**Олимпиадные задачи 2 тура предметных Олимпиад школьников по математике**

**2005 год**

**9 класс**

1. Все трехзначные числа записаны в ряд: 100  101  102 … 998  999. Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?
2. По определению, ***n ! = 1 · 2 · 3 · … · n .*** Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения ***1! · 2! · 3! · … · 20!***, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?
3. С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.
4. Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20°?На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй – любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**10 класс**

1. Докажите, что уравнение  x4– 4x3 + 12x2 – 24 x +24 = 0  не имеет решений.
2. Докажите, что в ходе любого сыгранного футбольного матча был момент, когда одна из команд забила голов столько же, сколько другой осталось забить.
3. Хорда удалена от центра окружности на расстояние  ***h***.  В каждый из двух сегментов круга, стягиваемый этой хордой, вписан квадрат так, что пара его соседних вершин лежит на хорде, а другая пара соседних вершин – на соответствующей дуге окружности. Найдите разность длин сторон квадратов.
4. Найдите многочлен с целочисленными коэффициентами, корнем которого является число **√2 +√3.**
5. Первый член числовой последовательности равен 1, каждый из двух следующих равен 2, каждый из трех следующих за ними равен 3 и т.д. Чему равен 2005-й член этой последовательности?

**11 класс**

1. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.
2. Решите уравнение     sin44x + cos2x = 2sin4x·cos4x.
3. Существует ли многогранник с нечетным числом граней, каждая из которых есть многоугольник с нечетным числом сторон?
4. Докажите, что касательные к гиперболе y = 1/x образуют с осями координат треугольники одной и той же площади.
5. В каждую клетку квадратной таблицы 25 x 25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

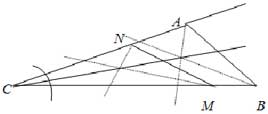
**Ответы и решения задач  
2005 год**

**9 класс**

1. Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа, т.е. это число оканчивается на 20.  Таких чисел 9: 120, 220, …, 920. Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, …, 209. Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз.
2. Заметим, что1! · 2! · 3! · 4! ·…· 20! = (1! · 2!) · (3! · 4!) ·…· (19! · 20!) =  
   = (1! · 1! · 2) · (3! · 3! · 4) · (5! · 5! · 6) ·…· (17! · 17! · 18) · (19! · 19! · 20) =   
   = (1!)2· (3!)2· (5!)2·…· (19!)2·  (2 · 4 · 6 · 8 ·…· 18 · 20) =  
   = (1!)2· (3!)2· (5!)2·…· (19!)2· (2 · (2 · 2) · (3 · 2) ·…· (10 · 2)) =  
   = (1! · 3! ·…· 19!)2· 210· (1 · 2 · 3 ·…· 2 · 10) = (1! · 3! ·…· 19!)2 (25)2· 10!

Мы видим, что первые два множителя – квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат. Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата.

**Ответ: 10!**

1. Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из них. Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: A, N, B, M и рассмотрим треугольники АВС и NМС. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника АВС принадлежит и биссектрисе угла С. Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника NМС также лежит на биссектрисе угла С. Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой ﮮС.
2. Есть только один треугольник, в котором угол 20° лежит между сторонами 5 см и 6 см. Попробуем построить треугольник, в котором сторона 6 см прилегает к углу 20°, а сторона 5 см лежит против него. Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, не совпадающем с вершиной. Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см (это расстояние равно катету угла в 20°). Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках, причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла, и мы получим два разных треугольника.

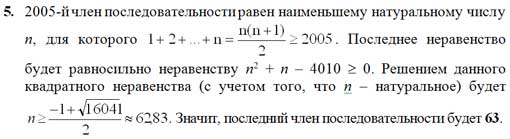
Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см, то вершина угла окажется внутри построенной окружности, и мы получим только одну точку пересечения, а следовательно, и один треугольник.

Итак, мы получили всего 4 треугольника.

1. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет.  Каждым следующим, если второй игрок берет *х* монет, то первый игрок должен взять 101 – *х* монет (он всегда может это сделать, потому что если *х* – четное число от 2 до 100, то (101 – *х*) – нечетное число от 1 до 99). Так как 2005=101· 19 + 85 + 1, то через **19** таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

**10 класс**

1. Уравнение x4 – 4x3 + 12x2 – 24x + 24 = 0  преобразовать к виду (x2 – 2x)2 + 8(x – 1,5)2 + 6 = 0,   которое не имеет решений.
2. Пусть первая из команд забила за весь матч *m*голов, вторая n голов. Сумма числа голов в ходе матча изменяется с шагом 1 от 0 до *m* + *n* , значит, в какой-то момент она будет равна *m*. Данный момент и будет искомым в задаче, потому что при этом число голов, уже забитых второй командой, равно разности *m* и числа голов, уже забитой первой командой, т. е. числу голов, которое еще предстоит забить первой команде. Аналогично можно рассуждать и с первой командой.
3. Обозначим длины сторон большого и малого квадратов через 2*х* и 2*у* соответственно, радиус окружности – через R*.* Тогда расстояния от центра окружности до вершин вписанных квадратов, лежащих на окружности дают выражения (2 – h)2 + x2 = R2,   (2y + h)2 + y2 = R2.  Отсюда получим x - y = (4/5)h.  Тогда, разность длин сторон квадратов будет равна (8/5)h.
4. Обозначим **√2 + √3 =a**. Тогда a2 = 5 + 2**√6**, а  (a2 – 5)2 = (2**√**6)2или a4 – 10a2 + 25 = 24, которое равносильно a4 – 10a2 + 1 = 0. А это и означает, что а является корнем многочлена  x4 – 10x2 + 1.



**11 класс**

1. Пусть это 4 последовательных числа: n, n + 1, n + 2, n  + 3. Тогда n (n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n2   + 3n)(n2 + 3n + 2) + 1 = (n2  + 3n)2+ 2(n2  + 3n) + 1 = (n2  + 3n + 1)2.
2. Перенесем в левую часть  2sin4x · cos4x и прибавим и вычтем по cos8x. В результате полученное уравнение можно преобразовать к виду (sin4x – cos4x)2 + cos2x(1 – cos6x) = 0, которое равносильно следующей системе:уравнение можно преобразовать

Решая второе уравнение и подставляя его решения в первое уравнение, в результате получим решение исходного уравнения x = *π*/2 + *π*k .

1. Пусть такой многогранник существует. Обозначим за 1, 2, …, число ребер на гранях, тогда 1 + 2 + … – удвоенная сумма всех ребер многогранника, она – четная. А в левой части стоит нечетная сумма слагаемых, каждое из которых – нечетно. Получили противоречие. Значит, такого многогранника не существует.
2. Составим уравнение касательных к гиперболе в точке

Т. к.(1/x)' = -1/(x2), то эти уравнения будут иметь вид y = -1/(х2)(x - х) + 1/х.**(\*)** Касательная с уравнением **(\*)** пересекает ось абсцисс в точке (х1;0);    
  х1 можно определить из уравнения -1/(х2)(x - х) + 1/х= 0. Решая данное уравнение, получим х1 = 2х.  Точка (0; y1) пересечения с осью ординат определяется подстановкой в уравнение **(\*)** значения х = 0. В итоге получим y2 = 2/х. Отрезки осей координат и касательной составляют прямоугольный треугольник, катеты которого имеют длины  а = 2|х| и b = 2 / |х|. Площадь данного треугольника равна 2.

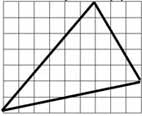
1. Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, …, 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно - 1, т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.

## ****Олимпиадные задачи 2 тура с решениями и ответами - 2006 год****

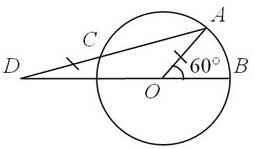
**6 класс**

1. Разность двух чисел на 17 меньше уменьшаемого и на 9 больше вычитаемого. Найдите уменьшаемое и вычитаемое.
2. Будет ли сумма чисел  1 + 2 + 3 + …..+ 2005 + 2006 + 2007 делиться на 2007? Ответ обоснуйте.
3. Нужно разместить 17 кроликов так, чтобы в каждой клетке было разное количество кроликов. Какое наибольшее число клеток понадобится?
4. На выставку привезли 25 собак. 12 из них большие, 8 – маленькие, остальные средние. Только 10 из участников выставки породистые, остальные – дворняжки. Среди дворняжек поровну больших, маленьких и средних. Сколько больших породистых собак привезли на выставку?
5. Все треугольники, изображенные на рисунке, имеют равные стороны. Радиус каждой из окружностей равен 2 см. Окружности касаются друг друга и сторон квадрата. Чему равен периметр «звездочки», нарисованной жирной линией?

**7 класс**

1. Восстановите пример: АВС × СВА = 692443.
2. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето поправился на 20%, затем за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он в итоге или поправился? Ответ обоснуйте.
3. Какой цифрой оканчивается число 20072006?
4. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисован треугольник. Чему равна его площадь?
5. У мамы четыре дочери Поля, Валя, Катя и Маша. Девочки играли и разбили вазу. На вопрос: «Кто это сделал?» Поля, Валя и Катя ответили: «Не я», а Маша – «не знаю». Потом оказалось, что две из них сказали правду, а две неправду. Знает ли Маша, кто разбил вазу? Ответ объясните.

**8 класс**

1. Решите уравнение x - 6 = |x - 3|/(x - 3).
2. Верно ли равенство 3100 + 7100 = 8100? Ответ обоснуйте.
3. Дворники получают грабли и метлы. Если каждый возьмет одну метлу или одни грабли, то останется 14 метел. А чтобы дать каждому дворнику и одну метлу, и одни грабли, не хватает 10 грабель. Сколько было дворников, сколько метел и сколько грабель?
4. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал туземца узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном? Ответ обоснуйте.
5. В окружности с центром в точке О проведены радиусы ОВ и ОА так, что ﮮАОВ=60°, ОВ = DС. Найдите величину ﮮАDО.

**9 класс**

1. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.
2. Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно 1/2, 1/3, 1/4 и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2007 переливаний?Решите неравенство
3. Решите неравенство .
4. Решите уравнение x2 + 2005x – 2006 = 0.
5. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

**10 класс**

1. Решите уравнение (x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = 1320.
2. На плоскости дан отрезок АВ. Где может быть расположена точка С, чтобы ∆АВС был остроугольным?
3. Найти все натуральные числа, оканчивающиеся на 2006, которые после зачеркивания последних   четырех цифр уменьшаются в целое число раз.
4. Вычислить сумму a2006 + 1/a2006, если a2– a + 1 = 0.
5. Лист бумаги разрезали на 5 частей, некоторые из этих частей разрезали на 5 частей, и т. д. Может ли за некоторое число разрезаний получиться 2006 листка бумаги?

**11 класс**

1. Докажите, что уравнение  xy = 2006 (x+y) имеет решения в целых числах.
2. Докажите, что если α, β, γ**-**углы произвольного треугольника, то справедливо тождество cos2α + cos2β + cos2γ + 2 cosα cosβ cosγ = 1.
3. Три шара радиуса R касаются друг друга и плоскости  **α,** четвертый шар радиуса R положен сверху так, что касается каждого из трех данных  шаров. Определите высоту «горки» из четырех шаров.
4. Докажите неравенство x2 - 3x3 < 1/6 на луче [1/4; +∞).
5. В прямоугольник 20 x 25 бросают 120 квадратов 1 x 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг с диаметром, равным 1, не имеющий общих точек ни с одним из квадратов.

### **Ответы и решения задач**

**2006 год**

**6 класс**

1. Ответ: 43 – 17.
2. Ответ: будет.    Представим данную сумму в виде следующих слагаемых: (1 + 2006) + (2 + 2005) + …..+ (1003 + 1004) + 2007. Так как каждое слагаемое делится на 2007, то и вся сумма будет делиться на 2007.
3. Ответ: 5 клеток.
4. Ответ: 7 больших породистых собак.
5. Ответ: 64 см

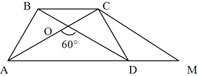
**7 класс**

1. Ответ: 739 ×937 = 692443.
2. Ответ: Обломов похудел.
3. Ответ: число оканчивается цифрой  9.
4. Ответ: 25,5 см2
5. Среди ответов Поли, Вали и Кати может быть только один ложный ответ, иначе при двух ложных ответах получается, что стекло разбили двое. Тогда вторым ложным ответом будет ответ Маши. Значит, Маша знала, кто разбил стекло.

**8 класс**

1. Ответ: 7.
2. Решение: Нет. 3100 оканчивается 1, 7100 оканчивается 1, а 8100 оканчи­вается 6.
3. Ответ: 24 дворника, 24 метлы и 14 грабель.
4. Ответ: Проводник был аборигеном.
5. Ответ:  ﮮCDO = 20°.

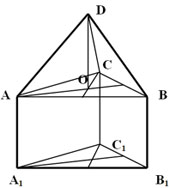
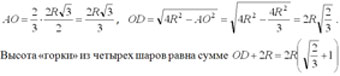
**9 класс**

1. Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ∆АСМ - равносторонний. Но это значит, что ∆АОD и ∆ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ∆АОВ = ∆СОD, откуда имеем, что AB = CD.
2. **«**Просчитав» несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих сосудах будет по ½ л воды. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером 2k-1 в сосудах было по ½ л, то при следующем переливании из второго сосуда берется 1/(2k + 1) часть, так что в первом сосуде оказывается - 1/2 + (2/ 2(2k + 1)) = (k + 1)/(2k + 1) (л). При следующем переливании, имеющем номер 2k+1, из него берется 1/(2k + 2) часть и остается (k + 1)/(2k + 1)-(k + 1)/((2k + 1)(2k + 1)) = 1/2 (л). Поэтому после седьмого, девятого и вообще любого нечетного переливания в сосудах будет  по ½   л воды.
3. Заметим, что все решения исходного неравенства  существуют, если подкоренные выражения неотрицательны. Одновременно эти неравенства выполняются лишь при условии x2 – 4x + 3 = 0. Это уравнение имеет два корня 1 и 3. Проверка показывает, что исходное неравенство имеет единственное решение 3.
4. Исходное уравнение имеет очевидный корень 1. Второй корень найдем по формулам Виета. Так как x1x2 = -2006 и x1 = 1, то x2 = 2006.
5. Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

**10 класс**

1. Ответ: -8; 6.
2. Построим на АВ как на диаметр окружность и проведем через А и В две прямые, перпендикулярные отрезку АВ. Точка С может находится между этими прямыми вне круга.
3. Пусть натуральные числа имеют вид x∙10000 + 2006, где x € N. После вычеркивания последних цифр получим число x. По условию , где n € N. Отсюда имеем, что должно быть натуральным числом, т. е. x - делитель числа 2006. Число 2006 имеет делители: 1; 2; 17; 34; 59; 118; 2006. Следовательно, имеются числа, отвечающие условию задачи: 12006; 22006; 172006; 342006; 592006; 1182006; 20062006.
4. Так как a<>0,то, разделив обе части исходного уравнения на a, получим a + 1/a = 1. Заметим, что a3 + 1 = 0, т. к. a3 + 1 = (a + 1)(a2 – a + 1). Таким образом, a3 = -1. Тогда a2006 + 1/a2006 = (a3)6682 = a2 +1/a2 = - 1.
5. Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем пять, т. е. число листков увеличивается на 4. Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида 1 + 4n, где n € N, т. е. это число при делении на 4 дает остаток 1. Но 2006 = 4∙501 + 2. Следовательно, 2006 листков получиться не может.

**11 класс**

1. Преобразуем уравнение к следующему виду: (х – 2006)(у - 2006) = 20062. Уравнение имеет решения, например, х = у = 4012.
2. Преобразуем выражение в левой части равенства, учитывая, что α + β + γ = π, и применяя формулы: cos2x = (1 + cos2x)/2, cosx = - cos(π - x), cosx + cosy = (2cos((x + y)/2))cos((x - y)/2), получим справедливое тождество.
3. Пусть четыре шара радиуса R c центрами A, B, C, D касаются друг друга и первые три из них – плоскости a в точках A1, B1, C1 (см. рис). Тогда точки A, B, C, D являются вершинами правильной пирамиды с ребром 2R. Вершина D этой пирамиды проектируется в центр основания О., .

1. Пусть y = x2 – 3x3. Тогда y' = 2x – 9x2 и с помощью метода интервалов получаем, что y' < 0 при всех x>2/9. Но 1/4>2/9, следовательно, функция y(x) убывает на луче [1/4; +∞]. Это значит, что x2 - 3x3 < 1/16 - 3/64 = 1/64 < 1/64.
2. Окружим каждый квадрат полоской шириной 1/2. Образующие фигуры тоже квадраты со стороной 1 + 2 x 1/2 = 2, имеют площадь равную 4. Их общая площадь равна 4 x 120 = 480, в то время как искомая площадь равна 500. Следовательно, найдется точка, которая не покрыта построенными квадратами, но это значит, что она удалена от данных квадратов не меньше чем на по всем направлениям. Круг радиуса  с центром в этой точке не имеет общих точек  ни с одним из квадратов.

## Олимпиадные задачи 2 тура с решениями и ответами - 2007 год

**6 класс**

1. Если Коля купит 11 тетрадей, то у него останется 7 рублей, а на покупку 15 тетрадей ему не хватит 5 рублей. Сколько денег у Николая? Ответ обоснуйте.
2. Какова последняя цифра ответа 2003 · 2005 · 2007 – 2000 · 2008? Ответ обоснуйте.
3. Как разложить семь алмазов в четыре одинаковые шкатулки, чтобы вес всех шкатулок получился одинаковым, если вес алмазов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. граммов. Ответ обоснуйте.
4. На одной чаше весов лежит кусок мыла, на другой 2/3   такого же куска и еще 2/3 кг. Сколько весит весь кусок мыла? Ответ обоснуйте.
5. Четыре ученика – Витя, Петя, Юра и Сергей – заняли на математической Олимпиаде  четыре первых места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы:

а)   Петя – второе, Витя – третье;

б)   Сергей – второе, Петя – первое;

в)   Юра – второе, Витя – четвертое.

Укажите, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть. Ответ обоснуйте.

**7 класс**

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли значение выражения 37 · 124 + 21 · 124 + 58 · 554 на 678. Ответ обоснуйте.
2. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Когда одного игрока удалили с поля, средний возраст оставшихся игроков составил 21 год. Сколько лет удаленному игроку? Ответ обоснуйте.
3. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от 1 до  1 000 000? Ответ обоснуйте.
4. 2% натурального числа *А* больше, чем 3% натурального числа *В*. Верно ли, что  5%  числа  *А* больше, чем  7%  числа *В*?  Ответ обоснуйте.
5. Ваня, Петя, Саша и Коля носят фамилии, начинающиеся на буквы В, П, С и К.  Известно, что

*a.*Ваня и С. – отличники;

*b.*Петя и В. – троечники;

*c.*В. ростом выше П.;

*d.*Коля ростом ниже П.;

*e.*Саша и Петя имеют одинаковый рост.

На какую букву начинается фамилия каждого мальчика? Ответ обоснуйте.

**8 класс**

1. Решите уравнение |x - 2007| = 2.
2. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000? Ответ обоснуйте.
3. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте - тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте - тоже девочка. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?
4. Дана белая доска размером 100 x 100 клеток. Двое по очереди красят ее клетки в черный цвет, причем первый всегда закрашивает квадрат 2 x 2, а второй три клетки, образующие «уголок». Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй? Ответ обоснуйте.
5. Найдите сумму внешних углов выпуклого 2007-угольника. Ответ обоснуйте.

**9 класс**

1. В параллелограмме АВС биссектриса угла С пересекает сторону А в точке М и прямую АВ  в точке К. Найдите периметр параллелограмма, если АК = 12, СМ = 24, МК = 18.
2. Постройте график функции y = |x - 1| - |2 - x| + 2.
3. Вычислите Вычислите .
4. Решите уравнение x4 + 2006x2 – 2007 = 0.
5. Токарь и его ученик, работая одновременно, обычно выполняют задание за 4 часа. При этом производительность труда токаря в 2 раза выше производительности ученика. Получив такое же задание, и, работая по очереди, они справились с заданием за 9 часов работы. Какую часть задания выполнил ученик токаря.

**10 класс**

1. Вычислите Вычислите.
2. Решите уравнение 3cosx = x2 + 3.
3. Постройте график функции y =|x - 3| + |1 - x| - 4.
4. Докажите, что x4 + y 4 + z 2 + 1 > 2x (xy 2 – x + z + 1).
5. Пирамида Хеопса имеет в основании квадрат, а ее боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Может ли угол грани при вершине пирамиды быть равным 95 Ответ обоснуйте.

**11 класс**

1. Решите уравнение Решите уравнение.
2. Функция y = f(x) определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 5. Найдите значение выражения   
     f(-6) + f(19) – f(-13), если f(-1) = -2 и f(2) = 3,5.
3. Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба со стороной 1 см? Ответ обоснуйте.
4. Докажите, что x4 + y4 + z2 + 1 >= 2x (xy2 – x + z + 1).
5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равняется **а**, а боковое ребро равняется **b**. Плоскость, параллельная боковому ребру и проходящая через скрещивающуюся с ним сторону основания, пересекает пирамиду по квадрату. Вычислите сторону квадрата.

### **Ответы и решения задач**

**2006 год  
  
6 класс**

1. Ответ: 40 рублей.
2. Ответ: последняя цифра 5.
3. Ответ: 7 + (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4). Вес одной доли алмазов равен 7 г.
4. Ответ: 2 кг.
5. Ответ: I – Петя, II – Юра, III – Витя, IV – Сергей.

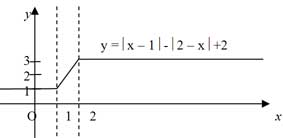
**7 класс**

1. Ответ: Делится.
2. Ответ: 32 года.
3. Ответ: 27 000 001. Разбить числа от 1 до 999 998 на пары: (1; 999 998),
4. (2; 999 997), …., (142 375; 857 624) и т. д. Получается 499 999 пар, сумма цифр в каждой из которых равна 54. Учитывая числа 999 999 и 1 000 000, получаем: 500 000 · 54 + 1 = 27 000 001.
5. Ответ: Верно. Так как 2% числа А больше, чем 3% числа В, то 4% числа А больше,чем 6% числа В, кроме того, 1% числа А больше, чем 1% числа В. Учитывая это,получим, что 5% числа А больше, чем 7% числа В.
6. Ответ: Саша - В., Петя – К., Коля – С., Ваня – П.

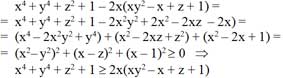
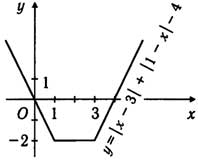
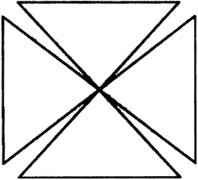
**8 класс**

1. Ответ: 2009, 2005.
2. Ответ: 27 000 001. Разбить числа от 1 до 999 998 на пары: (1; 999 998),
3. (2; 999 997), …., (142 375; 857 624) и т. д. Получается 499 999 пар, сумма цифр в каждой из которых равна 54. Учитывая числа 999 999 и 1 000 000, получаем: 500 000 · 54 + 1 = 27 000 001.
4. Ответ: 33+1/3%. Пусть всего в школе m мальчиков и n девочек. Заметим, что число мальчиков, сидящих с девочками, равно числу девочек, сидящих с мальчиками, т.е. число 0,4m (100% - 60% = 40% от числа m) равно 0,8n (100% - 20% = 80% от n). Поэтому m = 2n, и девочки составляют (m/(m + n)) · 100% = (n/(2n + n)) · 100% = (33+1/3)% учащихся.
5. Ответ: второй. В одном из углов доски второй играющий своим первым ходом закрашивает три клетки в прямоугольнике 2 x 3, а три оставшиеся клетки из этого прямоугольника объявляет «заповедником». В дальнейшем второй делает любые возможные ходы, не затрагивающие клетки «заповедника». Если такой ход становится невозможным, то он закрашивает клетки заповедника. Легко понять, что ответного хода у первого играющего нет.
6. Ответ: 360°.

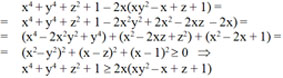
**9 класс**

1. Ответ: 88.1) Из подобия треугольников ∆ AMK и ∆ DMC:  
   MK/MC = AK/DC ⇒ 18/24 = 12/CD, т. е. CD = (24 · 12)/18 = (24 · 2) /3 = 16.  
   2)ﮮ BCM = ﮮ MCD (CM – биссектриса ﮮ BCD), ﮮ BKM = ﮮ DCM как накрест лежащие при параллельных прямых BK и DC, и секущей KC. Следовательно, ∆ BKC – равнобедренный.  
   3)Таким образом, PABCD= 2 ∙ (16 + 28) = 88.
2. Ответ: 
3. Ответ: 4 016 011. Пусть n = 2004, тогда http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_011.jpg. Преобразовав, получим http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_012.jpg
4. Ответ: 1, -1.
5. Ответ: ½ часть задания выполнит ученик.

**10 класс**

1. Ответ: 4 016 011. Пусть n = 2004, тогда http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_011.jpg . Преобразовав, получим http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_012.jpg.
2. Ответ: 0. Проанализировать какие значения могут принимать функции, стоящие в обеих частях уравнения.
3. Доказательство.
4. Ответ: 
5. Ответ: нет. Боковая поверхность пирамиды состоит из четырех равнобедренных и равных треугольни­ков. Разрежем боковую поверхность пирамиды по боковым ребрам и развернем на плоскости. Тогда получим фигуру, изображенную на рисунке. При этом общая точка треугольников – вершина пирамиды. Если бы угол грани вершины пирамиды был 95°, то сумма четырех углов была бы равна 380°. А это невозможно, так как сумма углов пи вершине пирамиды меньше 360°.

**11 класс**

1. Ответ: 1,5. Проанализировать какие значения могут принимать функции, стоящие в обеих частях уравнения.
2. Ответ: -7,5.
3. Ответ: √2 см. Радиус сферы RT, описанной около тетраэдра, не будет превосходить радиус сферы RK, описанной около куба. Пусть сторона тетраэдра а. Она будет равна ((2√3)/3)·RT. Самый большой тетраэдр, удовлетворяю­щий условию RT = RK, будет тетраэдр, ребра которого будут диагоналями куба.  В этом случае RK = √3/2, потому a = (2√6)/3· RT= (2√6)/RK= (2√6)/3 >· √6/3 = √2.
4. Доказательство. 
5. Ответ: сторона квадрата равна ab /(a + b). Использовать подобие треугольников.

## Олимпиадные задачи 2 тура с решениями и ответами - 2008 год

**2008 год**

**7 класс**

1. Найдите все корни уравнения |х - 2008| = 2009.
2. Гонцу надо было пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всем пути оказалась равной 12 миль в час.
3. Дима взял 2008 одинаковых квадратиков. Он хочет сложить из всех этих квадратиков прямоугольник. Сколько различных прямоугольников он может получить?
4. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?
5. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как  72 = 49, а 4 + 9 + 1 = 14.  На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2008-м месте?

**8 класс**

1. Корень из числа 49 можно извлечь по такой «формуле»: √ 49 = 4 + √9.
2. Существуют ли другие двузначные числа, квадратные корни из которых извлекаются аналогичным образом и являются целыми? Укажите все такие двузначные числа.
3. ABC – равнобедренный треугольник с вершиной А. ﮮА=27°. Точка D симметрична точке В относительно А. Чему равен угол ﮮBCD?
4. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?
5. Про числа aи b известно, что a = b+ 1. Может ли оказаться так, что  
   a4  =  b4?
6. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5 x 5 нужно закрасить, чтобы в любом квадрате 3 x 3, являющемся его частью, было ровно  
   4 закрашенных клетки?

**9 класс**

1. Докажите, что число  20082 + 20082 ×  20092 + 20092  является ли квадратом целого числа.
2. Рассматриваются функции вида y = x2 + ax + b, где  а + b = 2008. Докажите, что графики всех таких функций имеют общую точку.
3. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Спартак»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» - 50%, а про ЦСКА – 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Спартак»?
4. В выпуклом пятиугольнике ABCDE  ﮮА = ﮮB =ﮮD = 90°. Найдите ﮮADB, если известно, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.
5. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки, и известно, что количество столбов четно. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой - в синий, а остальные – в белый. Назовем расстояние между столбами длину кратчайшей из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2008 км.

**10 класс**

1. Графики функций  у = х2 + ах + bи  у = х2 + сх + d  пересекаются в точке с координатами  (1; 1).  Сравните  a5 + d6и  c6- b5.
2. Какое наибольшее число ребер шестиугольной призмы может пересечь плоскость, не проходящая через вершины призмы?
3. Решите уравнение Решите уравнение:
4. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то их высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.
5. В клетки квадрата 3 × 3 требуется вписать девять различных натуральных чисел так, чтобы все они не превосходили **n**, и чтобы произведения чисел в каждой строке и каждом столбце были равны. При каком наименьшем **n** это возможно?

**11 класс**

1. Найдите такое натуральное число **k**, что 2008! делится на 2007k, но не делится на 2008k. (Напомним, чтоn! = 1·2·3·4·… ·n).
2. Может ли вершина параболы y = 4x2 – 4(a + 1)x + a  лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении а?
3. (an) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S2008 - наименьшая среди всех Sn (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?
4. Внутри равностороннего треугольника со стороной 8 находится равнобедренный треугольник АВС, в котором АС = ВС = 1, ﮮС=120°. Две вершины А и В могут лежать либо на одной стороне большого треугольника, либо на двух. Где при этом может оказаться вершина тупого угла – точка С? Нарисуйте это геометрическое место точек и найдите длину соответствующей линии.
5. Клетчатая прямоугольная сетка m x n связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

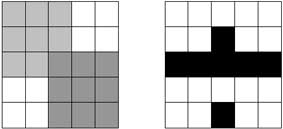
### **Ответы и решения задач**

**2008 год**

**7 класс**

1. Ответ:  4017  и  -1.
2. Нет, не может. Для того, чтобы средняя скорость гонца, пробежавшего 24 мили, была равна 12 милям в час, необходимо, чтобы он пробежал этот путь за 2 часа. Но из условия следует, что за два часа гонец пробежал только 16 миль.
3. Ответ: 4.
4. Всего денег у купцов (90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110 рублей. Поэтому у первого 110 – 90 = 20, у второго 110 – 85 = 25, у третьего 110 – 80 = 30, а четвертого 110 – 75 = 35 рублей.
5. Вычислим несколько первых членов данной последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8;11;5; 8; 11; 5; … Таким образом, начиная с пятого члена последовательности, будет повторяться одна и та же тройка чисел 5, 8, 11. Так как 2008 – 4 = 2004, а 2004 кратно 3, то на 2008-м месте будет стоять число 11.

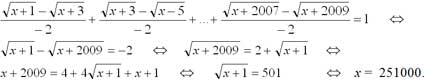
**8 класс**

1. Да, существуют: 64 и 81. Рассмотрим все двузначные числа, являющиеся квадратами целых чисел. Корни из чисел 16, 25 и 36 не могут быть извлечены указанным способом, так как квадратные корни из их последних цифр не являются целыми. Числа 49, 64 и 81 являются решениями. Ответ в задаче не изменится, если не требовать, чтобы корень был целым. Действительно, если *http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_024_.jpg*, то 10a + b = a2 + 2a√b + b. Так как в левой части равенства стоит целое число, то и число, стоящее в правой части, должно быть целым. Отсюда следует, что b = 0, 1, 4 или 9, то есть a + √b  - целое число.
2. Ответ: 90°.
3. Ответ: имеет смысл идти. Пусть мальчик пошел к следующей остановке и в какой-то момент заметил автобус. Скорость автобуса в четыре раза больше скорости мальчика, поэтому за одно и то же время автобус проезжает расстояние в четыре раза больше. Пусть мальчик пробежит х км, тогда автобуспроедет 4х км. В случае, если они двигаются навстречу друг другу, до встречи с автобусом мальчик пробежит 2/5 км. Это значит, что, отойдя от остановки не более, чем на 2/5 км, мальчик сможет успеть на автобус, побежав назад. В случае, если автобус догоняет мальчика, мальчик успеет пробежать 2/3 км до момента, когда автобус его догонит. Это означает, что он сможет успеть на автобус, если до следующей остановки осталось не более 2/3  км, то есть, если он успел пройти не менее  1/3 км до момента, когда заметил автобус. Так как,  1/3 <  2/5 , то у мальчика всегда будет возможность успеть на автобус и имеет смысл идти.
4. Ответ: да, может. Пусть а = 1/2, b = -1/2, тогда a4 = b4 = 1/16. Можно доказать, что этот пример – единственный (от учащихся это не требуется). Действительно, a4 = b4 ⇔ |a| = |b|. Случай a = b невозможен, случай a = -b дает указанный пример.
5. Ответ: 7 клеток. Покажем, что придётся закрасить не менее семи клеток. Рассмотрим два квадрата 3 > 3 (см. рисунок слева). В каждом их этих квадратов должно быть закрашено по четыре клетки. Так как их общая часть составляет одну клетку, то в них не может быть закрашено менее семи клеток. Один из возможных примеров с семью закрашенными клетками приведён на рисунке справа.

**9 класс**

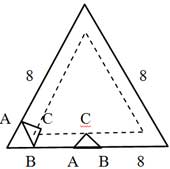
1. Рассмотрим выражение n2 + n2 (n + 1)2  + (n + 1)2 = n4+ 2n3 + 2n2 + (n + 1)2 = n4+ 2n2 (n + 1) + (n + 1)2 = (n2 + n + 1)2. Данное число есть значение этого выражения при n = 2008. Значит, 20082 + 20082∙20092 + 20092 = (20082 + 2009)2 – квадрат целого числа.
2. y(1) = 1 + a + b = 2009. Следовательно, каждый из данных графиков проходит через точку с координатами (1; 2009).
3. Пусть x% жителей острова составляют лжецы. Тогда (100 – х)% составляют рыцари. Так как каждый рыцарь утвердительно ответил ровно на один из вопросов, а каждый лжец – на три, то (100 – х) + 3х = 40 + 30 + 50, откуда х = 10. Так как ни один из жителей острова не сказал, что болеет за ЦСКА, то все лжецы болеют за ЦСКА. Каждый из них заявил, что болеет за «Спартак», поэтому действительно болеют за «Спартак» 40% - 10% = 30% жителей.
4. Пусть О - центр окружности, вписанной в пятиугольник АВСDE. Проведем перпендикуляры ОК, ОL, OM, ON и OTK сторонам AB, BC, CD, DEи EAсоответственно. Поскольку проведенные отрезки являются радиусами окружности, то четырехугольники AKOT, KBLO иOMDN - равные квадраты. Диагонали  OA, OBи ODрассмотренных квадратов равны, поэтому О – центр окружности, описанной около ∆ ADB. Следовательно, ﮮADB = 1/2ﮮAOB = 45°. (Учащиеся могут предложить и другие способы нахождения угла ADB,например, используя свойства отрезков касательных и формулу для нахождения суммы внутренних углов выпуклого пятиугольника).
5. Пусть на кольцевой дороге – 2n столбов. Вычислим сумму расстояний от синего столба до всех остальных: 2(1 + 2 + …+ (n– 1)) + n = 2((1 + n -1)/2) n + n = n2 (км). Следовательно, n2 > 2008. Учитывая, что n – натуральное число, получим, что n ≥ 45. Так как расстояние от синего столба до желтого не превосходит n, то n2 – n ≤ 2008 n(n – 1) ≤ 2008. Несложно проверить, что n = 45 удовлетворяет этому неравенству, а любое натуральное n, начиная с 46, - не удовлетворяет. Тогда n2 = 2025, следовательно, расстояние от синего столба до желтого равно 2025 – 2008 = 17.  
   Ответ:17 км.

**10 класс**

1. Ответ:a5 + d6 = c6 – b5.  
   Так как графики функций проходят через точку (1; 1), то выполняются равенства: 1 = 1 + а + b и 1 = 1 + с + d, то есть, a = -b и с = -d. Следовательно, а5 = -b5и d6= c6. Складывая эти неравенства почленно, получим, что а5 + d6 = c6 – b5.
2. Ответ: 8.  
   Горизонтальной плоскостью можно пересечь все **6** боковых ребер. Наклоним эту плоскость так, чтобы она пересекла верхнее основание около одной из вершин. Ясно, что при этом она станет пересекать два ребра в верхнем основании, но перестанет пересекать одно из боковых ребер. Таким образом, мы увеличим число пересеченных ребер на 1.  
   Точно также можно увеличить это число еще на 1 за счет ребер нижнего основания. Так мы получили плоскость, пересекающую 8 ребер призмы.  
   Почему больше пересечений получить невозможно? Во-первых, никакое сечение не может пересекать более двух ребер одного основания (иначе сечение просто совпадает с плоскостью этого основания). Но пересечение двух ребер в одном основании исключает пересечение хотя бы одного из боковых ребер, а пересечение двух ребер в другом основании – другого бокового ребра.
3. Ответ:  251000.  Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю: 
4. Пусть стороны треугольника равны b, bq, bq2, площадь треугольника S, тогда высоты треугольника соответственно равны: 2S/b, 2S/bq, 2S/db2, то есть тоже образуют геометрическую прогрессию.
5. Покажем, что n = 14 слишком мало. Среди чисел 1, 2, …, 14 только 2 делятся на 5 (5 и 10), поэтому их нельзя использовать (не во всех строках произведение будет делиться на 5). По тем же соображениям нельзя использовать числа 7 и 14. Тем более, нельзя использовать числа 11 и 13. Итак, 6 чисел уже отпадают. Остается всего 8 чисел, а их не хватит для заполнения клеток квадрата! На рисунке изображен квадрат с n = 15.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 | 12 | 2 |
| 3 | 10 | 4 |
| 8 | 1 | 15 |

**11 класс**

1. Ответ: 9. Разложим число 2007 на простые множители: 2007 = 32 ∙ 223.  
   В разложении на простые множители числа 2007! показатель степени у числа 3 будет достаточно большим, так как множитель 3 входит в разложение каждого третьего числа. Множитель 223 входит только в разложение чисел вида 223р, где р – натуральное число, не превосходящее 9. Таким образом, в разложение числа 2007! на простые множители число 223 войдет с показателем 9. Следовательно, число 2008! будет делиться на 2007k, где k=9.
2. Ответ: нет, не может.   Координаты вершины параболы x = (a + 1)/2, y = 4((a + 1)/2)2 - 4(a +1)(a + 1)/2 + a = -a2 - a - 1 = -(a + 1/2)2 - 3/4. Так как у < 0 при любых значениях а, то во второй координатной четверти вершина параболы находиться не может.
3. Ответ: a1 (-2008; -2007). Так как разность прогрессия положительна, то прогрессия – возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессия с первого по 2008-ой – отрицательны, а начиная с 2009-го – положительны. Таким образом, S2008 будет наименьшей, тогда и только тогда, когда а2008 < 0, a2009 > 0. Отсюда получаем систему неравенств http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_026.jpg
4. Если вершина А и В лежат на одной стороне треугольника, то вершина С лежит на отрезке прямой, параллельной этой стороне. Длина этого отрезка равна 8 - √3. Пусть вершины А и В лежат на двух сторонах равностороннего треугольника с общей вершиной О. Тогда вокруг четырехугольника АСВО можно описать окружность (четырехугольник является вписан­ным). В этой окружности углы ВАС и ВОС равны, так как опираются на одну и ту же дугу с хордой ВС. Следовательно, угол ВОС равен 30°. Следовательно, третья вершина треугольника – точка С – лежит на биссектрисе угла равностороннего треугольника. Длина соответствующего отрезка биссектрисы равна 1. Итак, точка С может лежать на стороне некоторого равностороннего треугольника и на некоторых отрезках биссектрис внутренних углов этого треугольника. Длина шести звеньев этой ли­нии равна 27 - 3√3.
5. Ответ: если m + n – четно, то выигрывает второй игрок, если m + n – нечетно, то выигрывает первый. В начале игры веревочек единичной длины было m(n + 1) + n(m + 1) = 2mn + m + n. Это число имеет ту же четность, что и число m + n. Последний ход в игре разрушает последний замкнутый контур. Докажем, что граница любого замкнутого конура содержит четное количество веревочек единичной длины. Действительно, рассмотрим границу произвольного замкнутого контура. Каждый вертикальный столбец исходной сетки содержит четное количество горизонтальных веревочек единичной длины из этой границы (возможно, и нулевое), т. к. войдя в замкнутый контур, на­пример, снизу, мы обязаны из него выйти. Аналогично, каждая горизонтальная строка исходной сетки содержит четное количество вертикальных веревочек единичной длины. Таким образом, общее количество единич­ных веревочек на границе замкнутого контура – четно. Выигрышная стратегия для любого игрока состоит в том, чтобы не разрушать последний замкнутый контур, пока есть такая возможность.

## Олимпиадные задачи 2 тура с решениями и ответами - 2009 год

**7 класс**

1. В данном примере различные цифры зашифрованы различными буквами. Определите, какое равенство зашифровано: **ОТВЕТ + ОЧЕНЬ = ПРОСТ**.
2. В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?
3. Найти наименьшее шестизначное число, делящееся на 9, все цифры которого различны.
4. Можно ли квадрат со стороной 1 м разрезать на 7 прямоугольников, не обязательно одинаковых, каждый из которых имел бы периметр 2 м?
5. Можно ли покрасить клетчатый квадрат 2009 x 2009 в два цвета – черный и белый (каждая единичная клетка красится одним из этих цветов) – таким образом, чтобы каждая черная клетка имела двух белых соседей, а каждая белая клетка – двух черных соседей (соседями считаем клеточки, которые имеют общую сторону)? Ответ обоснуйте.

**8 класс**

1. Докажите, что 13 + 132 + 133 + 134 +…+ 132009 + 132010 делится нацело на 7.
2. Постройте график функции y = |x - 2| - 2.
3. На сторонах АВ, ВС и АС равностороннего треугольника АВСвзяты соответственно точки D, E, F, так что AD = BE = CF. Каков вид треугольника DEF? Докажите.
4. Известно, что a + b + c = 5, ab + ac + bc = 5. Чему может равняться a2 + b2 + c2?
5. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают на соседнее дерево – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

**9 класс**

1. На доске написаны восемь простых чисел, каждое из которых больше двух. Может ли их сумма равняться 59?
2. В хоре число девочек относилось к числу мальчиков как 4:3. После того как в хор пришли двое новеньких, это соотношение стало 3:2. Сколько мальчиков было в хоре вначале?
3. В четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке M. Известно, что AM = 1, BM = 2, CM = 4. При каких значениях DM четырехугольник ABCD является трапецией?
4. Сравните числа √2011 + √2009 и 2√2010.
5. Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое знакомых или трое незнакомых между собой людей.

**10 класс**

1. Пусть a + b + c < 0 и уравнение ax2 + bx + c = 0 не имеет корней. Какой знак имеет число c?
2. Докажите, что уравнение xy = 2009 (x + y) имеет решения в целых числах.
3. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Определить углы треугольника.
4. (an) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S2009 - наименьшая среди всех Sn (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?  
   Имеется три кучи камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20 камней. За ход разрешается разбить любую кучу на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто победит – начинающий или его партнер?

**11 класс**

1. Постройте график функции http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_028.jpg
2. Определите a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения x2 + (2 - a)x – a - 3 = 0 была наименьшей.
3. Докажите, что если число http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_029.jpg делится на 11, то оно также делится и на 121.
4. Длины четырех отрезков (числа a, b, c, d) удовлетворяют условию a2 + b2 + c2 + d2 = ab + bc + cd + da. Верно ли, что объем куба, ребро которого равно одному из этих отрезков, равен объему прямоугольного параллелепипеда, тремя ребрами которого являются три другие отрезка?
5. Даны n точек, никакие четыре из которых не принадлежат одной плоскости. Сколько плоскостей можно провести через различные тройки этих точек?

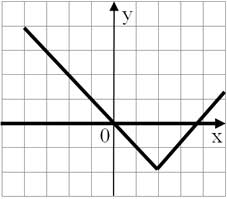
### **Ответы и решения задач**

**2009 год**

**7 класс**

1. Зашифрованное равенство:  34214 + 35170 = 69384.
2. Ответ: 37,5%. Пусть в спортивной секции было х мальчиков, тогда девочек – 0,6х. Они составляют (0,6x 100)/(x + 0,6x).
3. Ответ: 102348. Наименьшее число должно начинаться так: 10234. Последнюю цифру подбираем таким образом, чтобы выполнялся признак делимости на 9.
4. Ответ: можно. Например, отрезав по периметру квадрата 4 прямоугольника со сторонами 7/8 м и 1/8 м, а потом разрезать квадрат, который остался, на 3 прямоугольника со сторонами 3/4 м и 1/4 м.
5. Ответ: нельзя. Предположим, что такое заполнение возможно, и подсчитаем количество единичных отрезков, служащих общей границей соседних черной и белой клеток. С одной стороны, каждый такой отрезок примыкает ровно к одной белой клетке, и по условию к каждой белой клетке примыкает ровно два таких отрезка. Следовательно, количество рассматриваемых отрезков равняется удвоенному количеству белых клеток. Аналогично количество рассматриваемых отрезков равняется удвоенному количеству черных клеток. Но тогда, белых и черных клеток должно быть поровну, что невозможно. Так как их общее количество 20092 - нечетное число.

**8 класс**

1. Доказательство: 13 + 132 + 133 + 134 + … + 132009 + 132010 = 13 (1 + 13) + 133(1 + 13) + … + 132009(1 + 13) = 14 (13 + 133 + … + 132009). Так как 14 делится на 7, то и само число делится нацело на 7.
2. 

Ответ: равносторонний. Т.к. ∆ DBE = ∆ ECF = ∆ FAD (по двум сторонам и углу между ними). То DE = EF = FD. Поэтому ∆ DEF – равносторонний.



Ответ: 15. Пронумеруем деревья по кругу с 1-го по 44-е. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи либо не меняется, либо уменьшается на 44, либо увеличивается на 44. Тем самым, остаток от деления этой суммы номеров на 44 не меняется. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.

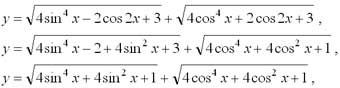
**9 класс**

1. Ответ: Нет. Сумма не может получиться нечетной, так как все простые числа, кроме двойки, - нечетные, а сумма восьми нечетных чисел четна.
2. Ответ: Мальчиков было 12. Решение: пусть вначале было 4x девочек, 3x мальчиков. Пусть среди новеньких a девочек. Тогда (4x + a) : (3x + (2 – a)) = 3:2. Отсюда x = 5a - 6 Единственно возможное значение a = 2 приводит к x = 4.
3. Ответ: Четырехугольник ABCD является трапецией, если DM равно 8 или 0,5. Возможны два варианта: основаниями трапеции являются стороны AB и CD или AD и BC. Рассмотрим первый случай: ∆ АМВ должен быть подобен ∆ СМD, откуда AM : MC = BM : DM, DM = 8. Во втором случае подобными треугольниками будут AMD и BMC. Тогда AM : MC = BM : DM, откуда DM = 0,5.
4. Пусть http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_031.jpg, B = 2√k , где k= 2010. Тогда  A2 – B2 = http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_032.jpg Поэтому A <B.
5. Пусть эти шестеро: A, B, C, D, E, M. А находится в одном из двух отношений «знаком» или «незнаком» хотя бы с тремя из них. Пусть это будут Если какие-то два из них находятся в том же отношении друг с другом, то они вместе с А образуют искомую тройку. В противном случае искомая тройка B, C, D.

**10 класс**

1. Ответ: c < 0. Обозначим за  f(x) = ax2 + bx + c.  Т.к.  f(1) = a + b + c< 0, то график функции f(x) = ax2 + bx + c будет находиться ниже оси абсцисс,  
   а значит,   f(0) = c< 0.
2. Преобразуем уравнение к следующему виду:  (x - 2009)(y - 2009) = 20092. Уравнение имеет решения, например, x = y = 4018.
3. Ответ: ﮮA = 30°, ﮮВ = 60° илиﮮA = 60°, ﮮВ = 30°. Необходимо рассмотреть два случая.
4. Ответ: a €(-2009; -2008). Так как разность прогрессии положительна, то прогрессия – возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессии с первого по 2009-ый – отрицательны, а начиная с 2010-го – положительны. Таким образом, S2009 будет наименьшей, тогда и только тогда, когда а2009 <0, a2010 > 0. Отсюда получаем систему неравенств получаем систему неравенств
5. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце – 45. Всего будет сделано 42 хода, последний ход сделает второй игрок и выиграет.

**11 класс**

1. **y = 4. Поэтому, графиком функции будет прямая, заданная уравнением y = 4.
2. Ответ:  a = 1.   Найдем сумму квадратов корней уравнения  x12 +  x22  = (x1 +  x2)2 – 2x1x2 = (2 – a)2 + 2(a + 3) = … = (a – 1)2 + 9. Значение данного выражения будет наименьшим при  a = 1. При этом значении a дискриминант левой части уравнения положителен, поэтому корни существуют.
3. Имеем http://e-ypok.ru/files/image/olimp/mathematiks/olimp_mathematics_035.jpg. Из условия следует, что хотя бы один сомножитель делится на 11. Если первый, то n + 1 четно, если второй, то n  - 1 четно, в силу признака делимости на 11. Тогда оба числа n + 1 и n  - 1 четны, оба сомножителя делятся на 11, и их произведе­ние делится на 121.
4. Ответ: да, верно. Данное уравнение перепишем в виде  (a – b)2 + (b – c)2 + (c– d)2 + (d – a)2 = 0. Следовательно, длины всех четырех отрезков равны между собой. Поэтому объем куба с ребром a равен объему прямоугольного параллелепипеда с ребрами b,  c, d.
5. Ответ: (n(n - 1)(n - 2))/6 . Первую точку можно взять п способами, вторую(n – 1)  способом. Число прямых, проходящих через них, равно (n(n - 1)/2. Третью точку можно выбрать (n – 2) способами. Тогда число прямых, проходящих через эти три точки, равно (n(n - 1)(n - 2))6, что и определяет наибольшее количество плоскостей, которые можно провести через различные тройки из n точек.