Первый этап республиканской олимпиады по математике

8 класс

2021/2022 учебный год

**8.1** Две семьи выехали каждая на машине «Жигули» на прогулку одновременно из одного места. Обе семьи проехали на машинах одинаковые расстояния и вернулись домой в одно и то же время. В пути они отдыхали. Первая семья была в пути в двое больше времени, чем вторая. Вторая была в пути втрое больше времени. Чем отдыхала первая.

Какая из этих семей двигалась на машине быстрее ?

**8.2.** Токарь за смену должен выточить 20 деталей. За каждую качественно изготовленную деталь он получит 800 рублей, за бракованную – штраф 500 рублей, за деталь, которую он не успел сделать, – 0 рублей. Сколько деталей изготовил токарь (качественных и бракованных), если за эту смену он получил 1300 рублей?

**8.3** Дед Мороз решил упаковать подарки по коробкам, чтобы их было удобнее перевозить. Сначала он разложил их по 4 штуки в каждую коробку, потом по 5, затем по 6 и всегда оставался один подарок. Тогда он решил положить в каждую коробку по 7 штук и тогда лишних подарков не осталось. Сколько было подарков, если известно, что их было меньше 400?

**8.4** Дан параллелограмм АВСD. Биссектрисса угла ВАС пересекает прямую СD в точке Е, а биссектриса угла DАС пересекает прямую ВС в точке F. Докажите, что биссектриса угла ВАD перпендикулярна прямой EF

**8.5.** В таблице размера 3×3 расставлены числа следующим образом

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | 0 |
| 4 | 9 | 5 |

 Одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить или отнять одно и тоже число (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

Можно ли за несколько ходов получить:

а) таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

б) таблицу, в клетках которой стоят нули и одна единица?

**Решения**

**8.1** Две семьи выехали каждая на машине «Жигули» на прогулку одновременно из одного места. Обе семьи проехали на машинах одинаковые расстояния и вернулись домой в одно и то же время. В пути они отдыхали. Первая семья была в пути в двое больше времени, чем вторая. Вторая была в пути втрое больше времени. Чем отдыхала первая. Какая из этих семей двигалась на машине быстрее ?
 **Ответ:**
1-я семья: 2х часов - время на езду, у часов - время на отдых.
2-я семья: 3у часов - время на езду, х часов - время на отдых 2х + у = 3у + х; х = 2у.
Вторая семья отдыхала в два раза больше, чем первая следовательно, она ехала быстрее первой.

**8.2** Пусть x – количество качественно изготовленных деталей, y – бракованных. Тогда 800х-500у=1300 или 8х-5у = 13, переписав это уравнение в виде8(х+у)=13(1+у) Видно, что число (х+у) делится на 13. С другой стороны, по условию,(х+у) не больше 20. Поэтому х+у=13, еслих=6, у=7 .

Ответ: 13 деталей

**8.3** Задача сводится к отысканию натурального числа, кратного семи, не превосходящего 400, которое при делении на 4, 5 и 6 дает остаток 1. Это число имеет вид 60𝑛 + 1, где 60 – наименьшее общее кратное чисел 4. 5, 6, 𝑛 ∈ 𝑁, 𝑛 < 7. Подбором находим 𝑛 = 5. Следовательно, подарков было 301.







9 класс

2021/2022 учебный год

1. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних с самого начала лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки более двух лепестков).
2. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^{4}+x^{2}+5}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}.$
3. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены биссектриса и высота. Биссектриса делит гипотенузу в отношении 1:3. В каком отношении делит гипотенузу высота?
4. При каком значении параметра a уравнение $2\left|x\right|+\left|x-1\right|=a$ имеет единственный корень?
5. Докажите, если $a+b+c\leq 3 и a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$, то $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\leq \frac{3}{2}$.

11 класс

2021/2022 учебный год

1. Решите уравнение $\left(1+x\right)\left(1+2x\right)\left(1+3x\right)=4\left(4+x\right)\left(4+2x\right)\left(4+3x\right)$
2. В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла BAD. K – точка пересечения биссектрисы с диагональю DB, M – точка пересечения биссектрисы со стороной BC. Во сколько раз площадь параллелограмма ABCD больше площади треугольника BKM, если AB:AD=1:3?
3. На координатной плоскости Oxyнарисована парабола $y=\frac{1}{2}x^{2}$. Прямая, проходящая через точку (0;2), пересекает параболу в точках A и B. Найдите величину углаAOB.
4. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству $x^{3}+y^{3}=27-9xy$. Найдите все возможные значения суммы x+y.
5. Решите неравенство $\sqrt{sin^{4}x+1}+\sqrt{cos^{4}x+1}\leq 5$

Решение

11 класс

1. Преобразуем уравнение к виду

$$\left(1+3x\right)\left(1+3x+2x^{2}\right)=4\left(3+1+3x\right)\left(16+12x+2x^{2}\right)$$

Сделаем замену $u=1+3x;v=2x^{2}$. Получим $u\_{1}=-4, u\_{2}=\frac{-2v-24}{10}$. Возвращаясь к замене, получим: $x\_{1}=-\frac{5}{3};x\_{2,3}=\frac{-15\pm \sqrt{89}}{4}$

Ответ: $x\_{1}=-\frac{5}{3};x\_{2,3}=\frac{-15\pm \sqrt{89}}{4}$

1. Ответ: 24.
2. Точки A и B удовлетворяют системе $\left\{\begin{array}{c}y=\frac{1}{2}x^{2}\\y=kx+2\end{array}\right.$.

Значит, абсциссы точек A и B являются корнями уравнения $x^{2}-2kx-4=0$

$$OA^{2}=\left(k^{2}+1\right)x\_{1}^{2}+4kx\_{1}+4; OB^{2}=\left(k^{2}+1\right)x\_{2}^{2}+4kx\_{2}+4$$

$$AB^{2}=\left(k^{2}+1\right)\left(x\_{2}-x\_{1}\right)^{2}$$

По теореме косинусов для треугольника AOB косинус угла AOB равен 0, значит искомый угол равен $90^{°}$.

Ответ: $90^{°}$.

1. Обозначим $x+y=a;y=a-x.$

По условию 0=$x^{3}+y^{3}-27+9xy=x^{3}+\left(a-x\right)^{3}+9x\left(a-x\right)-27=$

$$=x^{3}+a^{3}-3a^{2}x+3ax^{2}-x^{3}+9ax-9x^{2}-27=$$

=$\left(a-3\right)\left(3x^{2}-3ax+a^{2}+3a+9\right)$

Поэтому возможны два случая:

1. a-3=0, a=x+y=3
2. $3x^{2}-3ax+a^{2}+3a+9=0$

$$D=-3\left(a+6\right)^{2}\geq 0;a=-6$$

Ответ: 3;-6.

1. Введем в рассмотрение три вектора $\vec{a}\left(sin^{2}x;1\right), \vec{b}\left(cos^{2}x;1\right),\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Тогда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{sin^{4}x+1},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{cos^{4}x+1}, \left|\vec{c}\right|=\sqrt{\left(sin^{2}x+cos^{2}x\right)^{2}+\left(1+1\right)^{2}}=\sqrt{5}$

По неравенству треугольника $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\geq \left|\vec{c}\right|$т. е. $\sqrt{sin^{4}x+1}+\sqrt{cos^{4}x+1}\geq \sqrt{5}$. Отсюда получаем равенство $\sqrt{sin^{4}x+1}+\sqrt{cos^{4}x+1}=\sqrt{5}$, из которого следует, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ коллинеарные. Следовательно, имеем $\frac{sin^{2}x}{cos^{2}x}=1;tgx=\pm 1, x=\frac{π}{4}\left(23k+1\right), k\in Z. $

Ответ: $\frac{π}{4}\left(23k+1\right), k\in Z.$