XLVIII Белорусская математическая олимпиада школьников

г. Гомель, 23 - 28 марта 1998 г.

Второй день

9 класс

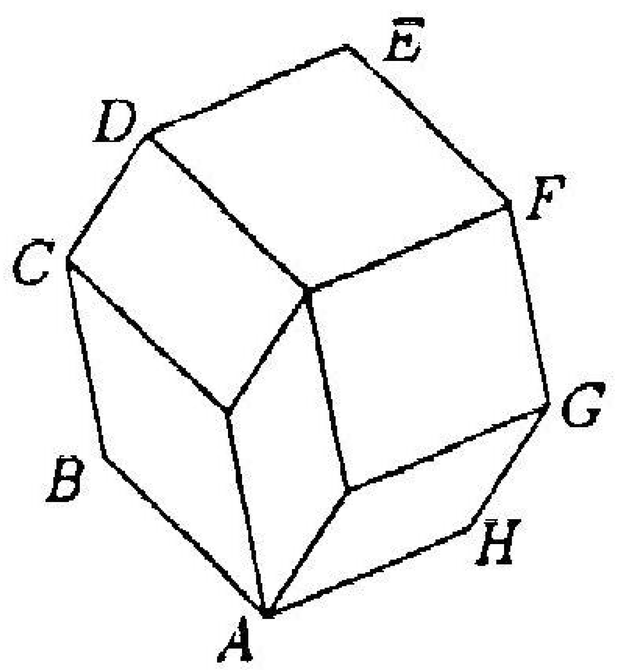
5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки K, H и T так, что $AH \perp BC$, $\angle BCK = \angle ACK$ и $AT = TC$.

Найдите периметр треугольника ABC, если известны длины отрезков $KM = 2$ *см*, $MN = 1$ *см* и $NC = 3$ *см*, где M — точка пересечения AH и CK, а N — точка пересечения HT и CK.

6. Когда много лет назад новый учитель математики впервые пришёл в один из классов сельской школы, то и у него, и у некоторого его ученика возрасты были равны сумме цифр года рождения каждого из них.

На сколько лет учитель был старше своего ученика? (Можно считать, что учитель и ученик родились в последнем тысячелетии.)

7. Докажите, что если выпуклый восьмиугольник $ABCDEFGH$ можно разбить на шесть параллелограммов показанным на рисунке способом, то четыре прямые AE, BF, CG и DH пересекаются в одной точке.



8. В грибе, представляющем из себя квадрат 16×16, разбитый на 256 равных квадратиков, завелось 13 червяков. Каждый червяк представляет из себя цепочку, состоящую из пяти квадратиков A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, в которой каждые два последовательных квадратика A_i и A_{i+1} $(i = 1, 2, 3, 4)$ имеют общую сторону.

а) Докажите, что одним разрезом, параллельным стороне квадрата, можно разрезать не менее трёх червяков.

б) Останется ли верным утверждение пункта а), если один из червяков выползет из гриба?

XLVIII Белорусская математическая олимпиада школьников

г. Гомель, 23 - 28 марта 1998 г.

Первый день

9 класс

1. К натуральному числу n приписали справа три цифры и из полученного числа вычли половину исходного числа n. В результате получилась сумма всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Чему равно исходное число n и какие цифры были приписаны?

2. На координатной плоскости отмечена точка $A(1;\ 2)$. За один ход разрешается, выбрав произвольное число a, заменить точку A на симметричную ей относительно прямой $y = ax - (2a + 1)$ точку. С полученной точкой можно проделать аналогичную процедуру и т. д.

Можно ли за конечное число таких ходов получить а) точку $B(-1;\ 1)$; б) точку $C(-1;\ -2)$?

3. а) Докажите, что для любого выпуклого четырёхугольника одна из его средних линий (т. е. прямых, соединяющих середины противоположных сторон) разбивает его на две части, площадь каждой из которых не меньше 3/8 площади всего четырёхугольника.

б)* Останется ли верным утверждение пункта а), если число 3/8 заменить большим числом?

4. В некотором классе изучается n $(n \geq 2)$ учебных предметов. В конце учебного года выяснилось, что по каждому отдельно взятому предмету годовую оценку „отлично“ имеют ровно три ученика и что какие бы два учебных предмета ни выбрать, найдётся ровно один ученик, который за год по этим предметам имеет оценку „отлично“.

Докажите, что

а) если $n \geq 8$, то в классе имеется единственный отличник (т. е. ученик, у которого все годовые оценки по всем n предметам — „отлично“);

б) если $n \leq 7$, то в классе отличника может, вообще говоря, не быть.