из множества N , то, взяв любую ученицу C из множества E , получили бы, что тройка A, B, C не удовлетворяет условию задачи. Утверждение задачи доказано.

После того, как доказано, что каждая из учениц получила не менее 6-и открыток, и эти 6 открыток — от тех, кому и она направила открытки, доказать, что каждая ученица других открыток не получала, можно было бы и так. Если бы какая-то ученица получила открытку от той своей одноклассницы, которой она не отправляла открытки, то всего эта ученица получила бы не менее $6 + 1 = 7$ открыток, а значит, всего вместе девочками было бы получено не менее $6 \cdot 11 + 7 = 73$ открыток. Но число полученных открыток должно равняться числу отправленных открыток, а отправлено согласно условию задачи $6 \cdot 12 = 72$ открытки.

Хотя для решения задачи это не нужно, отметим, что ситуация, описанная в её условии, возможна и лишь в единственном случае — когда 12 одноклассниц разбиты на два множества по 6 девочек в каждом, и каждая девочка послала по поздравительной открытке только каждой однокласснице из другого множества.

10.5. Предположим, от противного, что ни одно из уравнений не имеет действительных корней. Тогда дискриминанты всех уравнений должны быть отрицательными, т.е.

$$a^2 - 4(b-1) < 0, \quad b^2 - 4(c-1) < 0, \quad c^2 - 4(a-1) < 0.$$

Складывая эти три неравенства, получим

$$\begin{aligned} 0 &> a^2 - 4(b-1) + b^2 - 4(c-1) + c^2 - 4(a-1) = a^2 + b^2 + c^2 - 4a - 4b - 4c + 12 = \\ &= (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 4c + 4) = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

чего быть не может. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

10.6. Ответ: 90° .

Воспользуемся хорошо известным результатом: если Q точка касания вписанной в

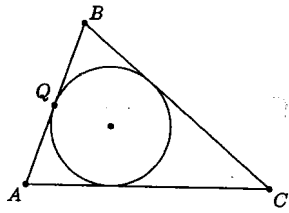


Рис. 1

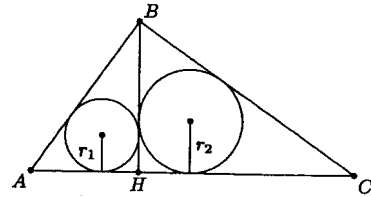


Рис. 2

треугольник ABC окружности и стороны AB (см. рис. 1), то

$$BQ = \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

В частности, если треугольник ABC прямоугольный и $\angle B = 90^\circ$, то $BQ = r$ (r — радиус вписанной окружности) и

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2}. \quad (1)$$

Заметим, что имеет место и обратное утверждение, т.е. из выполнения равенства (1) следует, что $\angle B = 90^\circ$.

Поэтому (см. рис. 2) для прямоугольного треугольника ABH имеем

$$r_1 = \frac{AH + BH - AB}{2},$$

а для прямоугольного треугольника BH имеем

$$r_2 = \frac{CH + BH - BC}{2}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$r_1 + r_2 = \frac{AH + BH - AB}{2} + \frac{CH + BH - BC}{2} = \frac{AC - AB - BC}{2} + BH.$$

Из условия следует, что $r_1 + r_2 = BH - r$, откуда

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

Из последнего равенства, как было указано выше, следует, что

$$\angle ABC = 90^\circ.$$

10.7. Ответ а) нет, не может; б) да, может.

а) Заметим, что если имеется два натуральных числа A и B , то общая сумма всех цифр чисел A и B равна сумме цифр числа $\overline{AB}$, полученного приписыванием B к A . Так как остатки при делении на 9 у числа и у суммы его цифр одинаковы, то данная в условии операция к сумме цифр всех имеющихся на доске чисел прибавляет 1. Поскольку в самом начале есть 4 числа, а в конце остается одно число, то всего проводится 3 операции, и поэтому к начальной сумме цифр всех чисел добавляется 3. Таким образом, оставшееся на доске число x будет иметь такой же остаток, как и число $(1 + 2 + 3 + 4) + 3 = 13$, т.е. 4, при делении на 9.

Однако, точные кубы при делении на 9 могут давать лишь остатки 0, 1, 8 (так как $0^3, 3^3, 6^3$ дают остаток 0, $1^3, 4^3, 7^3$ дают остаток 1, $2^3, 5^3, 8^3$ дают остаток 8).

б) Пример получения куба:

$$1, 2, 3, 4, 5 \xrightarrow{2,3} 1, 4, 5, 24 \xrightarrow{5,4} 1, 24, 55 \xrightarrow{1,55} 24, 156 \xrightarrow{156,24} 15625 = 25^3.$$

10.8. Пронумеруем одноклассниц числами от 1 до 15 и поставим в соответствие однокласснице i некоторую (свою для каждой) точку i на плоскости ($1 \leq i \leq 15$). Не нарушая общности считаем, что никакие три из этих 15-и точек не лежат на одной прямой и что тем 9-и девочкам, которые согласно условию не получили ответных СМС-ок, отвечают точки 1, 2, ..., 9.

Если одноклассница k послала СМС-ку однокласснице m , то соединим точки k и m отрезком со стрелкой у точки m . Если же и m послала

СМС-ку k , то на этом отрезке поставим стрелку и у точки k . Такие отрезки — с двумя стрелками — будем называть двойными, в отличие от отрезков с одной стрелкой, которые назовём одинарными.

Так как всего 15 одноклассниц отправили $15 \cdot 8 = 120$ СМС-ок, то должно быть проведено 120 отрезков со стрелками (при этом двойной отрезок считается дважды). Но всего отрезков, которые можно провести между 15-ю точками, ровно $15 \cdot 14/2 = 105$. Значит, из 120 проведённых отрезков ровно $120 - 105 = 15$ двойных. Ни один из этих двойных отрезков не может иметь концом ни одну из точек $1, 2, \dots, 9$, так как ни одна из одноклассниц, которым эти точки соответствуют, не получила согласно условию ответной СМС-ки (т. е., иными словами, все отрезки, хотя бы один из концов которых $1, 2, \dots, 9$ — одинарные). Следовательно, оба конца всех 15 двойных отрезков находятся среди 6-и точек $10, 11, \dots, 15$. Но между 6-ю точками можно провести ровно $6 \cdot 5/2 = 15$ отрезков, а значит, все эти отрезки — двойные. Это и означает, что те 6 одноклассниц, которым соответствуют точки $10, 11, \dots, 15$, обменялись СМС-ками каждая с каждой.

11 класс

11.5. Ответ: $x + y + z = 2$.

Если числа x, y, z ненулевые и попарно различные, то

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x} &= \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3z + y^3x + z^3y - x^3y - y^3z - z^3x}{xyz} = \\ &= \frac{2(x^2z + y^2x + x^2y - x^2y - y^2z - z^2x)}{xyz} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} = \frac{2(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $x + y + z = 2$.

11.6. Ответ: нет, не может; б) да, может.

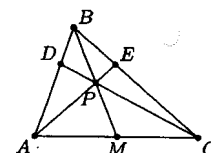
Заметим, что если имеется два натуральных числа A и B , то общая сумма всех цифр чисел A и B равна сумме цифр числа $\overline{AB}$, полученного приписыванием B к A . Так как остатки при делении на 9 у числа и у суммы его цифр одинаковы, то данная в условии операция к сумме цифр всех имеющихся на доске чисел прибавляет 1. Поскольку в самом начале есть

6 чисел, а в конце остается одно число, то всего проводится 5 операций, и поэтому к начальной сумме цифр всех чисел добавляется 5. Таким образом, оставшееся на доске число x будет иметь такой же остаток, как и число $(1+2+3+4+5+6)+5=26$, т. е. 8, при делении на 9. В частности, $x+1$ будет делиться на 3, что невозможно, если x является квадратом (при $k=3n$ имеем $k=9n^2$, а при $k=3n\pm 1$ имеем $k^2=3n(3n\pm 2)+1$).

б) Пример получения квадрата:

$$1, 2, 3, 4, 5 \xrightarrow{2,3} 1, 4, 5, 24 \xrightarrow{5,4} 1, 24, 55 \xrightarrow{1,55} 24, 156 \xrightarrow{156,24} 15625 = 125^2.$$

11.7. Пусть $AD/DB = \lambda$. Тогда по теореме Чебы имеем, что



$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

откуда $\frac{BE}{EC} = 1/\lambda$, т. е. $\frac{CE}{EB} = \lambda$. Поэтому

$$S_{CDE} = \frac{\lambda}{\lambda+1} S_{CDB} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\lambda+1} S_{ABC} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} S_{ABC}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$(\lambda+1)^2 \geq 4\lambda \implies (\lambda-1)^2 \geq 0, \text{ т. е. } \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

11.8. Ответ: 5.

Докажем, что при $k=6$ ситуация, описанная в условии задачи, невозможна. Пусть A и X — те две такие одноклассницы, существующие по условию задачи, что A послала открытку X , а X открытку A не послала. Через N обозначим множество тех одноклассниц A , которым она открыток не послала (таких 5 человек, поскольку $k=6$), а через E — множество тех её одноклассниц, которым она послала открытки (таких 6 человек, среди которых и X). Каких бы двух учениц B и C из множества E ни взять, ни одна из них не могла послать открытки другой (иначе, в противном случае, тройка A, B, C не удовлетворяла бы условию задачи — из любых двух учениц этой тройки хотя бы одна отправила открытку другой). Значит, каждая ученица из множества E , поскольку она отправила 6 открыток, послала открытки каждой из 5 одноклассниц множества N , а также — открытку самой A . В частности, и X должна была бы отправить открытку A , чего быть не может. Итак, при $k=6$ ситуация, описанная в условии задачи, невозможна.

Ясно, что она невозможна и при $k > 6$. В самом деле, допустим, что одноклассницы могут послать по k , где $k > 6$, открыток каждая так, что

будут выполнены все условия задачи. Пусть каждая из них перед такой рассылкой открыток составила список тех одноклассниц, каким она собирается послать открытки. Зафиксируем тех двух одноклассниц A и X , из которых A собирается послать открытку X , а X посылать открытку A не собирается. Теперь возьмём у каждой одноклассницы составленный ею список и вычеркнем из него произвольным образом $k - 6$ имён (т. е. в каждом списке останется только 6 имён), при этом проследим, чтобы имя X из списка ученицы A вычеркнуто не было. Очевидно, что если одноклассницы отправят открытки согласно имеющимся у них исправленным спискам, то все условия задачи при $k = 6$ будут выполнены. Но этого, как доказано, быть не может. Следовательно, $k \leq 5$.

Остаётся построить удовлетворяющий всем условиям задачи пример для $k = 5$. Разобьём 12 одноклассниц на 4 множества M_1, M_2, M_3 и M_4 по 3 девочки в каждом. Пусть каждая девочка из M_1 обменялась открытками с каждой девочкой из M_2 , а каждая девочка из M_3 — открытками с каждой девочкой из M_4 . Пока всего каждой девочкой послано по 3 открытки. Пронумеруем теперь в каждом из множеств M_2 и M_3 учениц: 1, 2, 3. Пусть 1-ая из M_2 обменялась открытками с 1-ой и 2-ой из M_3 ; 2-ая из M_2 — со 2-ой и 3-ей из M_3 , а 3-ая из M_2 — с 3-ей из M_3 , и, наконец, 3-ая из M_2 отправила открытку 2-ой из M_3 , а 1-ая из M_3 отправила открытку 3-ей из M_2 . Точно так же пошлём открытки между ученицами множеств M_1 и M_4 . Убедимся, что так определённая посылка открыток удовлетворяет всем условиям задачи при $k = 5$.

В самом деле, согласно построению каждая одноклассница отправила ровно по 5 открыток. Имеются две одноклассницы — например, 1-ая из M_3 и 3-ая из M_2 — из которых только одна отправила открытку другой. Покажем, наконец, что, каких бы три одноклассницы A, B, C ни выбрать, среди них найдутся две такие, ни одна из которых не отправила открытки другой. Действительно, если хотя бы две из A, B, C принадлежат одному и тому же множеству M_i , $1 \leq i \leq 4$, то ни одна из этих двух согласно построению не послала открытки другой (одноклассницы из одного и того же множества открыток друг другу не посылали). Если же все три — из разных множеств M_i , то среди тех трёх множеств M_i , которым принадлежат A, B, C , есть два с одинаковой чётностью индексов (поскольку у нас только четыре множества M_1, M_2, M_3 и M_4). Но согласно построению одноклассницы из множеств M_i с одинаковой чётностью индексов открыток друг другу не посылали.