Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2020/2021 учебном году
9 класс

<table>
<tr><th>Номер задания</th><th>Решение</th><th>Оценивание в баллах</th></tr>
<tr><td>9-1.</td><td>Перепишем неравенство в виде
$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab}\ 2\sqrt{bc}\ 2\sqrt{ca}$ и разобьем его на три неравенства.
Так как $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$, то перемножая эти неравенства, получаем исходное.

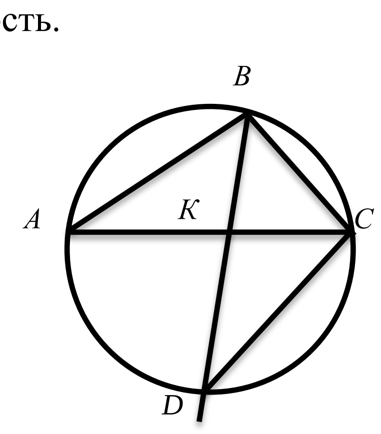
Ответ: доказано.
Итого</td><td>

10 баллов</td></tr>
<tr><td>9-2.</td><td>Поскольку линейная функция задается равенством $f(x)=kx+b$, то исходное уравнение для нее будет иметь вид: $2\left(k(x+2)+b\right)+k(4-x)+b=2x+7$ или $kx+8k+3b=2x+7$.
Так как два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, то $k=2$, $8k+3b=7$, откуда $b=-3$. Следовательно, искомая функция будет иметь вид $f(x)=2x-3$.
Сделав проверку:
$2\left(2(x+2)-3\right)+2(4-x)-3=4x+8-6+8-2x-3=2x+7$
убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $f(x)=2x-3$.
Итого</td><td>10 баллов

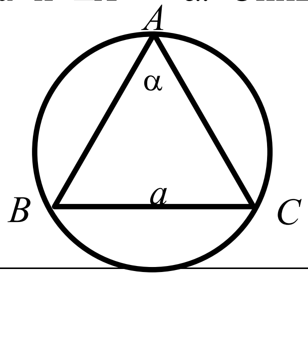
10 баллов

5 баллов

25 баллов</td></tr>
<tr><td>9-3.</td><td>Доказательство. Опишем вокруг треугольника ABC окружность.
</td><td></td></tr>
</table>

	Продлим биссектрису $BK = l$ до пересечения с окружностью в точке D. По свойству пересекающихся хорд $BK \cdot KD = AK \cdot KC$, т.е. $ln = xy$. Треугольники ABK и DBC подобны по двум углам: $\angle ABK = \angle DBC$, так как BD – биссектриса, $\angle A = \angle D$, так как опираются на одну и ту же дугу. Из подобия следует: $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BK}$, $\frac{l+n}{a} = \frac{b}{l}$, откуда $l^2 + ln = ab$. Из равенства $l^2 + ln = ab$ и $ln = xy$ вытекает требуемая формула: $l^2 = ab - xy$. *Ответ*: доказано. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* *10 баллов* **30 баллов**
9-4.	Графиком функции $f(x) = 1 - 23x + 3x^2$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $3\frac{5}{6}$ и ветвями, направленными вверх. Поэтому номер наименьшего члена последовательности $p_n = 1 - 23n + 3n^2$ равен 3 или 4 (ближайшие натуральные числа к числу $3\frac{5}{6}$). $p_3 = 1 - 69 + 27 = -41$; $p_4 = 1 + 48 - 92 = -43$. Тогда номер наименьшего члена последовательности (p_n) равен 4. *Ответ*: 4. **Итого**	*5 баллов* *5 баллов* *5 баллов* *5 баллов* **20 баллов**
9-5.	Если k – угловой коэффициент прямой и точка $B(2;0)$ принадлежит прямой, то её уравнение имеет вид $y = k(x - 2)$. Тогда абсциссы точек пересечения прямой и параболы $y = 2x^2$ — это корни уравнения $2x^2 = k(x - 2)$, или $2x^2 - kx + 2k = 0$. По теореме Виета $s + t = \frac{k}{2}$, $s \cdot t = k$. Поэтому $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{t+s}{st} = \frac{k}{2} : k = \frac{1}{2}$. *Ответ*: $\frac{1}{2}$. **Итого**	*5 баллов* *10 баллов* **15 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2020/2021 учебном году
10 класс

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
10-1.	Сделаем замену переменной $t = x - 3$, тогда $x = t + 3$, где $t \geq 0$, и исходное неравенство запишется как $(t + 3)^3 - 4(t + 3)^2 - 3(t + 3) + 19 > 0$.	*5 баллов*
	Но $(t + 3)^3 - 4(t + 3)^2 - 3(t + 3) + 19 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$ $- 4(t^2 + 6t + 9) - 3t - - 9 + 19 = t^3 + 5t^2 + 1 > 0$, так как $t \geq 0$. *Ответ*: доказано.	*10 баллов*
	Итого	**15 баллов**
10-2.	Имеем: $ax+b > \dfrac{a\left(x+\dfrac{a}{b}\right)+b+a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)+b}{2} =$ $= \dfrac{ax+\dfrac{a}{b}a+b+ax+\dfrac{b}{a}a+b}{2} =$ $= \dfrac{ax+\dfrac{a^2}{b}+b+ax+b+b}{2}$.	*10 баллов*
	Откуда $ax+b > ax+\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{3b}{2} \Leftrightarrow b > \dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{3b}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{b}{2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2b} < 0$	*10 баллов*
	откуда следует, что $b < 0$.	*5 баллов*
	Ответ: доказано	
	Итого	**25 баллов**
10-3.	Построим равнобедренный треугольник BAC с основанием $BC = a$ и $\angle A = \alpha$. Опишем около него окружность.  	*5 баллов*

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
	Все вписанные углы, опирающиеся на дугу BC, равны α. Дуга BAC состоит из вершин таких углов. Если вершина угла, который опирается на дугу BC, лежит вне окружности или внутри нее, то этот угол будет меньше или больше α . Искомое геометрическое место точек представляет собой объединение двух дуг: дуги BAC и ей симметричной относительно прямой, содержащей отрезок a. Концы этих дуг не входят в искомое ГМТ. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **25 баллов**
10-4	По условию задачи многочлен $f(x)$ может быть представлен в следующем виде: $f(x) = (x^3 – 7x^2 + 7x + 15) \cdot g(x) + x^2 – 8x + 14,$ где $g(x)$ – некоторый многочлен. Тогда $f(3) = (27 – 63 + 21 + 15)\cdot g(3) + 9 – 24 + 14 = –1,$ $f(5) = (125 – 175 + 35 + 15) \cdot g(5) + 25 – 40 + 14 = –1,$ $f(–1) = (–1 – 7 – 7 + 15) \cdot g(–1) + 1 + 8 + 14 = 23$ Итак, $f(3) \cdot f(5) – f(–1) = 1 – 23 = 22.$ *Ответ*: 22. **Итого**	*5 баллов* *10 баллов* *5 баллов* **20 баллов**
10-5.	**Решение.** Если k – угловой коэффициент прямой из условия, то ее уравнение имеет вид $y = k(x + 2)$. Тогда абсциссы точек пересечения прямой и параболы $y = x^2$ – это корни уравнения $x^2 = k(x + 2),$ или $x^2 - kx - 2k = 0.$ По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$ и $x_1x_2 = -2k$. Поэтому $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{k}{-2k} = -\frac{1}{2}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2}$. **Итого**	*5 баллов* *10 баллов* **15 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2020/2021 учебном году
11 класс

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
11-1.	Пусть для определенности $x > y$. Тогда $\lvert x-y\rvert = x-y$. Получаем $\frac{x^2+y^2}{x-y} - 2\sqrt{2} = \frac{(x-y)^2+2xy}{x-y} - 2\sqrt{2} = \frac{(x-y)^2+2}{x-y} - 2\sqrt{2} =$ $= \frac{(x-y)^2 - 2\sqrt{2}\,(x-y)+2}{x-y} = \frac{(x-y-\sqrt{2})^2}{x-y} \geq 0$. Случай, когда $x = y$, очевиден. **Итого**	*5 баллов* *10 баллов* **15 баллов**
11-2.	Заменим в заданном равенстве x на $(-x)$, получим равенство: $-x\left(f(-x)+f(x)+4\right)+2f(-x)+2=0$. Сложив его с исходным, получим, что при всех $x \in R$ будет верным равенство $f(x)+f(-x)=-2$. С учетом последнего исходное равенство примет вид $x(-2+4)+2f(x)+2=0$, откуда $f(x)=-x-1$. Сделав проверку: $x\left(-x-1+(-(-x)-1)+4\right)+2(-x-1)+2=2x-2x-2+2=0$, убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет исходному уравнению. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* *5 баллов* **25 баллов**
11-3.	На доске должно остаться число 5. Цифры 1 и 9 могли быть получены только в произведениях $3 \cdot 7$ и $1 \cdot 9$, значит, все нечетные числа были оставлены. Еще необходимо одно четное число, значит, на доске было оставлено не менее шести чисел. Легко убедиться в том, что попарные произведения шести чисел 1, 2, 3, 5, 7, 9 оканчиваются на все цифры от 0 до 9. *Ответ*: 3. **Итого**	*5 баллов* *5 баллов* *10 баллов* **20 баллов**

11-4	Пусть катеты треугольников равных x и y, причем $x > y$. Тогда сторона внутреннего квадрата равна $x - y$, а радиус вписанной окружности равен $\frac{x-y}{2}$.	*5 баллов*
	Радиус окружности, вписанной в треугольник с катетами x, y и гипотенузой 1, равен $\frac{x+y-1}{2}$.	*5 баллов*
	Таким образом, мы получаем уравнение $x - y = x + y - 1$, откуда $y = \frac{1}{2}$.	*5 баллов*
	Но это означает, что меньший угол треугольника равен 30°, а $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, искомый радиус равен $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.	*5 баллов*
	Итого	**20 баллов**
11-5.	Обозначим выражение в левой части тождества через f Получим: $f = tg\frac{\beta}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\gamma}{2}\right) + tg\frac{\gamma}{2}\, tg\frac{\alpha}{2} = tg\frac{\pi-(\alpha+\gamma)}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} +$	*10 баллов*
	$+ tg\frac{\gamma}{2}\, tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} =$ $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 1.$ Тождество доказано.	*10 баллов*
	Итого	**20 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Предлагаемые критерии

оценки выполнения заданий II этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» в 2020/2021 учебном году

1. Каждая задача оценивается определённым количеством баллов. В решении задач предложено количество выставляемых баллов за каждый верный этап решения задачи, если методы решения данных задач совпадают. В противном случае руководствоваться пунктами 2-9.

2. За полностью решенную и оформленную задачу – предложенное количество баллов.

3. За неполное решение, при наличии ошибок и недочетов в решении и оформлении – целое число баллов от 1 до предложенного максимума баллов.

4. За принципиально неверный подход к решению или при отсутствии решения – 0 баллов.

5. Оценка снижается на 10% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть или ошибка/ошибки (описка/описки) в промежуточных вычислениях или незначительный логический пропуск в рассуждениях, не отразившийся на правильном конечном результате

6. Оценка снижается на 20% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть ошибка (описка) в промежуточных вычислениях, в результате которой получен численно неправильный конечный результат.

За каждую последующую ошибку (описку) в пределах задания, дополнительно искажающую результат, оценка дополнительно снижается на 10% баллов от заявленных .

За переходящую ошибку баллы повторно не снимаются.

7. Оценка снижается на 60% баллов в случае, если есть предпосылки к решению, например, сформулированы положения, которые могут привести к решению, но решения нет или допущена грубая ошибка.

8. Оценка снижается на 80% баллов в случае, если решение начато, но неверно, есть правильно сформулированные теоретические положения.

9. За ответ, решение при этом отсутствует – 10% баллов.