УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

8 класс
Второй день

5. Миша перемножил несколько простых чисел (не обязательно различных) и получил число X. Коля уменьшил каждое из этих простых чисел на 2, перемножил полученные числа и получил число Y. Оказалось, что $X : Y = 707$.

Каким могло быть число X ?

6. На прямой отмечено конечное число (не менее двух) синих точек и n красных точек так, что расстояние между двумя любыми различными красными точками больше расстояния между любой красной и любой синей точками, а расстояние между любыми двумя синими точками меньше расстояния между любой красной и любой синей точками.

а) Какое наибольшее значение может принимать n ?

б) Может ли расстояние между какими-то двумя красными точками равняться 25 см, если известно, что существуют две синие точки на расстоянии 10 см друг от друга ?

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы улов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом $30°$.

Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B.

8. В некотором городе, в котором все знакомы друг с другом, живут лжецы, которые всегда лгут, и правдивые, которые всегда говорят правду. В город прибыл инспектор и каждому жителю задал вопрос о том, является ли лжецом или правдивым некоторый житель города. При этом ни об одном горожанине инспектор не спрашивал дважды. После опроса все жители, названные лжецами, были арестованы и высланы из города. Хотя, конечно, не все они действительно были лжецами, но число всех высланных оказалось равно реальному числу лжецов. После высылки число лжецов среди оставшихся жителей стало в 3 раза больше числа правдивых.

Во сколько раз число лжецов было больше числа правдивых первоначально?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 4,5 часа

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

9 класс
Второй день

5. Петя перемножил несколько простых чисел (не обязательно различных) и получил число A. Вася уменьшил каждое из этих простых чисел на 1, тоже перемножил полученные числа и получил число B. Оказалось, что $A : B = 2013$.

Сколько всего чисел перемножал Петя?

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, а в треугольнике ALC – биссектриса LM. Известно, что $AM = ML$ и $BC = AC\sqrt{3}$.

Найдите углы треугольника ABC.

7. а) Докажите, что не существует такой четвёрки $(a; b; c; d)$ ненулевых чисел a, b, c, d, среди которых нет равных, что какие-то два из этих чисел являются корнями уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а два другие – корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$.

б) Найдите все такие четвёрки $(a; b; c; d)$ чисел a, b, c, d, среди которых нет равных (но возможно есть нулевое), что какие-то два из этих чисел являются корнями уравнения $x^2 - ax + b = 0$, а два другие – корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$.

8. На окружности отмечено $s \geqslant 2$ синих точек и $k \geqslant 2$ красных точек. Оказалось, что расстояние между любыми двумя различными красными точками больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета, а расстояние между любыми двумя синими точками меньше расстояния между любыми двумя точками разного цвета.

Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

10 класс
Второй день

5. Известно, что a и b — действительные числа, удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) график функции $y = x^2 + 2bx + a$ получается из графика функции $y = (ax+b)^2$ некоторым сдвигом параллельно оси ординат Oy;

2) прямая $y = ax + b$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 2bx + a$ единственную общую точку.

Найдите все такие пары $(a; b)$ действительных чисел.

6. Найдите все четвёрки $(k; l; m; n)$ натуральных чисел k, l, m и n, удовлетворяющих равенствам

$$(k+l)(m+n) = 9 + 2lm = 19 + 2kn.$$

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Лучи BB_1 и AA_1 пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках B_2 и A_2 соответственно. Пусть N — точка пересечения отрезков B_1A_2 и A_1B_2. Прямая HN пересекает отрезок A_1B_1 в точке M.

Найдите значение отношения $A_1M : B_1M$.

8. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Какое наибольшее число точек на окружности можно отметить и покрасить их в n цветов, так, чтобы присутствовали точки каждого цвета и чтобы расстояние между любыми двумя различными точками одного цвета было больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета ?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

УТВЕРЖДЕНО

Заместитель председателя организационного комитета заключительного этапа республиканской олимпиады
Заместитель Министра образования Республики Беларусь

В.А. БУДКЕВИЧ

20 декабря 2012 г.

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

11 класс
Второй день

5. Найдите все тройки $(a; b; c)$ действительных попарно различных чисел a, b и c, если известно, что каждое из них является корнем многочлена $x^3 - \dfrac{5a}{4}x^2 + bx + c$.

6. В параболу $y = x^2$ вписана равнобедренная трапеция $ABCD$, основания которой AD и BC параллельны оси абсцисс, а угол между диагональю и боковой стороной равен $90°$. Известно также, что нижнее основание BC трапеции равно боковой стороне.

Найдите площадь трапеции.

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть l – касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, в точке C. Лучи BB_1 и AA_1 пересекают l в точках B_2 и A_2 соответственно. Пусть N – точка пересечения отрезков B_1A_2 и A_1B_2. Прямая HN пересекает отрезок A_2B_2 в точке M.

Найдите значение отношения $A_2M : B_2M$.

8. На плоскости отмечено n красных и n синих точек. Оказалось, что расстояние между любыми двумя различными красными точками больше расстояния между любой красной и любой синей точками, а расстояние между любой красной и любой синей точками больше расстояния между любыми двумя синими точками.

Какое наибольшее значение может принимать число n?

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов

LXIII Белорусская математическая олимпиада школьников

III этап

14 – 18 января 2013 года

Решения

Второй день

8 класс

8.5. Ответ: $9\,449\,055$.

Так как $X = 707 \cdot Y$ и $707 = 101 \cdot 7$, где 101 и 7 — простые числа, то 101 и 7 — одни из Мишиных множителей и, значит, $99 = 101 - 2$ и $5 = 7 - 2$ — одни из множителей Коли. Тогда

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101 \cdot 7 \cdot x}{99 \cdot 5 \cdot y},$$

где x — произведение остальных простых множителей Миши, а y — произведение остальных множителей Коли. Так как число $\frac{X}{Y}$ целое, то x содержит все простые множители, которые необходимы, чтобы при упрощении дроби $\frac{X}{Y}$ числа 99 и 5 сократились. То есть, $x = 99 \cdot 5 \cdot a = 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a$ и тогда, соответственно, $y = 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b$, где a и b — некоторые целые числа. Имеем:

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a}{99 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b}.$$

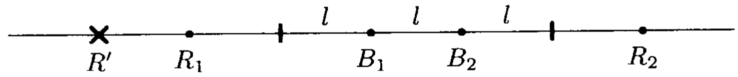
Снова, поскольку $\frac{X}{Y}$ — целое число, новые обнаруженные множители числа Y, т. е. 9 и 3 должны сокращаться с множителями числа a. Следовательно, $a = 9 \cdot 3 \cdot c = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot c$, и тогда, соответственно, $b = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d$, где c и d — некоторые натуральные числа. В результате,

$$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot c}{99 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d}.$$

Поскольку после сокращения числовых множителей получаем $707 = \frac{X}{Y} = \frac{707\,c}{d}$, то $c = d$. Если бы число c имело простые делители: $c = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые, то согласно условию $d = (p_1 - 2) \cdot \ldots \cdot (p_k - 2)$, — и равенство $c = d$ невозможно. Поэтому $c = 1$ и, значит, $X = 101 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^5 = 9\,449\,055$.

8.6. Ответ: **а)** 2; **б)** нет, не может.

Рассмотрим две синие точки B_1 и B_2, расстояние между которыми наибольшее среди



расстояний между синими точками (см. рис.); пусть расстояние B_1B_2 между ними равно l. Тогда согласно условию каждая красная точка должна быть расположена на расстоянии большем l от каждой из точек B_1 и B_2. В частности, нет ни одной красной точки между B_1 и B_2 и красные точки могут быть только на расстоянии большем l левее точки B_1 или правее точки B_2. Пусть R_1 – красная точка, ближайшая к B_1, расположенная левее B_1. Предположим, что левее R_1 есть ещё красная точка R'. Тогда очевидно $R'B_1 > R'R_1$, что противоречит условию задачи (расстояние между любыми двумя различными красными точками должно быть больше расстояния между любой красной и любой синей точками). Следовательно, левее B_1 может быть не более одной красной точки. Аналогично, правее B_2 также может быть не более одной красной точки. И значит, $n \leqslant 2$. С другой стороны, если две красные точки R_1 и R_2 расположены так, как показано на рисунке (т. е. на расстоянии, большем l от ближайшей синей точки), то все условия задачи очевидно выполняются. Поэтому наибольшее значение n равно 2, что является ответом на вопрос п. **а)** задачи. Наконец, если имеются две синие точки на расстоянии 10 см, то $l = B_1B_2 \geqslant 10$ и, значит, $R_1R_2 > 3l \geqslant 30$. Поэтому красные точки не могут находиться на расстоянии 25 см, что является ответом на вопрос п. **б)** задачи.

8.7. Ответ: $75°$.

Без ограничения общности можно считать, что биссектриса угла C пересекает сторону AD; пусть A_1 – соответствующая точка пересечения (см. рис. 1).

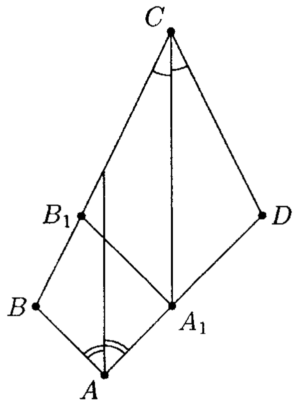


Рис. 1

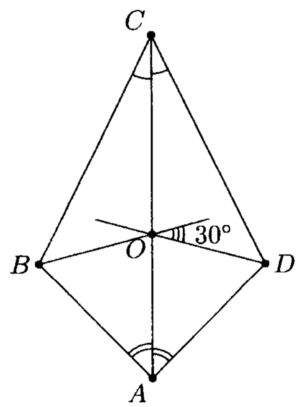


Рис. 2

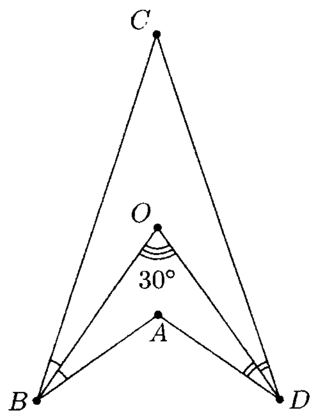


Рис. 3

Проведём $A_1B_1 \| AB$. Поскольку стороны четырёхугольника $ABCD$ соответственно параллельны сторонам четырёхугольника A_1B_1CD, то и биссектрисы соответственных углов этих четырёхугольников параллельны друг другу. Поэтому вместо четырёхугольника $ABCD$ можно рассмотреть четырёхугольник A_1B_1CD, или, что то же самое, считать, что в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой углов A и C (см. рис. 2). Тогда, легко видеть, что $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по общей стороне AC и прилегающим углам). Поэтому четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно диагонали AC (точки B и D совмещаются при перегибании листа вдоль прямой AC). Значит, точка пересечения биссектрис углов B и D – точка O – находится на диагонали AC. Угол $\angle BOD$ либо тупой (без ограничения общности можно считать, что $AB < BC$) и тогда согласно условию равен $150° = 180° - 30°$ (см. рис. 2), либо равен $30°$. Тогда, очевидно, в первом случае $\angle BOA = 0,5 \cdot \angle BOD = 75°$. А второй случай невозможен, поскольку в этом случае четырёхугольник $ABCD$ – не выпуклый. Действительно, если $\angle BOD = 30°$, то внутренний угол четырёхугольника $OBCD$ при вершине O равен $360° - 30° = 330°$ (см. рис. 3). Поэтому сумма остальных трёх углов этого четырёхугольника равна $30°$. А так как $\angle CBA = 2\angle CBO$ и $\angle CDA = 2\angle CDO$, то $\angle BCD + \angle CBA + \angle CDA < 2 \cdot 30° = 60°$. Но тогда внутренний угол четырёхугольника $ABCD$ при вершине A больше $360° - 60° = 300°$, а значит, четырёхугольник $ABCD$ не является выпуклым.

8.8. Ответ: в $1,5$ раза.

Пусть у x лжецов спрашивалось их мнение о правдивых, а у y лжецов – о лжецах. Значит, x лжецов назвали x правдивых горожан лжецами, а y лжецов назвали y лжецов правдивыми.

Пусть у a правдивых спрашивалось их мнение о лжецах, а у b правдивых — о правдивых. Значит, a правдивых назвали a лжецов лжецами, а b правдивых назвали b правдивых правдивыми.

Следовательно, при опросе ровно $x + a$ горожан были названы лжецами и затем выселены из города. Согласно условию число выселенных равно действительному число лжецов-горожан, т. е. $x + a = x + y$, откуда $a = y$.

Поскольку было выселено $a = y$ действительных лжецов, то $(x + y) - y = x$ действительных лжецов осталось в городе. С другой стороны, в городе осталось ровно y действительных лжецов (в точности тех, которых лжецы назвали правдивыми). Поэтому $x = y$. Следовательно, $a = y = x$.

Итак, первоначально в городе было $x+y = 2a$ лжецов и $a+b$ правдивых. После выселения осталось a лжецов и b правдивых. Согласно условию $a = 3b$. Поэтому до выселения число лжецов было больше числа правдивых в $2a : (a + b) = 6b : 4b = 1,5$ раза.

9 класс

9.5. Ответ: 15 чисел.

Так как $A = 2013 \cdot B$ и $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, где 3, 11 и 61 — простые числа, то 3, 11 и 61 — одни из Петиных множителей и, значит, $2 = 3 - 1$, $10 = 11 - 1$ и $60 = 61 - 1$ — одни из множителей Васи. Тогда

$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot x}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot y},$$

где x — произведение остальных простых множителей Пети, а y — произведение остальных множителей Васи. Так как число $\frac{A}{B}$ целое, то x содержит все простые множители, которые необходимы, чтобы при упрощении дроби $\frac{A}{B}$ числа 60, 10 и 2 сократились. То есть $x = 60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a$, и тогда, соответственно, $y = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b$, где a и b — некоторые целые числа. Имеем:

$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b}.$$

Снова, поскольку $\frac{A}{B}$ — целое число, новые обнаруженные множители числа B, т. е. 4, 4 и 2 должны сокращаться с множителями числа a. Следовательно, $a = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot c$, и тогда, соответственно, $b = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d$. В результате,

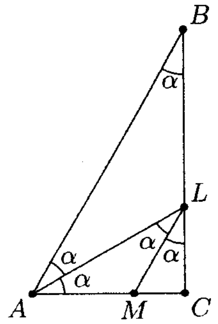
$$2013 = \frac{A}{B} = \frac{61 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot c}{60 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d}.$$

Поскольку после сокращения числовых множителей получаем $2013 = \frac{A}{B} = \frac{2013c}{d}$, то $c = d$. Если бы число c имело простые делители: $c = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые, то согласно условию $d = (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1)$, — и равенство $c = d$ невозможно. Поэтому $c = 1$ и, значит, $A = 61 \cdot 11 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^9 = 277\,299\,200$. В частности, Петя перемножил 15 чисел.

9.6. Ответ: $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$.

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle BAL = \angle LAM = \alpha$ (так как AL — биссектриса). Поскольку по условию $AM = ML$, то $\angle ALM = \angle LAM = \alpha$. Поэтому $\angle BAL = \alpha = \angle ALM$, и, следовательно, $LM \parallel AB$. Тогда треугольники MLC и ABC подобны, и $LC : MC =$

$= BC : AC = \sqrt{3}$, откуда $LC = MC\sqrt{3}$. Поэтому по теореме Фалеса ($LM \parallel AB$) получаем $BL : AM = LC : MC = \sqrt{3}$, т. е. $BL = \sqrt{3}AM$. Так как по условию LM – биссектриса $\angle ALC$, то $\angle ALM = \alpha = \angle MLC$. Значит, $\angle ABC = \angle MLC = \alpha$ (как соответственные углы при параллельных прямых AB и ML и их секущей BC). Так как в $\triangle ABL$ углы при стороне AB равны, он равнобедренный и $AL = BL = \sqrt{3}AM$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ALM : его основание $AL = 2\cos\alpha \cdot AM$, и, следовательно, $2\cos\alpha = \sqrt{3}$. Значит, $\alpha = 30°$. Окончательно, $\angle A = 2\alpha = 60°$, $\angle B = \alpha = 30°$ и $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 90°$.



9.7. Ответ: **б)** $b = 0$, $c = -1$, $d = 1$, a – любое действительное число, отличное от чисел 0, -1, 1.

Так как a, b, c, d – корни уравнений

$$x^2 - ax + b = 0, \tag{1}$$

$$x^2 - bx + c = 0, \tag{2}$$

то, как следует из теоремы Виета,

$$a + b + c + d = a + b, \tag{3}$$

$$abcd = bc. \tag{4}$$

а) Поскольку среди чисел a, b, c, d нет нулевых, то из (4) следует

$$ad = 1. \tag{5}$$

Кроме того, число b не может быть корнем уравнения (2), ибо в противном случае второй корень α этого уравнения был бы равен 0 (по теореме Виета $\alpha + b = -(-b)$), а по условию среди корней уравнений (1) и (2) нет нулевых. Следовательно, b – корень уравнения (1). Тогда второй корень β этого уравнения равен 1 (по теореме Виета $\beta b = b$, $b \neq 0$). Если бы вторым корнем уравнения (1) было число a или d, например, $a = \beta = 1$, то из (5) следовало бы $d = 1$, но $a \neq d$, противоречие. Аналогично получаем противоречие при предположении $d = \beta = 1$. Следовательно, вторым корнем уравнения (1) является число c, т. е. $c = \beta = 1$. Но тогда из (3) следует, что $d = -c = -1$ и из (5) теперь следует, что $a = -1$, т. е. $a = d$, противоречие.

Таким образом указанной в условии четвёрки чисел, не содержащей нуля, не существует.

б) Ни число a, ни число d не могут быть нулевыми, ибо тогда, в силу (4), по крайней мере ещё одно из чисел b или c было бы равно нулю, в противоречие с тем, что среди a, b, c, d нет равных чисел.

Предположим, что $c = 0$. Тогда $b \neq 0$, так как $b \neq c$. Число c не является корнем уравнения (1), ибо в противном случае произведение корней этого уравнения было бы равно 0, а по теореме Виета оно равно $b \neq 0$. Следовательно, c – корень уравнения (2), которое будет иметь вид $x^2 - bx = 0$, и, значит, второй корень этого уравнения равен b. Поэтому a – корень уравнения (1), но тогда $a^2 - a \cdot a + b = 0$, откуда $b = 0$, противоречие

Итак, остался возможным лишь случай $b = 0$. Тогда $c \neq 0$, так как $b \neq c$. Число b не является корнем уравнения (2), ибо в противном случае произведение корней этого уравнения было бы равно 0, а по теореме Виета оно равно $c \neq 0$. Следовательно, b – корень уравнения (1), которое будет иметь вид $x^2 - ax = 0$, и, значит, второй корень этого уравнения равен a. Поэтому числа c и d – корни уравнения (2), которое имеет вид $x^2 + c = 0$. По теореме Виета $cd = c$, откуда $d = 1$ ($c \neq 0$), но тогда $1^2 + c = 0$, откуда $c = -1$.

Таким образом, окончательно получаем, что указанными в условии четвёрками чисел могут быть лишь $(a; b; c; d) = (a; 0; -1; 1)$, где a — любое действительное число, отличное от чисел 0, -1 и 1. Легко проверить, что любая такая четвёрка удовлетворяет условию, поскольку числа a и $b = 0$ являются корнями уравнения $x^2 - ax = 0$, а числа $c = -1$ и $d = 1$ являются корнями уравнения $x^2 - 1 = 0$.

9.8. Ответ: $k = 2$.

Пусть B_1 и B_2 — пара синих точек, расстояние между которыми наибольшее

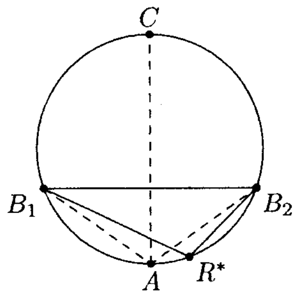


Рис. 1

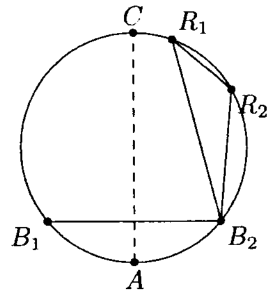


Рис. 2

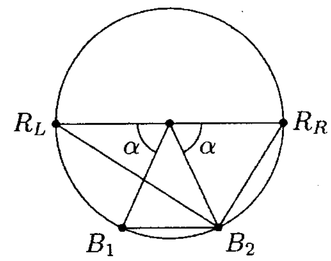


Рис. 3

из всех расстояний между любыми двумя синими точками (если таких пар точек несколько, возьмём любую из них). Пусть AC — диаметр окружности, перпендикулярный хорде B_1B_2 (и, следовательно, проходящий через её середину). Поскольку хорда B_1B_2 не может быть диаметром (тогда бы расстояние B_1B_2 было не меньше расстояния между любыми двумя разноцветными точками), то эта хорда делит окружность на две дуги — большую и меньшую. Не нарушая общности, считаем, что $\smile B_1AB_2 <\smile B_1CB_2$, тогда $\angle B_1AB_2 > 90°$ (см. рис. 1). Легко видеть, что никакая красная точка R^* не может лежать на дуге B_1AB_2, поскольку тогда $\angle B_1R^*B_2 = \angle B_1AB_2 > 90°$, и, значит $B_1B_2 > B_1R^*$, что противоречит условию.

Если бы на дуге B_1CB_2 между точками C и B_2 было отмечено по крайней мере две красные точки R_1 и R_2, то очевидно $\smile R_1R_2B_2 >\smile R_1R_2$, что приводит к неравенству $R_1R_2 < R_1B_2$ — в противоречие с условием (см. рис. 2). Таким образом, на дуге B_1CB_2 между точками C и B_2 отмечено не более одной красной точки. Аналогично, на дуге B_1CB_2 между точками C и B_1 также отмечено не более одной красной точки. Следовательно, на окружности отмечено не более двух красных точек.

Осталось показать, что на окружности действительно можно отметить две красные точки и несколько синих с соблюдением условия задачи. Указанная конструкция изображена на рис. 3, где угол $60° < \alpha < 90°$. Красные точки R_L и R_R диаметрально противоположны, поэтому расстояние R_LR_R больше расстояния между любыми двумя другими точками. Кроме того, так как $90° > \alpha > 60°$, то $\smile R_LB_1B_2 = \alpha + (180° - 2\alpha) > 90° > \alpha > 180° - 2\alpha = \smile B_1B_2$, и, значит, $R_LR_R > R_LB_2 > R_RB_2 > B_1B_2$. Аналогично получаем $R_LR_R > R_LB_2 > R_LB_1 > B_1B_2$.

10 класс

10.5. Ответ: $\left(1; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Условие 1) из формулировки задачи равносильно условию: найдётся такое действительное h, что при всех действительных x верно равенство

$$(ax + b)^2 + h = x^2 + 2bx + a. \qquad (1)$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (1), получим равносильную ему систему

$$\begin{cases} a^2 = 1, \\ 2ab = 2b, \\ b^2 + h = a. \end{cases} \qquad (2)$$

Из второго уравнения этой системы следует, что могут представиться только две возможности: либо а) $b = 0$, либо б) $b \neq 0$ и $a = 1$.

Условие 2) из формулировки задачи равносильно условию: уравнение

$$ax + b = x^2 + 2bx + a \qquad (3)$$

имеет единственное решение. Поскольку уравнение (3) — это квадратное уравнение $x^2 + (2b - a)x + a - b = 0$, то оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = (2b - a)^2 - 4(a - b) = 4b^2 - 4ab + a^2 - 4a + 4b$ равен нулю, т. е.

$$4b^2 - 4ab + a^2 - 4a + 4b = 0. \qquad (4)$$

Для нахождения значений a и b, удовлетворяющих уравнению (4), воспользуемся найденными ранее условиями а) и б).

Если выполнено условие а) $b = 0$, то, подставляя в (4) вместо b нуль, получим уравнение $a^2 - 4a = 0 \iff a = 0$ или $a = 2$. Ни одно из этих значений a невозможно, поскольку они противоречат первому уравнению системы (1).

Если выполнено условие б) $b \neq 0$ и $a = 1$, то, подставляя в (4) вместо a единицу, получим уравнение $4b^2 - 3 = 0 \iff b = -\sqrt{3}/2$ или $b = \sqrt{3}/2$.

Итак, либо $(a; b) = (1; -\sqrt{3}/2)$, либо $(a; b) = (1; \sqrt{3}/2)$.

Обе найденные пары $(a; b)$ удовлетворяют условию задачи, поскольку, как это следует из проведённых рассуждений, удовлетворяют системе (2) и уравнению (4), а они, в свою очередь, равносильны соответственно условиям 1) и 2) из формулировки задачи. Отметим, что при выполнении первых двух уравнений системы (2) и уравнения (4) третье уравнение системы (2) выполняется автоматически.

10.6. Ответ: $(1; 4; 2; 3)$ и $(3; 2; 4; 1)$.

Запишем заданную систему в привычном виде

$$\begin{cases} (k + l)(m + n) = 9 + 2lm, \\ (k + l)(m + n) = 19 + 2kn, \end{cases}$$

или, раскрыв скобки и приведя подобные члены, — в равносильном виде

$$\begin{cases} km + kn - lm + ln = 9, \\ km - kn + lm + ln = 19. \end{cases}$$

Заменив уравнения последней системы их суммой и разностью, получим равносильную систему

$$\begin{cases} km + ln = 14, \\ kn - lm = -5. \end{cases} \qquad (*)$$

Возведём обе части каждого уравнения системы $(*)$ в квадрат и сложим получившиеся уравнения, получим

$$k^2m^2 + l^2n^2 + k^2n^2 + l^2m^2 = 14^2 + (-5)^2 = 221 = 13 \cdot 17,$$

или, равносильно,

$$(k^2+l^2)(m^2+n^2)=13\cdot 17. \qquad (**)$$

Так как по условию числа k, l, m и n натуральные, то оба сомножителя в левой части равенства $(**)$ натуральные и больше 1. Поэтому это равенство может быть выполнено только в двух случаях:

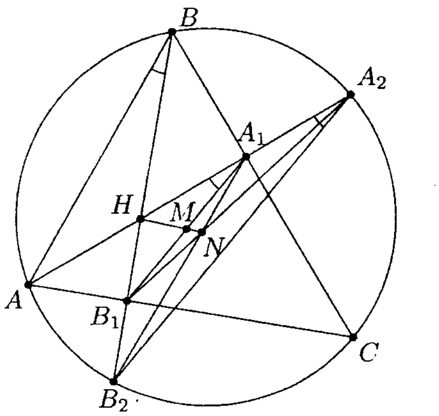
либо 1) $k^2+l^2=13$, $m^2+n^2=17$, либо 2) $k^2+l^2=17$, $m^2+n^2=13$.

В случае 1) имеем: либо $k=2$, $l=3$, либо $k=3$, $l=2$. Подставляя значения $k=2$, $l=3$ в систему $(*)$, видим, что её решения m и n не целые. Поэтому при этих значениях k и l исходная система выполняться не может. Подставляя же в систему $(*)$ значения $k=3$, $l=2$, находим, что $m=4$ и $n=1$ (равенство $m^2+n^2=17$ случая 1) проверять не нужно, так как оно выполнено автоматически, поскольку m и n удовлетворяют системе $(*)$ и $k^2+l^2=13$). Итак, в случае 1) имеем единственное решение $(k;l;m;n)=(3;2;4;1)$ (оно является решением, поскольку удовлетворяет системе $(*)$, которая равносильна исходной системе).

Разбирая аналогично случай 2), находим, что и в этом случае имеется единственное решение $(k;l;m;n)=(1;4;2;3)$.

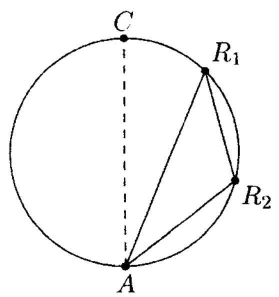
10.7. Ответ: 1.

Поскольку $\angle AB_1B=\angle AA_1B=90^0$, то четырёхугольник ABA_1B_1 — вписанный. Значит, $\angle AA_1B_1=\angle ABB_1$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В то же время, $\angle AA_2B_2=\angle ABB_2$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу (см. рис.). Следовательно, $\angle AA_1B_1=\angle AA_2B_2$, и поэтому $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Воспользуемся теперь тем хорошо известным фактом, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей, а также точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Применяя этот факт к трапеции $A_1A_2B_2B_1$, получаем, что точка M делит отрезок B_1A_1 пополам.



10.8. Ответ: $2n$ точек.

Рассмотрим на окружности произвольную точку A некоторого цвета, например, синего. Пусть точка C диаметрально противоположна точке A (см. рис.). Если бы на правой дуге AC было отмечено по крайней мере две точки R_1 и R_2 одного и того же цвета, отличного от синего, то, поскольку $\angle AR_2R_1 \geqslant 90°$, в треугольнике AR_1R_2 сторона AR_1 была бы наибольшей, что приводит к неравенству $R_1R_2 < AR_1$ в противоречие с условием. Следовательно, на правой полуокружности AC лежит не более одной точки, цвет которой отличен от синего. Аналогично, на левой полуокружности AC лежит не более одной точки, цвет которой отличен от синего. Следовательно, на окружности отмечено не более двух точек одинакового цвета, отличного от синего.



Поскольку синий цвет был выбран произвольно, то всего на окружности отмечено не более двух точек каждого цвета. Таким образом, на окружности отмечено и покрашено в n цветов не более $2n$ точек.

Отметить и покрасить в n цветов $2n$ точек с соблюдением условия задачи можно. Для этого впишем в окружность правильный $2n$-угольник и покрасим диаметрально противоположные его вершины в один и тот же цвет (разные пары противоположных вершин — в различные цвета). Так как покрашенные одним цветом точки диаметрально противоположны, то расстояние между одноцветными точками равно диаметру описанной вокруг $2n$-угольника окружности. Любые две точки, покрашенные в различные цвета, являются концами хорды, отличной от диаметра. Следовательно, расстояние между любыми двумя точками одного цвета больше расстояния между любыми двумя точками разного цвета.

11 класс

11.5. Ответ: $\left(1;\frac{1}{4};0\right)$, $\left(1;-1;\frac{5}{4}\right)$ и $\left(-2;\frac{1}{2};-1\right)$.

Так как по условию числа a, b, c попарно различны и являются корнями многочлена $x^3-\frac{5a}{4}x^2+bx+c$ со старшим коэффициентом 1, то этот многочлен равен

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем равенства

$$a+b+c=\frac{5a}{4}, \qquad (1)$$

$$ab+bc+ca=b, \qquad (2)$$

$$abc=-c. \qquad (3)$$

Из равенства (3) следует, что могут представиться только две возможности: либо 1) $c=0$, либо 2) $c\neq 0$ и $ab=-1$. Рассмотрим отдельно каждую из них.

1) Пусть $c=0$. Тогда равенство (2) принимает вид $ab=b$, откуда, поскольку $b\neq c=0$, находим $a=1$. Подставляя в равенство (1) значения $c=0$ и $a=1$, получим $1+b+0=\frac{5}{4}$, откуда $b=\frac{1}{4}$. Легко видеть, что тройка $(a;b;c)=\left(1;\frac{1}{4};0\right)$ удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $c\neq 0$ и $ab=-1$. Тогда равенство (2) принимает вид $b+1=bc+ca$. Далее, из (1) найдём $c=\frac{1}{4}a-b$ и подставим в последнее равенство, получим

$$b+1=(b+a)\left(\frac{1}{4}a-b\right)=\frac{1}{4}a^2-b^2-\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}a^2-b^2+\frac{3}{4},$$

или $b^2+b-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}=0$. Домножив обе части этого равенства на b^2, получим, что $b^4+b^3-\frac{1}{4}(ab)^2+\frac{1}{4}b^2=0$, или, учитывая равенство $ab=-1$, – что

$$b^4+b^3+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}=0 \iff (b+1)\left(b^3+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}\right)=0.$$

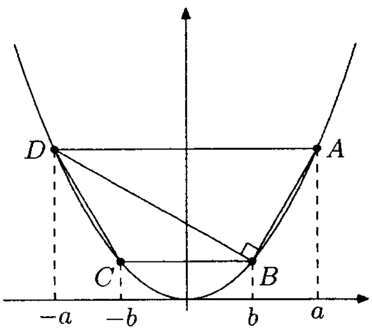
В полученном уравнении рациональный корень второго многочлена-сомножителя легко находится (или угадывается): $b=\frac{1}{2}$. Поэтому, раскладывая этот многочлен на сомножители, получаем равносильное уравнение $(b+1)\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(b^2+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)=0$, действительные корни которого $b = -1$ и $b = \frac{1}{2}$.

Если $b = -1$, то $a = \frac{-1}{b} = 1$, а $c = \frac{1}{4}a - b = \frac{1}{4} - (-1) = \frac{5}{4}$. Легко проверяется, что тройка $(a; b; c) = \left(1; -1; \frac{5}{4}\right)$ удовлетворяет условию задачи.

Если $b = \frac{1}{2}$, то $a = \frac{-1}{b} = -2$, а $c = \frac{1}{4}a - b = \frac{1}{4} \cdot (-2) - \frac{1}{2} = -1$. Опять же, легко проверяется, что тройка $(a; b; c) = \left(-2; \frac{1}{2}; -1\right)$ удовлетворяет условию задачи.

11.6. Ответ: $\sqrt{3}$.

Обозначим координаты вершин трапеции $A(a; a^2), B(b; b^2), C(-b; b^2), D(-a; a^2)$ $(a > b > 0)$. Так как $\angle DBA = 90°$, то $DB^2 + BA^2 = AD^2$. Заменяя расстояния в последнем равенстве по формуле расстояния между точками на координатной плоскости, получим $(a+b)^2 + (a^2-b^2)^2 + (a-b)^2 + (a^2-b^2)^2 = (2a)^2$, откуда после несложных равносильных преобразований получаем $(a^2-b^2)^2 = a^2-b^2$. Из этого равенства, учитывая, что $a^2-b^2 \neq 0$, находим $a^2 - b^2 = 1$. Заметим, что тогда высота h трапеции равна $h = y_A - y_B = a^2 - b^2 = 1$.

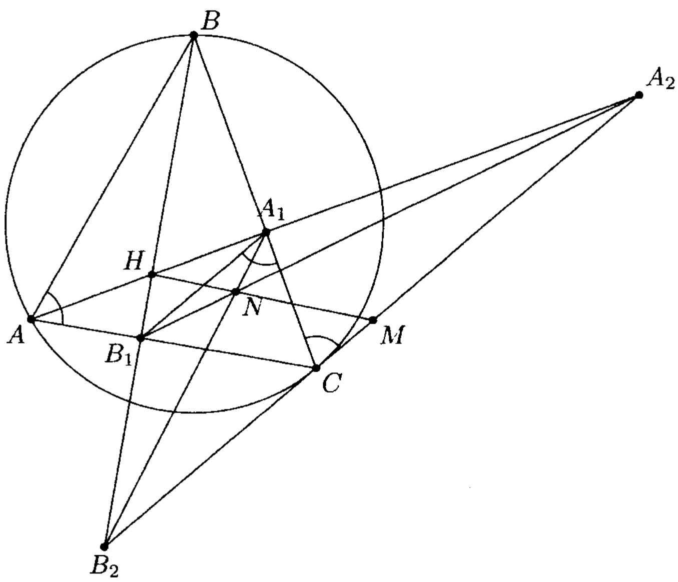


Далее, по условию $BC = AB$, или $2b = \sqrt{1 + (a-b)^2}$, т. е. $4b^2 = 1 + a^2 - 2ab + b^2$, а значит, поскольку $b^2 + 1 = a^2$, получаем уравнение $a^2 - ab - 2b^2 = 0$. Решая последнее уравнение относительно a, получим $a = 2b$ (так как $a, b > 0$). Тогда $1 = a^2 - b^2 = 3b^2$, откуда $b = 1/\sqrt{3}$, $a = 2/\sqrt{3}$. Поэтому площадь трапеции равна

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = \frac{1}{2}(2a + 2b) \cdot 1 = a + b = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

11.7. Ответ: 1.

Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^0$, то четырёхугольник ABA_1B_1 — вписанный. Отсюда имеем $\angle B_1A_1C = 180° - \angle BA_1B_1 = \angle B_1AB = \angle CAB$. В то же время, $\angle BCA_2 = \angle CAB$



как угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания. Следовательно, $\angle B_1A_1C = \angle BCA_2$, поэтому $B_1A_1 \| B_2A_2$ и четырёхугольник $A_1A_2B_2B_1$ – трапеция. Воспользуемся теперь тем хорошо известным фактом, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей, а также точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Применяя этот факт к трапеции $A_1A_2B_2B_1$, получаем, что точка M делит отрезок B_2A_2 пополам.

11.8. Ответ: $n = 5$.

Обозначим точки: $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – красные и $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – синие. Пусть m – наименьшее из попарных расстояний между различными красными точками, т. е. $m = \min\{k_ik_j : i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j\}$, а M – наибольшее из попарных расстояний между красными и синими точками, т. е. $M = \max\{k_is_j : i,j \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. Согласно условию $m > M$. Возьмём какую-либо синюю точку – например, s_1. Пусть K – круг радиуса M с центром в точке s_1. Тогда все красные точки лежат в круге K. Действительно, если бы нашлась некоторая красная точка k_i вне круга K, то $s_1k_i > M$, что противоречит определению числа M.

Докажем, что красных точек не более пяти. Допустим, что это не так, т. е. красных точек не мене шести. Возьмём первых шесть $k_1, k_2, \ldots, k_6$ и рассмотрим шесть лучей s_1k_i, $i = 1,2,\ldots,6$. Так как точки $k_1, k_2, \ldots, k_6$ лежат в круге K, радиус которого меньше m, а попарные расстояния между различными из точек $k_1, k_2, \ldots, k_6$ не меньше m, то соседние (по ходу часовой стрелки) лучи s_1k_i, $i = 1,2,\ldots,6$, должны составлять угол, больший 60°. Но это невозможно. Следовательно, $n \leqslant 5$.

Остаётся привести пример расположения пяти красных и пяти синих точек, удовлетворяющий условию задачи. Рассмотрим две концентрические окружности C_1 и C_2 радиусов 1 и r соответственно (число $r < 1$ выберем позже). В окружность C_1 впишем правильный пятиугольник $k_1k_2\ldots k_5$, а в окружность C_2 – какой-либо пятиугольник $s_1s_2\ldots s_5$. Вершины $k_1, k_2, \ldots, k_5$ покрасим в красный цвет, а вершины $s_1, s_2, \ldots, s_5$ – в синий. Наименьшее из попарных расстояний между различными красными точками равно стороне пятиугольника $k_1k_2\ldots k_5$, т. е. равно $2\sin 36^\circ$, что больше $2\sin 30^\circ = 1$ (т. е. $2\sin 36^\circ - 1 > 0$). Расстояние между любой красной и любой синей точками не менее минимального расстояния $1 - r$ между точками окружностей C_1 и C_2 и не более максимального расстояния $1+r$ между точками этих окружностей. Наибольшее из попарных расстояний между синими точками не превосходит $2r$ – максимального расстояния между точками окружности C_2. Поэтому для такой конфигурации пяти красных и пяти синих точек условие задачи будет выполнено, если величину r мы выберем удовлетворяющей следующим неравенствам

$$2r < 1 - r \quad \text{и} \quad 1 + r < 2\sin 36^\circ,$$

т. е., другими словами, если взять $r < \min\{1/3, 2\sin 36^\circ - 1\}$, построенная конфигурация удовлетворяет условию задачи.