Первый этап республиканской олимпиады по математике

8 класс

2021/2022 учебный год

**8.1** Две семьи выехали каждая на машине «Жигули» на прогулку одновременно из одного места. Обе семьи проехали на машинах одинаковые расстояния и вернулись домой в одно и то же время. В пути они отдыхали. Первая семья была в пути в двое больше времени, чем вторая. Вторая была в пути втрое больше времени. Чем отдыхала первая.

Какая из этих семей двигалась на машине быстрее ?

**8.2.** Токарь за смену должен выточить 20 деталей. За каждую качественно изготовленную деталь он получит 800 рублей, за бракованную – штраф 500 рублей, за деталь, которую он не успел сделать, – 0 рублей. Сколько деталей изготовил токарь (качественных и бракованных), если за эту смену он получил 1300 рублей?

**8.3** Дед Мороз решил упаковать подарки по коробкам, чтобы их было удобнее перевозить. Сначала он разложил их по 4 штуки в каждую коробку, потом по 5, затем по 6 и всегда оставался один подарок. Тогда он решил положить в каждую коробку по 7 штук и тогда лишних подарков не осталось. Сколько было подарков, если известно, что их было меньше 400?

**8.4** Дан параллелограмм АВСD. Биссектрисса угла ВАС пересекает прямую СD в точке Е, а биссектриса угла DАС пересекает прямую ВС в точке F. Докажите, что биссектриса угла ВАD перпендикулярна прямой EF

**8.5.** В таблице размера 3×3 расставлены числа следующим образом

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | 0 |
| 4 | 9 | 5 |

Одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить или отнять одно и тоже число (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

Можно ли за несколько ходов получить:

а) таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

б) таблицу, в клетках которой стоят нули и одна единица?

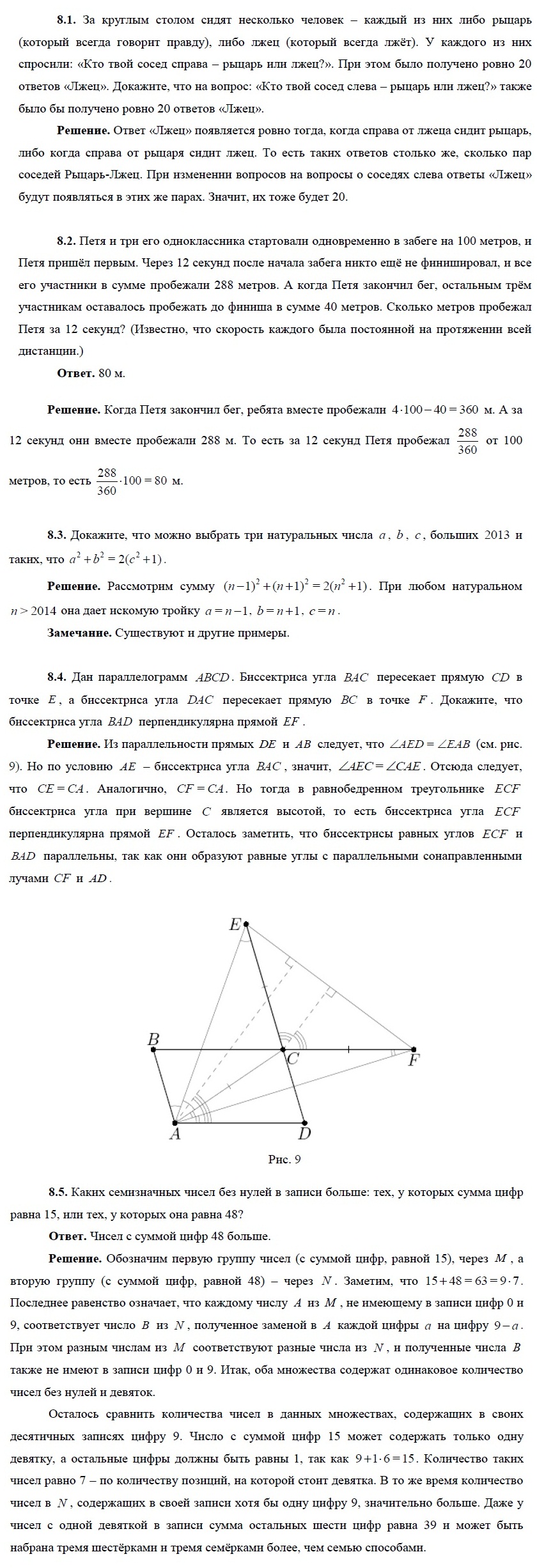
**Решения**

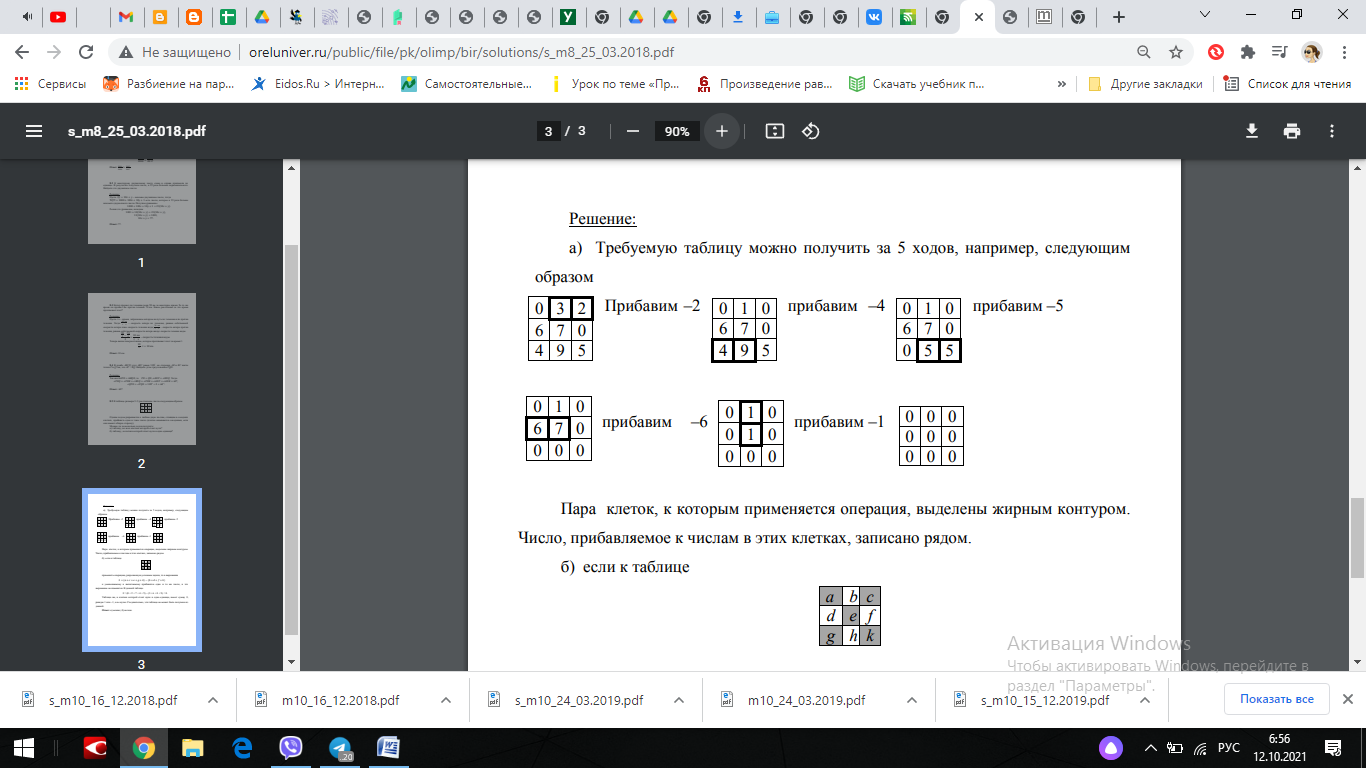
**8.1** Две семьи выехали каждая на машине «Жигули» на прогулку одновременно из одного места. Обе семьи проехали на машинах одинаковые расстояния и вернулись домой в одно и то же время. В пути они отдыхали. Первая семья была в пути в двое больше времени, чем вторая. Вторая была в пути втрое больше времени. Чем отдыхала первая. Какая из этих семей двигалась на машине быстрее ?  
 **Ответ:**   
1-я семья: 2х часов - время на езду, у часов - время на отдых.  
2-я семья: 3у часов - время на езду, х часов - время на отдых 2х + у = 3у + х; х = 2у.  
Вторая семья отдыхала в два раза больше, чем первая следовательно, она ехала быстрее первой.

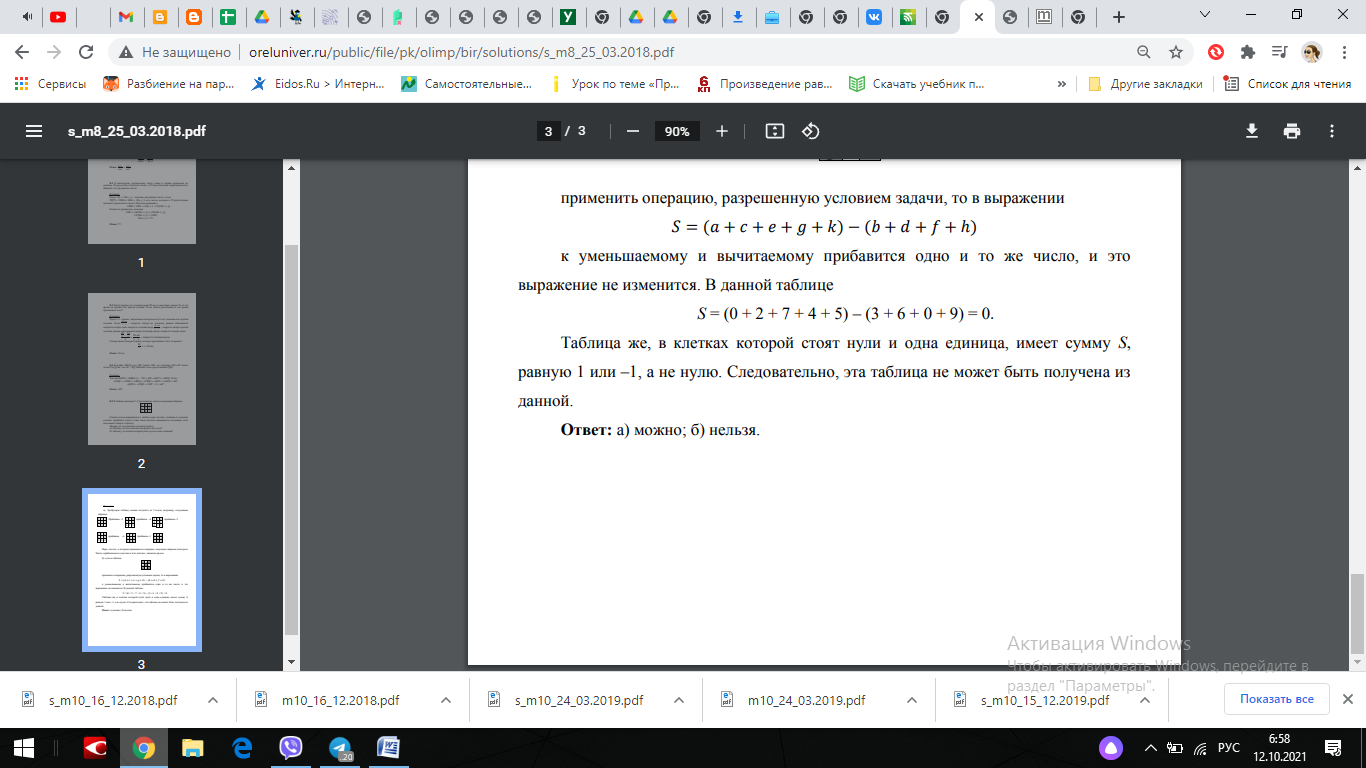
**8.2** Пусть x – количество качественно изготовленных деталей, y – бракованных. Тогда 800х-500у=1300 или 8х-5у = 13, переписав это уравнение в виде8(х+у)=13(1+у) Видно, что число (х+у) делится на 13. С другой стороны, по условию,(х+у) не больше 20. Поэтому х+у=13, еслих=6, у=7 .

Ответ: 13 деталей

**8.3** Задача сводится к отысканию натурального числа, кратного семи, не превосходящего 400, которое при делении на 4, 5 и 6 дает остаток 1. Это число имеет вид 60𝑛 + 1, где 60 – наименьшее общее кратное чисел 4. 5, 6, 𝑛 ∈ 𝑁, 𝑛 < 7. Подбором находим 𝑛 = 5. Следовательно, подарков было 301.







9 класс

2021/2022 учебный год

1. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних с самого начала лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки более двух лепестков).
2. Найдите наименьшее значение выражения
3. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены биссектриса и высота. Биссектриса делит гипотенузу в отношении 1:3. В каком отношении делит гипотенузу высота?
4. При каком значении параметра a уравнение имеет единственный корень?
5. Докажите, если , то .

11 класс

2021/2022 учебный год

1. Решите уравнение
2. В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла BAD. K – точка пересечения биссектрисы с диагональю DB, M – точка пересечения биссектрисы со стороной BC. Во сколько раз площадь параллелограмма ABCD больше площади треугольника BKM, если AB:AD=1:3?
3. На координатной плоскости Oxyнарисована парабола . Прямая, проходящая через точку (0;2), пересекает параболу в точках A и B. Найдите величину углаAOB.
4. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству . Найдите все возможные значения суммы x+y.
5. Решите неравенство

Решение

11 класс

1. Преобразуем уравнение к виду

Сделаем замену . Получим . Возвращаясь к замене, получим:

Ответ:

1. Ответ: 24.
2. Точки A и B удовлетворяют системе .

Значит, абсциссы точек A и B являются корнями уравнения

По теореме косинусов для треугольника AOB косинус угла AOB равен 0, значит искомый угол равен .

Ответ: .

1. Обозначим

По условию 0=

=

Поэтому возможны два случая:

1. a-3=0, a=x+y=3

Ответ: 3;-6.

1. Введем в рассмотрение три вектора . Тогда

По неравенству треугольника т. е. . Отсюда получаем равенство , из которого следует, что векторы коллинеарные. Следовательно, имеем

Ответ: