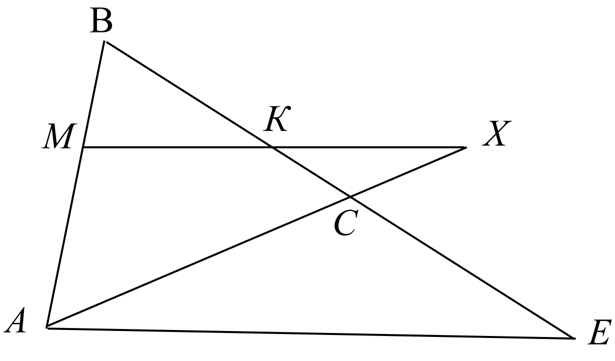
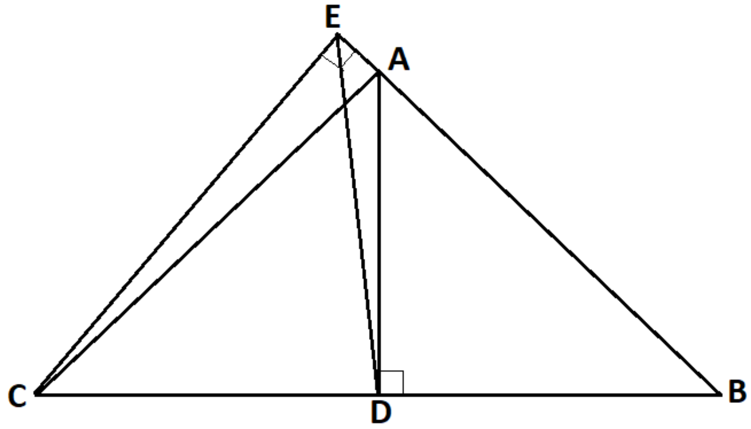
Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2021/2022 учебном году
9 класс

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
9-1.	Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета? **Решение**. Пусть на мяче x белых лоскутов, $(32-x)$ — чёрных. Тогда границ белых с чёрными $5(32-x) = 3x,$ $x=20$ *Ответ*: *20*. **Итого**	*2 балла* *3 балла* **5 баллов**
9-2.	Докажите, что среди чисел вида $2^a + 4^b$, где a и b натуральные числа, бесконечно много таких, которые являются квадратами натуральных чисел. **Решение.** Пусть $a = 2b + 3$. Тогда имеем: $2^a + 4^b =$ $= 2^{2b+3} + 4^b = 4^b \cdot 2^3 + 4^b = 4^b \cdot (2^3 + 1) = 9 \cdot 4^b = (3 \cdot 2^b)^2$. Таким образом, все числа $2n + 3$, $n \in N$ удовлетворяют условию, а их, как известно, бесконечно много, что и требовалось доказать. *Ответ*: доказано **Итого**	*3 балла* *2 балла* **5 баллов**
9-3.	В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что $MB = \frac{1}{3}AB$, а на стороне BC взята точка K так , что $KC = \frac{2}{5}BC$. Прямая MK пересекает прямую AC в точке X. Найти отношение $AC : CX$. **Решение**. Проведем AE параллельно MK. Тогда $MB : AM = BK : KE = 1 : 2 = 3 : 6$. Отсюда $KC : CE = 2 : 4 = 1 : 2$. Так как $\triangle ACE \sim \triangle XCK$, то $AC : CX = 2 : 1$.	*2 балла* *1 балл* *1 балл* *2 балла*

	 *Ответ*: 2 : 1. **Итого**	 **6 баллов**
9-4.	Числа x, y и z попарно различны и удовлетворяют соотношениям $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. Чему может равняться $x\cdot y\cdot z$? **Решение**. Из соотношений имеем: $x-y=\frac{y-z}{zy}$; $y-z=\frac{z-x}{zx}$; $z-x=\frac{x-y}{xy}$; Перемножим эти равенства $(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{y-z}{zy}\cdot\frac{z-x}{xz}\cdot\frac{x-y}{xy}=$ $=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{z^2y^2x^2}$ Так как $x\neq y, x\neq z, y\neq z$, то $x^2\cdot y^2\cdot z^2=1$ $xyz=-1$ или $xyz=-1$ *Ответ*: 1; –1. **Итого**	 *1 балл* *1 балл* *1 балл* *2 балла* *1 балла* **6 баллов**
9-5.	Построить треугольник по заданным углу и периметру. **Решение**. На сторонах заданного угла от вершины отложить отрезки, равные половине периметра, и отметить концы точками. Построить окружность, касающуюся сторон угла в отмеченных точках. Провести прямую, касающуюся меньшей дуги окружности. Она отсечёт от угла треугольник заданного периметра. Существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. **Итого**	 *3 балла* *2 балла* *2 балла* *1 балл* **8 баллов**
	ИТОГО	**30 баллов**

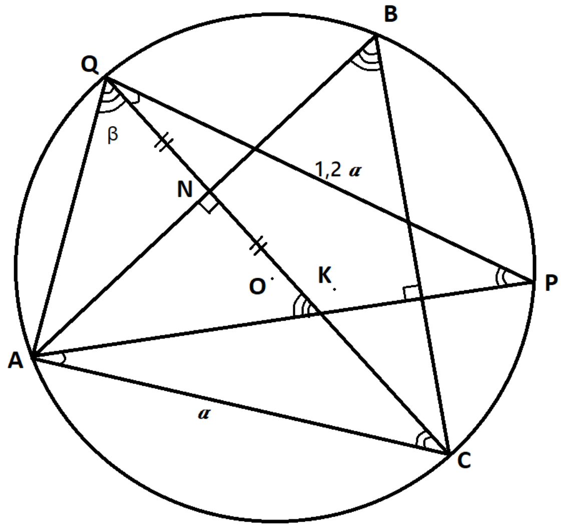
Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2021/2022 учебном году
10 класс

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
10-1.	Докажите, что $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ для любых $x, y \in [0; 1]$. **Решение**. Умножим обе части неравенства на положительный общий знаменатель и перенесем все слагаемые в одну часть. После раскрытия скобок получим $2(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2) - (1 + y^2 + xy + xy^3) - (1 + x^2 + xy +$ $+ x^3y) = (1 - xy)(x - y)^2 \geq 0$, что завершает доказательство исходного неравенства, поскольку $1 - xy \geq 0$ и $(x - y)^2 \geq 0$. *Ответ*: доказано. **Итого**	 *4 балла* *2 балла* **6 баллов**
10-2.	Пусть $f(x - 1) = 2x - 1$ и $f(g(x)) = 4x - 3$. Найти $g(x)$. **Решение**. $f(x - 1) = 2x - 1$ запишем в виде $f(x - 1) = 2(x - 1) + 1$. Отсюда следует, что функция имеет вид: $f(t) = 2t + 1$. Тогда $f(g(x)) = 2g(x) + 1$. С другой стороны, $f(g(x)) = 4x - 3$ Получим уравнение: $2g(x) + 1 = 4x - 3$, $g(x) = 2x - 2$. *Ответ*: $g(x) = 2x - 2$. **Итого**	 *1 балл* *1 балл* *2 балла* *1 балл* *1 балл* **6 баллов**
10-3.	Сколько полных квадратов содержится среди чисел вида a^a, где $1 \leq a \leq 200$? **Решение**. Если число a чётное, то число $a^a = (a^{\frac{a}{2}})^2$ является квадратом целого числа. Если же число a нечётное, то $a^a = a \cdot (a^{\frac{a-1}{2}})^2$, т.е. число a^a будет квадратом целого числа тогда и только тогда, когда само число a является квадратом некоторого целого числа. Итак, среди чисел от 1 до 200 ровно 100 чётных чисел и 7 нечётных квадратов (1, 9, 25, 49, 81, 121, 169). Итого имеем 107 искомых чисел. *Ответ*: *107* **Итого**	 *2 балла* *3 балла* *2 балла* **7 баллов**

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
10-4	В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *CE* (*рис.)*. Найти длину отрезка *DE*, если $AB = 15$, $AC = 18$, $BD = 10$.  *Рис.* **Решение**. Треугольники *BED* и *BCA* подобны, $DE : 18 = 10 : 15$ и $DE = 12$. Углы *EDA* и *ECA* равны, потому что четырехугольник *ADCE* вписывается в окружность (противоположные углы этого четырехугольника прямые). *Ответ* 12 **Итого**	 *2 балла* *2 балла* *1 баллов* **5 баллов**
10-5.	Найти целые числа *x* и *y*, такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$. **Решение**. Преобразуем это уравнение: $x^3 - y^3 = 7x - 7y$ или $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = = 7(x - y)$. (1) Так как $x > y$, уравнение (1) равносильно уравнению $x^2 + y^2 + xy = 7$ или $(x - y)^2 = 7 - 3xy$. Теперь ясно, что $7 - 3xy > 0$, т.е. $xy < 7/3$. Но это возможно только в следующих случаях: 1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 2$, $y = 1$. Окончательно получаем $x = 2$, $y = 1$, так как по условию задачи $x > y$. *Ответ* $x = 2$, $y = 1$ **Итого**	 *2 балла* *1 балла* *1 балл* *2 балла* **6 баллов**
	ИТОГО	**30 баллов**

Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2021/2022 учебном году
11 класс

Номер задания	**Решение**	**Оценивание в баллах**
11-1.	Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$, где $x, y \in [0; 1]$. **Решение.** Умножим обе части неравенства на общий знаменатель, после переноса слагаемых в одну часть неравенства и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $1 - x^2 - y^2 + xy \geq 0$. Предположим, что $x \geq y$ (другой случай аналогичен). Исходное неравенство будет равносильно $(1 - x^2) + y\,(x - y) \geq 0$. Последнее неравенство верно, поскольку $1 - x^2 \geq 0$, $y \geq 0$ и $x - y \geq 0$. *Ответ*: доказано	 *3 балла* *2 балла*
	Итого	**5 баллов**
11-2.	Найти решение системы уравнений $\begin{cases} f(2x+1) + g(x-1) = x, \\ f(2x+1) - 2g(x-1) = x^2. \end{cases}$ **Решение.** Вычтем из первого уравнения системы второе: $g(x-1) = \frac{x - x^2}{3}$. Из первого уравнения найдем, что $f(2x+1) = x - g(x-1) = x - \frac{x - x^2}{3} = \frac{2x + x^2}{3}$. Тогда $g(x) = g((x+1) - 1) = \frac{(x+1) - (x+1)^2}{3} = \frac{x^2 + x}{3}$ и $f(x) = f(2\,\frac{x-1}{2} + 1) = \frac{2\left(\frac{x-1}{2}\right) + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{3} = \frac{x^2 + 2x - 3}{12}$. Проверка: $f(2x+1) + g(x-1) = \frac{2x + x^2}{3} + \frac{x - x^2}{3} = x$. $f(2x+1) - 2g(x-1) = \frac{2x + x^2}{3} - 2 \cdot \frac{x - x^2}{3} = x^2$. *Ответ:* $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{12}$, $g(x) = -\frac{x^2 + x}{3}$.	 *1 балл* *1 балл* *2 балла* *2 балла* *1 балл*
	Итого	**7 баллов**

11-3.	Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек M $(x; y)$ таких, что $(x^2 - 2x + 4)(y^2 - 6y + 11) = 6$ **Решение.** Искомое множество состоит из единственной точки M $(1; 3)$. Действительно, $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3$, $y^2 - 6y + 11 = (y - 3)^2 + 2 \geq 2$. Значит, $(x^2 - 2x + 4)\cdot(y^2 - 6y + 11) \geq 6$, причем равенство возможно лишь при $x = 1$, $y = 3$. *Ответ*: M $(1; 3)$ **Итого**	*2 балла* *2 балла* *1 балла* **5 баллов**
11-4.	Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках P и Q (рис.).  Найти радиус окружности, описанный вокруг этого треугольника, если $AC = a$ и $PQ = 1{,}2a$. **Решение**. Треугольники QKP и AKC подобны, поэтому $QK : AK = 1{,}2$. Строим отрезок AQ. Очевидно, что углы AQK, AKQ и ABC равны, поэтому $QN = NK$. Теперь ясно, что $NK : AK = 3:5$, т.е $\cos\beta = 0{,}6$. Итак, $R = a/(2\sqrt{1 - 9/25}) = \frac{5}{8}a$. Ответ: $\frac{5}{8}a$ **Итого**	*1 балл* *2 балла* *2 балла* *1 балла* **6 баллов**
11-5.	Выяснить, рационально ли число $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}$? **Решение.** Трижды применив формулу синуса двойного угла, получим $\sin\frac{8\pi}{18} = 2\sin\frac{4\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18} = 4\sin\frac{2\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18} =$ $= 8\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}$. Заменяя косинусы синусами дополнительных углов ($\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$)преобразуем полученное тождество к	*2 балла*

	виду $sin\frac{8\pi}{18} = 8sin\frac{\pi}{18}sin\frac{8\pi}{18}sin\frac{7\pi}{18}sin\frac{5\pi}{18}$ Итак, $$sin\frac{\pi}{18}sin\frac{5\pi}{18}sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$ Но $sin\frac{3\pi}{18} = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $sin\frac{9\pi}{18} = sin\frac{\pi}{2} = 1$, поэтому из тождества (1) получаем $sin\frac{\pi}{18}sin\frac{3\pi}{18}sin\frac{5\pi}{18}sin\frac{7\pi}{18}sin\frac{9\pi}{18} = \frac{1}{16}$. Следовательно, число, о котором говорится в задаче, рационально. **Итого**	*2 балла* *1 балл* 2 балла **7 баллов**
	ИТОГО	**30 баллов**

Предлагаемые критерии

оценки выполнения заданий II этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» в 2021/2022 учебном году

1. Каждая задача оценивается определённым количеством баллов. В решении задач предложено количество выставляемых баллов за каждый верный этап решения задачи, если методы решения данных задач совпадают. В противном случае руководствоваться пунктами 2-9.

2. За полностью решенную и оформленную задачу – предложенное количество баллов.

3. За неполное решение, при наличии ошибок и недочетов в решении и оформлении – целое число баллов от 1 до предложенного максимума баллов.

4. За принципиально неверный подход к решению или при отсутствии решения – 0 баллов.

5. Оценка снижается на 10% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть или ошибка/ошибки (описка/описки) в промежуточных вычислениях или незначительный логический пропуск в рассуждениях, не отразившийся на правильном конечном результате

6. Оценка снижается на 20% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть ошибка (описка) в промежуточных вычислениях, в результате которой получен численно неправильный конечный результат.

За каждую последующую ошибку (описку) в пределах задания, дополнительно искажающую результат, оценка дополнительно снижается на 10% баллов от заявленных .

За переходящую ошибку баллы повторно не снимаются.

7. Оценка снижается на 60% баллов в случае, если есть предпосылки к решению, например, сформулированы положения, которые могут привести к решению, но решения нет или допущена грубая ошибка.

8. Оценка снижается на 80% баллов в случае, если решение начато, но неверно, есть правильно сформулированные теоретические положения.

9. За ответ, решение при этом отсутствует – 10% баллов.