Аналогично, во втором списке x занимает место под номером

$$x - p(m+n-1) - k_1 - k_2 - \left[\frac{r_1 - k_2}{m}\right],$$

где $r_2 \neq 0$ и $r_1 - k_2$ не кратно m, так что $r_1 \neq k_2$.

Нам нужно доказать, что $\left[\frac{r_2 - k_1}{n}\right] = \left[\frac{r_1 - k_2}{m}\right]$ при $m = 2$. Заметим, что $0 \neq |r_2 - k_1| < n$ и $0 \neq |r_1 - k_2| < m$. Стало быть, обе целые части равны либо 0 либо -1. Поскольку $m = 2$ и $0 < r_1 < m$, имеем $r_1 = 1$. Кроме того, т.к. $0 \leq k_2 < m$ и $k_2 \neq r_1$, то $k_2 = 0$. Поэтому $\left[\frac{r_1 - k_2}{m}\right] = 0$. Далее, подставляя полученные значения r_1 и k_2, получаем $r = k_1 \cdot 2 + r_1 = 0 \cdot n + r_2$, откуда $r_2 = 2k_1 + 1$, так что $r_2 - k_1 > 0$; тогда из $r_2 - k_1 < n$ следует $\left[\frac{r_2 - k_1}{n}\right] = 0 = \left[\frac{r_1 - k_2}{m}\right]$, что и требовалось.

б) Пара $(3;5)$ хорошая. Действительно, это достаточно проверить для списков, составленных обоими способами лишь из ряда первых 15 натуральных чисел. Прямая проверка показывает, что каждое число, встречающееся в обоих списках, занимает там места с одинаковыми номерами.

3. Заметим, что

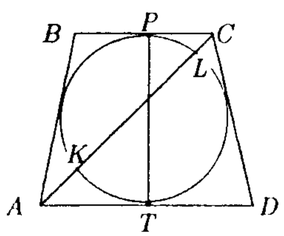
$$\frac{\frac{a_n^2}{a_m} - \frac{n}{m}\left(\frac{a_m^2}{a_n} - a_m\right)}{n} + \frac{\frac{a_m^2}{a_n} - \frac{m}{n}\left(\frac{a_n^2}{a_m} - a_m\right)}{m} = \frac{a_m}{m} + \frac{a_n}{n}.$$

Поэтому величина $\sum\limits_{i=1}^{100} \frac{a_i}{i}$ является инвариантом (не меняется в результате указанных преобразований). Легко видеть, что в исходном наборе такая сумма равна $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно простые и q кратно 125. А если бы был получен набор $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ – целых чисел, то дробь $\sum\limits_{i=1}^{100} \frac{b_i}{i}$ не имела бы знаменатель, кратный 125.

Таким образом, из исходного набора нельзя с помощью указанных замен получить набор целых чисел.

4. Ответ: 6.

Пусть T и P — точки касания окружности с верхним и нижним основаниями соответственно, H — основание высоты, опущенной из точки D на прямую AB, r — искомый радиус. Обозначим



$$AT = u,\ BT = v,\ DP = z,\ CP = w,\ AK = a,$$

$$KL = x,\ LC = c,\ BM = b,\ MN = y,\ ND = d.$$

По теореме о касательной и секущей имеем равенства

$$u^2 = a(a+x), \quad w^2 = c(c+x), \quad v^2 = b(b+x), \quad z^2 = d(d+y) \qquad (1)$$

Далее, из треугольника AHD по теореме Пифагора $(u+z)^2 - (u-z)^2 = DH^2 = 4r^2$, откуда $uz = r^2$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

1. По окружности расставлено 20 фишек. Двое по очереди снимают по 3 любых фишки до тех пор, по не останутся только 2 фишки. Если окажется, что эти фишки стояли через одну в исходной расстановке (т.е. имели общую соседнюю фишку), то выиграл второй игрок, в противном случае – его соперник, начинающий игру.

Кто выиграет при правильной игре, и как он должен играть, чтобы добиться победы независимо от игры противника ?

2. Отношение корней квадратного уравнения

$$px^2 - qx + q = 0, \quad p > 0, \quad q > 0,$$

равно $k > 0$.

Найдите корни уравнения

$$\sqrt{p}\,x^2 - \sqrt{q}\,x + \sqrt{p} = 0.$$

(Ответ не должен зависеть от p и q, а только от k.)

3. Из чисел 1,2,3,...,n ($n \geq 9$) требуется выбрать 9 чисел и расставить их в клетках таблицы 3×3 так, чтобы в любых двух соседних клетках одно из чисел делилось на другое.

При каком наименьшем n это можно сделать ?

4. В пятиугольнике $ABCDE$ стороны AE и ED равны, кроме того, $AB + CD = BC$ и $\angle BAE + \angle CDE = 180^0$.

Докажите, что $\angle BEC = \frac{1}{2}\angle AED$.

9 класс

1. На некотором острове между любыми двумя жителями установлена односторонняя связь, которая используется для передачи сплетен. Каждый день каждый житель придумывает какую-нибудь новую сплетню и передает ее всем, кому может, вместе со всеми сплетнями, полученными им в предшествующий день.

Докажите, что если в среду некоторый житель не получит обратно свою сплетню, отправленную им в понедельник, то на острове существуют сплетни, которые доходят не до всех жителей.

2. Имеется конечный набор из не менее чем двух положительных попарно различных действительных чисел, удовлетворяющий следующему условию: для любого числа a из этого набора найдутся числа b и c из набора (a, b и c не обязательно различные) такие, что

$$a = 1 + \frac{b}{c}.$$

Докажите, что в наборе найдутся два разных числа x и y такие, что $x + y > 4$.

3. Столбцы и строки таблицы $n \times n$ занумерованы числами от 1 до n. В каждую клетку этой квадратной таблицы записывается число 1 или -1 так, чтобы произведение чисел, стоящих в строках и столбцах с одинаковыми номерами, были различны.

а) Найдите все n, при которых это можно сделать и

б) выясните, каким наименьшим числом -1 в этом случае можно обойтись.

4. На стороне AB остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны CA и CB в точках L и N соответственно. Пусть K — точка пересечения отрезков LN и CM.

Найдите CM, если известно, что $CK = \frac{3}{5}CM$ и $AB = 9$.

11 класс

1. Ответ: 3.

Положим

$$A_k = (4\sin^2 0 - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{2\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{3\pi}{2^k} - 3)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot(4\sin^2\frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2} - 3).$$

Заметив, что

$$(4\sin^2 x - 3)(4\sin^2(\frac{\pi}{2} - x) - 3) = 16\sin^2 x\cos^2 x - 12(\sin^2 x + \cos^2 x) + 9 = 4\sin^2(2x) - 3,$$

будем иметь для $k \geq 2$

$$A_k = (4\sin^2 0 - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2} - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{(2^{k-1}-1)\pi}{2^k} - 3)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot(4\sin^2\frac{(2^{k-2}-1)\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{(2^{k-2}+1)\pi}{2^k} - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{4} - 3) =$$

$$= -(4\sin^2 0 - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2^{k-1}} - 3)(4\sin^2\frac{2\pi}{2^{k-1}} - 3)(4\sin^2\frac{3\pi}{2^{k-1}} - 3)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot(4\sin^2\frac{(2^{k-2}-1)\pi}{2^{k-1}} - 3)(4\sin^2\frac{\pi}{2} - 3) = -A_{k-1}.$$

Следовательно, $A_{2000} = -A_1 = -(-3) = 3$.

2. а) Пусть мы сперва вычеркиваем каждое m-е число, а затем каждое n-е (в нашем случае $m = 2$). Пусть r — остаток при делении x на mn; таким образом, $x = pmn + r$, где $0 \leq r < mn$. Разделим также с остатком r на m и на n, так что $r = k_1m + r_1 = k_2n + r_2$, где $0 \leq r_1 < m$ и $0 \leq r_2 < n$. Итак, x можно записать в виде $x = (pn + k_1)m + r_1$, а также в виде $x = (pm + k_2)n + r_2$. Заметим, что $k_1 < n$ и $k_2 < m$, т.к. $r < mn$.

Пусть некоторое x принадлежит обоим спискам; рассмотрим первый из них. После вычеркивания каждого m-го числа x занимает место под номером $x - \left[\frac{x}{m}\right] = x - (pn + k_1)$ (при этом r_1 ненулевое, иначе x уже было бы вычеркнуто). Затем, после вычеркивания каждого n-го числа, x занимает место под номером

$$x - (pn + k_1) - \left[\frac{x - (pn + k_1)}{n}\right] = x - (pn + k_1) - \left[\frac{(pm + k_2)n + r_2 - (pn + k_1)}{n}\right] =$$

$$= x - (pn + k_1) - (pm + k_2) + p - \left[\frac{r_2 - k_1}{n}\right] = x - p(m + n - 1) - k_1 - k_2 - \left[\frac{r_2 - k_1}{n}\right].$$

Здесь $r_2 - k_1$ не кратно n, иначе x было бы вычеркнуто при вычеркивании каждого n-го числа. В частности, $r_2 \neq k_1$.

Авторы задач

1. **И. Воронович** (9.4; 10.4; 11.2; 11.4)
2. **И. Жук** (8.3; 10.3)
3. **В. Каскевич** (8.1; 8.2; 8.4; 9.1)
4. **С. Мазаник** (8.4; 10.2)
5. **А. Миротин** (9.3; 10.1)
6. **С. Соболевский** (11.1)
7. **С. Ших** (11.3)
8. **А. Ядренцев** (9.2)

Аналогично,

$$vw = r^2 \tag{2}$$

Из треугольника BHD по теореме Пифагора имеем, с учетом (1),

$$4r^2 + (v+z)^2 = (b+y+d)^2 = ((b+y)+d)))d+y)+b) =$$

$$= (b+y)(d+y) + bd + b(b+y) + d(d+y) = \frac{v^2}{b}\cdot\frac{z^2}{d} + bd + v^2 + z^2,$$

тогда $4r^2 = \frac{v^2z^2}{bd} + bd - 2vz = \frac{1}{bd}(vz - bd)^2$. Учитывая, что из (1) $v > b$ и $z > d$, т.е. $vz > bd$, из последнего равенства получаем $vz = bd + 2r\sqrt{bd}$. Совершенно аналогично, $uw = ac + 2r\sqrt{ac}$. Перемножив почленно и учитывая (2), находим

$$r^4 = uwvz = \sqrt{ac}\sqrt{bd}\cdot(\sqrt{ac}+2r)(\sqrt{bd}+2r),$$

или

$$r^4 - 4\sqrt{ac}\sqrt{bd}r^2 - 2\sqrt{ac}\sqrt{bd}(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})r - acbd = 0.$$

По условию $ac = 16$, $bd = 2,25$ поэтому уравнение принимает вид

$$r^4 - 24r^2 - 66r - 36 = 0,$$

или

$$(r-6)((r+2)^3 - 2) = 0.$$

Так как выражение во второй скобке не имеет положительных корней, то $r = 6$.

Министерство образования Республики Беларусь

XLIX

Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Условия и решения задач

Первый день

Гродно 1999

11 класс

1. Вычислить

$$(4\sin^2 0-3)(4\sin^2\frac{\pi}{2^{2000}}-3)(4\sin^2\frac{2\pi}{2^{2000}}-3)(4\sin^2\frac{3\pi}{2^{2000}}-3)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot(4\sin^2\frac{(2^{1999}-1)\pi}{2^{2000}}-3)(4\sin^2\frac{\pi}{2}-3).$$

2. Пусть m и n — натуральные числа. Имея в начале ряд всех натуральных чисел, мы можем составить некоторый список натуральных чисел двумя различными способами. 1-й способ: сперва мы вычеркиваем каждое m–е число ряда, затем в полученном списке мы вычеркиваем каждое n–е число. Полученный таким способом список мы называем *первым списком*. 2-й способ: теперь мы сперва вычеркиваем каждое n–е число ряда, затем в полученном списке мы вычеркиваем каждое m–е число. Полученный таким способом список мы называем *вторым списком*.

Пару чисел (m,n) назовем *хорошей*, если верно следующее утверждение: если некоторое натуральное число k встречается в обоих списках, то и в первом, и во втором списке k идет под одним и тем же номером.

а) Докажите, что пара $(2,n)$ для любого натурального n хорошая.

б) Существует ли хорошая пара (m,n), такая что $2<m<n$?

3. Дан упорядоченный набор из 100 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Разрешается любые два числа a_n и a_m заменить на числа

$$\frac{a_n^2}{a_m}-\frac{n}{m}\left(\frac{a_m^2}{a_n}-a_m\right),\qquad \frac{a_m^2}{a_n}-\frac{m}{n}\left(\frac{a_n^2}{a_m}-a_n\right)$$

соответственно.

Можно ли из набора такого, что $a_i=1$, если i не кратно 20, и $a_i=\frac{1}{5}$, если i кратно 20, получить набор целых чисел?

4. Вписанная в трапецию $ABCD$ окружность пересекает диагонали AC и BD в точках K, L и M, N соответственно. (Порядок следования точек на диагоналях: A, K, L, C и B, M, N, D).

Найдите радиус окружности, если известно, что $AK\cdot LC=16$ и $BM\cdot ND=2,25$.

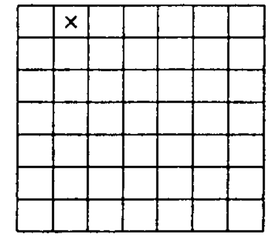


Рис. 1

Для доказательства раскрасим доску в три цвета следующим образом (см. рис. 2а)). На доске имеется 17 клеток цвета „1“ и по 16 клеток цветов „2“ и „3“. Женя своей плиткой накрыл клетку цвета „2“ — следовательно, Игорь должен накрыть 17 плиток цвета „1“, 15 клеток цвета „2“ и 16 клеток цвета „3“. Но каждая полоска накрывает по одной клетке каждого цвета. Следовательно, уголок должен накрыть две плитки цвета „1“ и одну — цвета „3“.

Легко проверить, что последнее возможно лишь тогда, когда уголок расположен на доске так, как показано на рис. 2б).

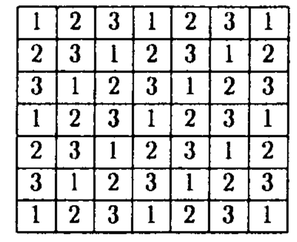


Рис. 2а)

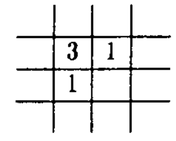


Рис. 2б)

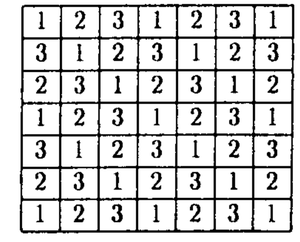


Рис. 3а)

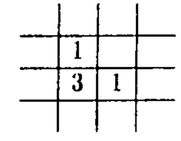


Рис. 3б)

Теперь перекрасим доску так, как на рис. 3а). При этом плитка Жени попрежнему накрывает клетку цвета „2“, а уголок должен накрыть две клетки цвета „1“ и одну клетку цвета „3“. Но тогда он должен быть расположен так, как на рис. 3б). Таким образом, с одной стороны, уголок должен лежать так, как на рис. 2б), а с другой — так, как на рис. 3б). Следовательно, Игорь не может замостить оставшуюся часть доски.

б) Поворачивая доску на 90^0, 180^0 и 270^0, убеждаемся, что можно считать, что квадратик находится в одном из квадратов 2×2 на рис. 4. Поскольку квадрат 2×2 есть объединение уголка и квадратика, достаточно доказать, что доску без каждого из квадратов 2×2 можно покрыть плитками и уголком. Соответствующие примеры приведены на рис. 5 — 7.

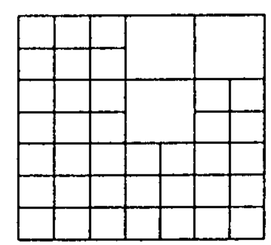


Рис. 4

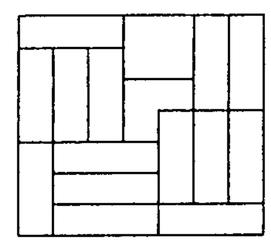


Рис. 5

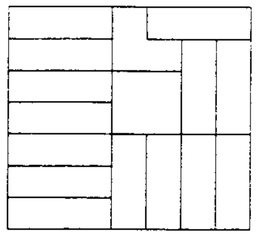


Рис. 6

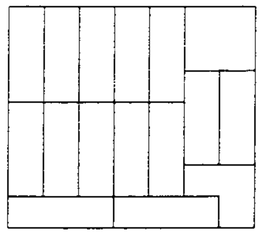
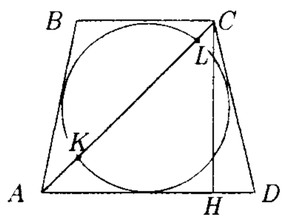


Рис. 7

4. Ответ: $\sqrt{2}+1$.

Обозначим через u и v половины нижнего и верхнего оснований трапеции соответственно. Пусть CH — высота, опущенная на нижнее основание. Тогда $CD = u+v = AH$, $HD = u-v$. Обозначим также $AK = a$, $KL = x$, $LC = c$. Нам нужно найти $\sqrt[4]{\dfrac{(a+x)(c+x)}{ac}}$. По теореме о касательной и секущей имеем



$$a(a+x) = u^2 \quad \text{и} \quad c(c+x) = v^2. \qquad (1)$$

Применяя теорему Пифагора к треугольнику CHD, получим

$$CH^2 = CD^2 - HD^2 = (u+v)^2 - (u-v)^2, \quad CH^2 = 4uv. \qquad (2)$$

Далее, из треугольника ACH по теореме Пифагора имеем

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = (a+x+c)^2 - (u+v)^2 = (a+(c+x))((a+x)+c) - (u+v)^2 =$$

$$= a(a+x) + c(c+x) + ac + (a+x)(c+x) - (u+v)^2 = u^2 + v^2 + ac + \frac{u^2v^2}{ac} - (u+v)^2$$

(мы учли здесь равенство (1)). Подставляя CH^2 из (2), получим

$$4uv = u^2 + v^2 + ac + \frac{u^2v^2}{ac} - (u^2 + v^2 + 2uv),$$

или

$$\frac{u^2v^2}{ac} - 6uv + ac = 0,$$

$$u^2v^2 - 6acuv + a^2c^2 = 0,$$

откуда $uv = (3 \pm 2\sqrt{2})ac = (\sqrt{2} \pm 1)^2 ac$. Перемножив равенства (1), получим $u^2v^2 = ac(a+x)(c+x) > a^2c^2$, т.е. $uv > ac$, поэтому выбираем значение $uv = (\sqrt{2}+1)^2 ac$. Тогда $(\sqrt{2}+1)^4 a^2c^2 = u^2v^2 = ac(a+x)(c+x)$, $\dfrac{(a+x)(c+x)}{ac} = (\sqrt{2}+1)^4$, откуда окончательно $\sqrt[4]{\dfrac{(a+x)(c+x)}{ac}} = \sqrt{2}+1$.

10 класс

1. Определите все значения a, при которых функция

$$f(x) = \{ax + \sin x\}$$

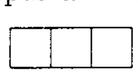
является периодической.

(Через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x.)

2. Докажите, что для любого натурального числа $N > 1$ сумма S всех его делителей, включая 1 и само число N, удовлетворяет неравенствам

$$k\sqrt{N} < S < \sqrt{2k}N,$$

где k — количество всех делителей числа N.

3. Имеется квадратная доска 7×7, разбитая на 49 квадратиков 1×1, и плитки трёх сортов: „полоски“ —  , „уголки“ — и „квадратики“ — (размеры каждой клетки на плитке — 1×1).

Эти плитки разрешается выкладывать на доску так, чтобы каждая из них накрывала целое число клеток (три клетки — полоска или уголок и одну клетку — квадратик). У Игоря имеется беконечное число полосок и один уголок, а у Жени — один-единственный квадратик.

а) Докажите, что Женя может так выложить свою единственную плитку, что Игорь не сможет замостить плитками из своего набора оставшуюся часть доски.

б) Игорь сумел выменять одну из своих полосок на уголок. Докажите, что теперь, как бы ни положил на доску свою плитку Женя, Игорь сумеет замостить своими плитками оставшуюся часть доски.

4. В равнобокую трапецию $ABCD$ вписана окружность. Пусть K и L — точки пересечения диагонали AC с окружностью (порядок следования точек: A, K, L, C).

Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\dfrac{AL \cdot KC}{AK \cdot LC}}$.

По теореме о секущих $CL \cdot b = CN \cdot a$, так, что после сокращения на $CN \cdot a$ будет $0,3\,(a^2+b^2) = CN \cdot a$. Снова по теореме о секущих

$$CN \cdot a = CT \cdot (CT + 2TM) = (m - MT)(m + MT) = (m - \frac{c}{2})(m + \frac{c}{2}) = m^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Поэтому $0,3\,9a^2+b^2) = m^2 - \frac{c^2}{4}$. Из формулы для длины медианы $m^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$ выразим $a^2+b^2 = 2m^2+\frac{c^2}{2}$; тогда $0,3\,(2m^2+\frac{c^2}{2} = m^2-\frac{c^2}{4}$, откуда $m^2 = c^2$, т.е. $m = c = 9$.

10 класс

1. Ответ: все значения a, для которых $2\pi a \in \mathbb{Q}$.

Легко проверить, что если a удовлетворяет условию $2\pi a \in \mathbb{Q}$, т.е. $2\pi a = m/n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, то $T = 2\pi n$ — период функции f, так как

$$(a(x + 2\pi n) + \sin(x + 2\pi n)) - (ax + \sin x) = 2\pi an = m \in \mathbb{Z}.$$

С другой стороны, пусть при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f(x+T) = f(x)$. Тогда

$$(a(x+T) + \sin(x+T) - ax - \sin x) = (aT + 2\sin T/2 \cos(x + T/2)) \in \mathbb{Z}.$$

Если $\sin T/2 \neq 0$, то, очевидно, что выражение $aT + 2\sin T/2 \cos(x + T/2)$ не может принимать только целочисленные значения при всех действительных x. Поэтому $\sin T/2 = 0$ и тогда $aT \in \mathbb{Z}$ и $T/2 = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $2\pi an \in \mathbb{Z}$, т.е. $2\pi a \in \mathbb{Q}$.

2. Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_k$ делители числа N. Не нарушая общности, считаем $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$. Тогда

$$d_i \cdot d_{k+1-i} = N \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Поэтому

$$2S = \sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k+1-i}) > \sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{d_i \cdot d_{k+1-i}} = 2k\sqrt{N}$$

(знак неравенства строгий, так как $d_1 + d_k = 1 + N > 2\sqrt{N}$ при любом $N > 1$). Таким образом, левая часть требуемого неравенства доказана. Докажем теперь его правую часть. Для этого опять воспользуемся равенством (1):

$$S = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{N}{d_i} = N \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i}. \tag{2}$$

Очевидно, что для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ выполнено неравенство $d_i \geq i$. Поэтому из (2) получаем

$$S \leq N \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}.$$

Требуемое неравенство следует теперь из легко доказываемого по индукции неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} < \sqrt{2k},$$

которое справедливо для всех $k \geq 2$.

3. а) Жене достаточно выложить квадратик на клетку, отмеченную крестиком (см. рис. 1).

РЕШЕНИЯ

8 класс

1. Ответ: выиграет второй игрок.

Второй игрок обязательно выиграет, если будет действовать, например, следующим образом. Пронумеровав все фишки по порядку (скажем, по часовой стрелке), он должен разбить их на пары фишек, стоящих через одну. Это разбиение может быть таким:

{1, 3} {2, 4} {5, 7} {6, 8} {9, 11} {10, 12} {13, 15} {14, 16} {17 19} {18, 20}

После этого второй игрок должен отвечать на ходы соперника следующим образом. Если первый игрок снял все три фишки из разных пар, то второй игрок снимает три фишки из тех же пар. Если же первый игрок снял две "парные" фишки еще и одну из какой-либо пары, то второй игрок снимает вторую фишку из той же пары и любые две "парные" фишки. Тогда после каждого хода второго игрока будут оставаться только неразукомплектованные пары фишек, стоящих через одну (в исходной расстановке). Поэтому и последние две фишки будут составлять такую же пару.

Таким образом, второй игрок всегда может одержать победу.

2. Ответ: $\sqrt{k}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Пусть a и b – корни уравнения $px^2 - qx + q = 0$. По формулам Виета

$$\begin{cases} a + b = \frac{q}{p}, \\ ab = \frac{q}{p} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = \frac{q}{p}, \\ \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{q}{p}} \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Согласно условию $\frac{a}{b} = k$ (или $\frac{b}{a} = k$, что то же самое). Тогда

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}.$$

Умножив на $\sqrt{k}\sqrt{p}$, получим $\sqrt{p}(\sqrt{k})^2 - \sqrt{q}\sqrt{k} + \sqrt{p} = 0$, т.е. $\sqrt{k}$ является корнем уравнения $\sqrt{p}\,x^2 - \sqrt{q}\,x + \sqrt{p} = 0$. Легко видеть, что вторым корнем будет $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

3. Ответ: $n = 15$.

Пусть $n \leq 14$. У каждой клетки не менее двух соседних. Но рядом с числами 11 и 13 могут стоять лишь единицы. Следовательно, в таблице нет чисел 11 и 13. Рядом с 7 могут быть лишь 1 и 14. Следовательно, 7 может стоять лишь в угловой клетке, а 14

и 1 в соседних с ней клетках. Но тогда у 14 имеется 3 соседа. С другой стороны, у 14 соседями могут быть лишь 1, 2, 7, т.е. 1 обязана быть соседом 14 — противоречие. Следовательно, в таблице нет числа 7. Аналогично, в таблице нет и числа 5.

Поскольку теперь у 14 и 10 соседями могут быть лишь 1 и 2, эти числа могут находиться лишь в угловых клетках. Аналогично, в угловой клетке обязано находится и число 9. С другой стороны, мы уже исключили четыре числа из 14 возможных. Следовательно, в таблице имеются по крайней мере два их трех чисел 9,10,14. Поскольку у 10 и 14 одинаковые возможные соседи (1 и 2) одновременно в таблице они находится не могут. Итак, в таблице должны стоять числа 1,2,3,4,6,8,9,x, где $x = 10$, либо $x = 14$. При этом числа 1,2,3,9 и x расположены (с точностью до симметрий и поворотов) так, как указано на рис. 1. Тогда числа A и B — это 12 и 6, поскольку C не может делиться на 12, оно должно делить 12 и не равняться 6, но тогда $C = 4$ оказывается соседним с 6 — противоречие.

9	3	B
1	A	C
x	2	

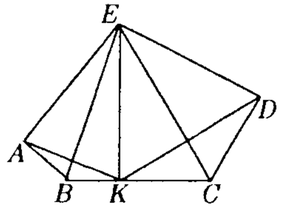
Рис. 1.

3	6	12
15	1	4
5	10	2

Рис. 2.

Следовательно, $n \geq 15$. Пример расстановки чисел при $n = 15$ см. на рис. 2.

4. Отметим на отрезке BC точку K, такую, что $BK = AB$. Тогда согласно условию $KC = CD$. Поэтому треугольники $\triangle BAK$ и $\triangle CDK$ - равнобедренные, в частности,



$$\angle BAK = \angle BKA \quad \text{и} \quad \angle CKD = \angle CDK.$$

Тогда $\angle AKD = 180^0 - (\angle BKA + \angle CKD = (\angle BAE + \angle CDE) - (\angle BAK + \angle CDK) = (\angle BAE - \angle BAK) - (\angle CDE - \angle CDK) = \angle EAK + \angle EDK$. Воспользовавшись полученным равеством и длины равных отрезков через a, покажем, что длина EK также равна a.

Действительно, если $EK > a$, то учитывая, что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона, из $\triangle EAK$ получим $\angle EAK > \angle EKA$, а из $\triangle EKD$ — $\angle EDK > \angle EKD$. Но тогда из этих двух неравенств следует, что $\angle EAK + \angle EDK > \angle AKD$. Противоречие. Аналогично доказываем, что EK не можетбыть меньше a.

Итак $EK = AE$ и $EK = ED$. Тогда $\triangle BAE = \triangle BKE$ и $\triangle CDE = \triangle CKE$ (по трем сторонам). Поэтому $\angle BEA = \angle BEK$ и $\angle CED = \angle CEK$, откуда и получаем, что $\angle BEC = \angle BEK + \angle CEK = \frac{1}{2}\angle AED$.

9 класс

1. Рассмотрим жителя A, который отправив свою сплетню в понедельник, не получил ее обратно в среду. Всех остальных жителей можно разбить на две непересекающиеся группы: V - множество жителей, от которых A получает сплетни, и U - множество жителей, которым он передает сплетни. Если бы какой-нибудь житель

из U мог передавать сплетни какому-нибудь жителю из V, то очевидно, через этих двух жителей A получил бы в среду свою сплетню, отправленную им в понедельник. Поэтому есть две возможности: либо множество U пусто, либо никакие сплетни из U не передаются (непосредственно) в V. В первом случае никто не получает сплетен, придуманных A. Во втором случае, поскольку не только никто из U, но и A не получает сплетен из V, то их сплетни не доходят до остальных.

2. Пусть a-наименьшее из всех чисел. Тогда $a = 1 + \frac{b}{c} \leq b$. Поэтому

$$c + b \leq bc \quad \Rightarrow \quad bc \geq 2\sqrt{bc} \quad \Rightarrow \quad bc \geq 4.$$

Если числа b и c различны, то $b + c > 2\sqrt{bc} \geq 4$ и утверждение задачи доказано. Если же $b = c$, то $a = 2$ и так как a наименьшее из всех чисел, то его сумма с любым другим числом будет больше 4.

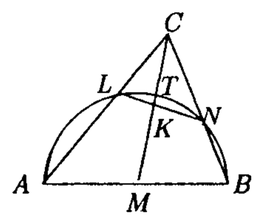
3. Ответ: а) при четных n; б) $n/2$. а) Пусть a_i, b_i — произведения чисел в i-й строке и i-м столбце таблицы (по условию $b_i = -a_i$). Тогда произведение всех чисел в таблице равно, с одной стороны, $a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, с другой стороны $b_1b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = (-a_1)(-a_2) \cdot \ldots \cdot (-a_n) = (-1)^n a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Отсюда $(-1)^n = 1$, т.е. n четно.

С другой стороны, пример на рисунке показывает, что при четных n расставить числа нужным образом действительно можно, причем достаточно $n/2$ чисел -1.

б) Покажем, что меньше, чем $n/2$ минус единиц недостаточно. Пусть их число не больше $n/2 - 1$. Вычеркнем те строки и столбцы таблицы, которые содержат -1. При этом на главной диагонали будет вычеркнуто не более $n - 2$ клеток. Возьмем любую невычеркнутую клетку на главной диагонали, ей соответствуют строка и столбец без минус единиц, т.е. произведение в этой строке и в этом столбце равны, что противоречит условию.

4. Ответ: $CM = 9$.

Через $S(XYZ)$ будем обозначать площадь треугольника XYZ. Пусть T — точка пересечения медианы CM с окружностью. Обозначим также $S(ABC) = S$, $CM = m$, $AB = b$, $BC = a$. Имеем



$$S(LKC) = \frac{CL \cdot CK}{b \cdot m} S(AMC) = \frac{1}{2}\frac{CL \cdot CK}{b \cdot m} S,$$

$$S(NKC) = \frac{1}{2}\frac{CN \cdot CK}{a \cdot m} S(AMC), \quad S(LNC) = \frac{CL \cdot CN}{b \cdot a} S.$$

Подставляя эти выражения в равенство $S(LKC) + S(NKC) = S(LNC)$, получим после сокращения на S

$$\frac{1}{2}\frac{CK}{m}\left(\frac{CL}{b} + \frac{CN}{a}\right) = \frac{CL \cdot CN}{b \cdot a}.$$

Домножим обе части на a^2b^2 и учтем, что по условию $CK = 0,6\,m$; получим

$$0,3\,(CL \cdot b \cdot a^2 + CN \cdot a \cdot b^2) = (CL \cdot b)(CN \cdot a).$$

Из (4) – (7) следует, что если N имеет вид (1) и $a_0 \in \{3,4,5,6\}$, то N — достижимо, так как

$$N = S_{a_k} \circ M_2 \circ S_{a_{k-1}} \circ \ldots \circ S_{a_1} \circ M_2(a_0). \qquad (8)$$

Пусть $N = 2^k \cdot 7 + 2^{k-1}a_1 + \ldots + 2a_{k-1} + a_k$, где $a_i \in \{2,3\}$, $i = 1,\ldots,k$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим три случая

1) $a_1 = 3$,

2) существует m $2 \le m \le k$ такое, что $a_m = 3$, $a_{m-1} = \ldots = a_1 = 2$,

3) $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 2$.

Имеем

$$N = S_{a_k} \circ M_2 \circ \ldots \circ S_{a_{m+1}} \circ M_2(L), \qquad (9)$$

где $L = 2^m \cdot 7 + 2^{m-1}a_1 + \ldots + 2a_{m-1} + a_m$.

В случае 1 получаем $L = 2 \cdot 7 + 3 = 17 = 3(3 \cdot 1 + 2) + 2 = S_2 \circ M_3 \circ S_2 \circ M_3(1)$, поэтому из (9) следует достижимость N.

Во втором случае получим

$$L = 2^m \cdot 7 + 2^{m-1} \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 2 + 3 =$$

$$= 2^m \cdot 7 + 2^{m+1} - 1 = 2^m \cdot 9 - 1 = S_2(2^m \cdot 9 - 3) = S_2 \circ M_3(2^m \cdot 3 - 1) = S_2 \circ M_3(K). \qquad (10)$$

Так как $K = 2^m \cdot 3 - 1 = 2^{m-1} \cdot 4 + 2^{m-2} \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 2 + 3$, т.е. K имеет вид (1) с $a_0 = 4$, то K — достижимо, and следовательно из (8) – (10) следует достижимость N.

В случае 3 имеем

$$L = 2^k \cdot 7 + 2^{k-1} \cdot 2 + \ldots + 2 = M_2(L_1),$$

где $L_1 = 2^{k-1} \cdot 7 + 2^{k-2} \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 2 + 3$, т.е. L_1 имеет вид, рассмотренный в случаях 1, 2. Следовательно, K – достижимо, а поэтому достижимо и N.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8 класс

5. Найдите количество всех натуральных делителей числа 10^{999}, которые не являются делителями числа 10^{998}.

6. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB, точки K и N — точки на катетах BC и AC соответственно, такие, что $BK : KC = AN : NC = 2 : 1$. Пусть L — точка пересечения отрезков AK и MN. Докажите, что LC — биссектриса угла KLN.

7. Во время конференции делегаты обменивались сувенирами, так что по окончании конференции выяснилось, что каждый делегат от каждого получил ровно по одному сувениру. Известно, что по ходу конференции был момент, когда не менее половины делегатов получили ровно по половине "положенных" сувениров, не менее трети — ровно по одной третьей "положенных" сувениров, и не менее одной седьмой делегатов — ровно по одной седьмой "положенных" сувениров.

Какое наименьшее число делегатов могло участвовать в конференции?

8. Пусть m и n — натуральные числа. С произвольным числом A можно проделывать следующие две операции:

1) умножить A на m или на n,

2) прибавить к A либо m, либо n.

Натуральное число N назовем достижимым, если его можно получить из 1 выполнением этих двух операций, причем операции первого и второго вида должны чередоваться, а начальная операция выбирается произвольно. В противном случае число N назовем недостижимым.

Докажите, что если $n = 3$ и $m \ge n$, то существуют сколь угодно большие недостижимые числа.

9 класс

5. Ненулевые числа a, b и c удовлетворяют равенствам $a^2 - b^2 = bc$ и $b^2 - c^2 = ca$.

Докажите, что $a^2 - c^2 = ab$.

6. В олимпиаде по математике участвовало не менее 32 девятиклассников. Оказалось, что если какие-нибудь из них набрали вместе менее 50 баллов, то число этих школьников меньше половины от общего числа участников. Всего все участники набрали 150 баллов, причем каждый из них получил целое неотрицательное количество баллов.

Какое наибольшее количество баллов мог набрать победитель олимпиады?

7. Пусть AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра некоторой окружности и K — точка этой окружности, отличная от точек A, B, C и D. Докажите, что отрезок MN параллелен диаметру AB, где M — точка пересечения прямых AK и CD, а N — точка пересечения прямых DK и BC.

8. Пусть m и n — натуральные числа. С произвольным числом A можно проделывать следующие две операции:

1) умножить A на m или на n,

2) прибавить к A либо m, либо n.

Натуральное число N назовем достижимым, если его можно получить из 1 выполнением этих двух операций, причем операции первого и второго вида должны чередоваться, а начальная операция выбирается произвольно. В противном случае число N назовем недостижимым.

Докажите, что если $m \geq n \geq 4$, то существуют сколь угодно большие недостижимые числа.

8. Доказательству предпошлем следующее утверждение.

Лемма. *Любое натуральное N, $N \geq 8$, может быть представлено в виде*

$$N = 2^k a_0 + 2^{k-1} a_1 + \ldots + 2a_{k-1} + a_k, \tag{1}$$

где $a_0 \in \{3,4,5,6,7\}$, $a_i \in \{2,3\}$, $i = 1,\ldots,k$, $k \in \mathbb{N}$.

Докажем утвержение индукцией по N. Если $N = 8$, то $N = 8 = 2\cdot 3 + 2$ и N имеет вид (1), где $k = 1$, $a_0 = 3$, $a_1 = 2$. Покажем, что если N имеет вид (1), то $N+1$ также имеет вид (1).

Это очевидно, если N имеет вид (1) и $a_k = 2$.

Пусть N имеет вид (1) и либо

$$a_m = a_{m+1} = \ldots = a_k = 3, \quad a_{m-1} = 2, \quad m \geq 2, \tag{2}$$

либо

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 3, \quad (m = 1). \tag{3}$$

Если (2) выполнено, то

$$N + 1 = 2^k a_0 + \ldots + 2^{k-m+1} a_{m-1} + 2^{k-m}(2+1) + \ldots + 2\cdot(2+1) + (2+1) + 1 =$$
$$= 2^k a_0 + \ldots + 2^{k-m+1} a_{m-1} + (2^{k-m}\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 2 + 2) + (2^{k-m} + 2^{k-m-1} + \ldots + 2 + 1 + 1) =$$
$$= 2^k a_0 + \ldots + 2^{k-m+1}(a_{m-1} + 1) + (2^{k-m}\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 2 + 2).$$

Так как $a_{m-1} = 2$, то $a_{m-1} + 1 = 3$ и $N + 1$ имеет вид (1).

Если (3) выполнено, то

$$N + 1 = 2^k a_0 + 2^{k-1}(2+1) + \ldots + 2\cdot(2+1) + (2+1) + 1 =$$
$$= 2^k(a_0 + 1) + 2^{k-1}\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 2 + 2.$$

Очевидно, что если $a_0 \in \{3,4,5,6\}$, то $a_0 + 1 \in \{4,5,6,7\}$ и $N + 1$ имеет вид (1). Рассмотрим случай $a_0 = 7$. Имеем

$$N + 1 = 2^k\cdot 8 + 2^{k-1}\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 2 + 2 = 2^{k+1}\cdot 3 + 2^k\cdot 2 + 2^{k-1}\cdot 2 + \ldots + 2\cdot 2 + 2,$$

и $N + 1$ также имеет вид (1). Лемма доказана.

Положим $M_2(A) = 2A$, $M_3(A) = 3A$, $S_2(A) = A+2$, $S_3(A) = A+3$. Пусть $M_i \circ S_j(A) = M_i(S_j(A))$ и $S_i \circ M_j(A) = S_i(M_j(A))$, $i, j = 2, 3$.

Легко проверить, что если $A \in \{1,2,3,4,5,6\}$, то A — достижимо. В самом деле, для $A = 1$ утверждение очевидно, $A = 2 = M_2(1)$,

$$A = 3 = 1 + 2 = S_2(1), \tag{4}$$

$$A = 4 = 1 + 3 = S_3(1), \tag{5}$$

$$A = 5 = 3\cdot 1 + 2 = S_2 \circ M_3(1), \tag{6}$$

$$A = 6 = 3\cdot 1 + 3 = S_3 \circ M_3(1). \tag{7}$$

Простая проверка показывает, что $A = 7$ — недостижимо.

Если $x = 0$, то $y = 0$ или $y = -2$ — решения. Обратно, при $y = 0$ или $y = -2$ будем иметь $x = 0$. Поэтому будем считать, что $y \neq 0$. Имеем

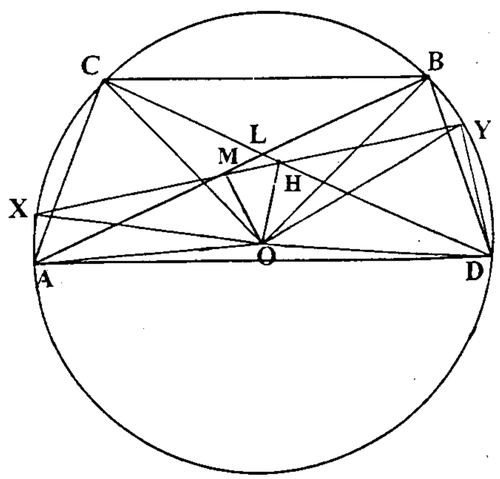
$$4x^6 + 4x^3y + y^2 = 4y^3 + 9y^2, \quad (2x^3 + y)^2 = 9y^2 + 4y^3, \quad (\frac{2x^3}{y} + 1)^2 = 9 + 4y.$$

Число $\frac{2x^3}{y} + 1$ рациональное, а его квадрат — целое нечетное число, значит, $\frac{2x^3}{y} + 1$ — целое нечетное число, и тогда можно записать $\frac{2x^3}{y} + 1 = 2n+1$, $x^3 = ny$ для некоторого целого n. Поэтому $(2n+1)^2 = 9 + 4y$, откуда $4y = (2n+1)^2 - 9 = (2n-2)(2n+4)$, $y = (n-1)(n+2)$. Следовательно, $x^3 = n(n-1)(n+2)$. Заметим, что $n \neq 1$ и $n \neq -2$, иначе $y = 0$. Кроме того, $n \neq 0$, иначе $x = 0$, что уже было рассмотрено. Имеем $(n-1)^3 < n(n-1)(n+2)$. Действительно, это неравенство после преобразований приводится к виду $0 < (n-1)(4n-1)$, что верно при всех целых n, $n \neq 1$. Далее, неравенство $n(n-1)(n+2) \leq (n+1)^3$ равносильно неравенству $0 \leq 2n^2 + 5n + 1$ и, следовательно, оно верно при всех n, $n \neq -2$, $n \neq -1$; у нас как раз $n \neq -2$. Если бы $n = -1$, мы получили бы $x^3 = 2$, x — не целое, противоречие. Итак, $n \neq 1, -2, -1, 0$ и $(n-1)^3 < n(n-1)(n+2) = x^3 \leq (n+1)^3$. Поэтому имеют место лишь две возможности.

1) $n(n-1)(n+2) = n^3$, $n^2 + n - 2 = n^2$, $n = 2$, тогда $y = 4$, $x^3 = 8$, т.е. $x = 2$, и простая проверка показывает, что $x = 2$, $y = 4$ — решение.

2) $n(n-1)(n+2) = (n+1)^3$, $2n^2 + 5n + 1 = 0$ — в этом случае решений нет.

7. Как вытекает из условия, AB и CD не являются диаметрами S. Нетрудно показать, что кроме AB существует еще лишь одна хорда, равная AB и проходящая через M. Рассмотрим эту хорду XY (см. рис.), $X \in \smile AC$, $Y \in \smile BD$. Пусть $H = XY \bigcup CD$. $AXBD$ — равнобокая трапеция, следовательно $\smile AX = \smile BY$. Имеем $\angle XMA = \frac{1}{2}(\smile AX + \smile BY) = \angle AOX$, поэтому точки X, M, O и A принадлежат одной окружности. Аналогично, Y, H, O и D принадлежат одной окружности. Далее, $\angle MOH = 2\pi - \angle AOD - \angle MOA - \angle HOD = (\pi - \angle MOA) + (\pi - \angle HOD) - \angle AOD = \angle AXY + \angle XYD - \angle AOD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile DY) + \frac{1}{2}(\smile XA + \smile AD) - \smile AD = \frac{1}{2}(\smile XA + \smile DY) = \frac{1}{2}(\smile BY + \smile DY) = \frac{1}{2} \smile BD = \frac{1}{2} \smile AC = \frac{1}{2}\angle ALC$. Значит, точка H совпадает с N, а XY есть хорда из условия.



10 класс

5. Пусть P и Q — такие точки на стороне AB треугольника ABC (P лежит между A и Q), что $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB$, M и N — точки пересечения прямых CP и CQ соответственно с биссектрисой AD угла BAC.

Докажите, что если $PN = CD$ и $3\angle A = 2\angle C$, то $S_{\triangle CQD} = S_{\triangle QNB}$.

6. Покажите, что уравнение

$$\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$$

имеет бесконечное множество решений в рациональных нецелых числах.

7. Столбцы и строки таблицы $n \times n$ занумерованы числами от 1 до n. В клетки этой таблицы квадратной вписываются все числа от 1 до n^2.

Найдите все натуральные n и действительные m, для которых это можно сделать так, чтобы для всякой клетки выполнялось двойное неравенство

$$(m-1)a \leq (i+j)^2 - (i+j) \leq ma,$$

где a — число, вписанное в клетку, стоящую на пересечении i–й строки и j–го столбца.

8. С любым положительным числом A разрешается проделывать следующие две операции:

i) умножить A на 2 или на n,

ii) прибавить к A либо 2, либо n,

где n — данное натуральное число.

Положительное целое число N назовем достижимым, если его можно получить из 1 поочередным выполнением указанных двух операций, причем начальная операция выбирается произвольно. В противном случае число N назовем недостижимым.

Докажите, что для любого $n \geq 9$ существует бесконечно много недостижимых положительных целых чисел.

11 класс

5. Найдите наибольшее действительное число k, такое, что для любой тройки положительных действительных чисел a, b, c, удовлетворяющей неравенству

$$kabc > a^3 + b^3 + c^3 ,$$

существует треугольник со сторонами a, b и c.

6. Решите в целых числах уравнение

$$x^6 + x^3y = y^3 + 2y^2.$$

7. Пусть S — окружность с центром O. Две равные хорды AB и CD окружности S пересекаются в точке L так, что $AL > LB$ и $DL > LC$. Пусть M и N — точки на отрезках AL и DL такие, что $\angle ALC = 2\angle MON$. Докажите, что хорда окружности S, проходящая через M и N, равна хордам AB и CD.

8. С любым положительным числом A разрешается проделывать следующие две операции:

i) умножить A на 2 или на 3,

ii) прибавить к A либо 2, либо 3.

Положительное целое число N назовем достижимым, если его можно получить из 1 поочередным выполнением указанных двух операций, причем начальная операция выбирается произвольно. В противном случае число N назовем недостижимым.

Докажите, что все натуральные числа, за исключением 7, достижимы.

Рассмотрим теперь число c, стоящее в кдетке $(n;n)$. Имеем $(2n)^2 - 2n \le 3c \le 3n^2$, откуда $n \le 2$. Итак, $n = 2$. Значения $n = 2$ и $m = 3$ действительно подходят — достаточно вписать числа так, чтобы $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$ $a_{22} = 4$ (проверьте!).

8. а) Если n четно, то утверждение, очевидно, выполнено, поскольку любое нечетное число N, $N \ge 1 + n$, — недостижимо.

Для люого натурального A положим $S_\alpha(A) = \alpha + A$, $M_\alpha(A) = \alpha A$, где $\alpha \in \{2, n\}$. Рассмотрим случай нечетного n. Положим $n = 2 + t$, где $t \ge 7$. Покажем, что все натуральные числа $N_k = 2knt + t - 2$, $k \in \mathbb{N}$, являются недостижимыми.

Предположим, от противного, что существует $k \ge 1$ такое, что N_k — достижимо. Так как N_k нечетно и $N_k \equiv t - 2 \ne 0 (\mathrm{mod}\ n)$, то легко видеть, что последняя операция при получении числа N_k не являлась операцией умножения, т.е. $N_k = S_\alpha(A)$, $\alpha \in \{2, n\}$. Так как $N_k \equiv -2 \pmod t$ и $n \equiv 2 \pmod t$, то $A \equiv -2 - 2 = -4 \pmod t$. С другой стороны, $A = M_\alpha(B)$, $\alpha \in \{2, n\}$, и, следовательно $B \equiv -4 : 2 = -2 \pmod t$. Таким образом, все числа, появляющиеся при преобразовании 1 в N_k сравнимы либо с -2 либо с -4 по модулю t. Значит, либо $1 \equiv -2 \pmod t$, либо $1 \equiv -4 \pmod t$, т.е. $3 \equiv 0 \pmod t$ или $5 \equiv 0 \pmod t$. Очевидно, что оба эти случая невозможны для $t \ge 7$. Полученное противоречие и доказывает, что все числа вида $N_k = 2knt + t - 2$, $k \in \mathbb{N}$, являются недостижимыми.

11 класс

5. Ответ: максимальное $k = 5$.

Пусть положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $5abc > a^3+b^3+c^3$. Покажем, что существует треугольник со сторонами a, b, c. Допустим, что это не так. Тогда для чисел a, b, c не выполняется одно из неравенств треугольника. Пусть, например, $c \ge a + b$, т.е. $c = a + b + x$, где $x \ge 0$. Подставляя это выражение для c в данное неравенство, получим

$$5ab(a + b + x) > a^3 + b^3 + c^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)^2x + 3(a + b)x^2 + x^3 ,$$

или, после преобразований,

$$2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 3(a^2 + b^2)x + 3(a + b)x^2 + x^3 .$$

Но это неравенство неверно, так как последние четыре слагаемые в правой части неотрицательны, и,отбрасывая их,получаем

$$2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a + b)(a - b)^2 < 0 ,$$

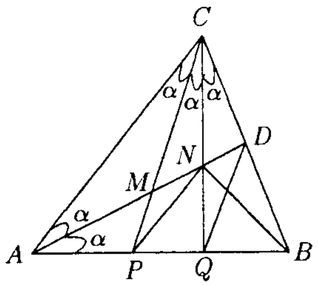
что невозможно.

Покажем теперь, что никакое $k > 5$ не удовлетворяет условию задачи. Положим, например, $a = b = 1$, $c = 2$. Ясно, что такого треугольника со сторонами a, b, c не существует (нетрудно рассмотреть и случай, когда $c = 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon \ge 0$). Неравенство из условия, тем не менее, очевидно выполняется.

6. Ответ: $x = y = 0$; $x = 0, y = -2$; $x = 2, y = 4$.

10 класс

5. Пусть $\angle CAD = \angle DAB = \angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB = \alpha$. Так как $\angle PAN = \angle PCN = \alpha$, точки P, A, C и N лежат на одной окружности. Следовательно,



$$\angle CPN = \angle CAN = \angle ACP = \angle ANP = \alpha.$$

Поэтому треугольник PCN равнобедренный, т.е. $PN = CN$. Из условия следует, что $CN = CD$. Тогда $\angle CND = 3\alpha = \angle ADC = \pi - \angle ADB = \pi - 4\alpha$, откуда $\alpha = \pi/7$, $\angle A = \angle B = 2\pi/7$. Итак, мы доказали, что $AC = BC$. Очевидно, в этом случае $AP = BN = BQ = CD$, $PQ = NQ$.

Так как $\triangle CND = \triangle CPQ$, то $CN/ND = CQ/PQ$, $CQ \cdot ND = QN \cdot QB$. Но $\angle CND = 3\alpha = \pi - \angle NQB$ и

$$S_{\triangle CQD} = \frac{1}{2} CQ \cdot ND \cdot \sin \angle CND = \frac{1}{2} QN \cdot QB \cdot \sin \angle NQB = S_{\triangle NQB}.$$

6. Заметим, что если существует одно решение $(\frac{x_1}{p}, \frac{y_1}{p}, \frac{z_1}{p})$, $x_1, y_1, z_1, p \in \mathbb{Z}$, уравнения, то существует и бесконечно много решений этого уравнения вида $(kp^2 + \frac{x_1}{p}, kp^2 + \frac{y_1}{p}, kp^2 + \frac{z_1}{p})$, $k \in \mathbb{Z}$. Осталось показать, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение. Непосредственная проверка показывает, что таковым решением является, например, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5})$.

7. Ответ: $n = 1$, $2 \le m \le 3$ и $n = 2$, $m = 3$.

При $n = 1$ неравенство принимает вид $m - 1 \le (1+1)^2 - (1+1) \le m$, откуда $2 \le m \le 3$.

Пусть теперь $n \ge 2$. Если число $a = 1$ стоит в клетке (i, j), то получаем $m \ge (i+j)^2 - (i+j) \ge 2^2 - 2$, $m \ge 2$. Теперь неравенство из условия можно записать в виде

$$\frac{(i+j)^2 - (i+j)}{m} \le a \le \frac{(i+j)^2 - (i+j)}{m-1}.$$

Это значит, что число a принадлежит отрезку $[\frac{(i+j)^2 - (i+j)}{m}; \frac{(i+j)^2 - (i+j)}{m-1}]$. Рассмотрим числа a и b, стоящие в клетках $(1;2)$ и $2;1)$; для них обоих $i + j = 3$, т.е. они оба находятся на отрезке $[\frac{6}{m}; \frac{6}{m-1}]$. Поэтому длина этого отрезка не менее 1, $\frac{6}{m-1} - \frac{6}{m} \ge 1$, откуда $m \le 3$.

Мы утверждаем, что на самом деле $m \ge 3$. Действительно, хотя бы одно из чисел 1 или 2 не стоит в клетке $(1;1)$, т.е. для хотя бы одного из них сумма $(i+j) \ge 3$. Тогда либо $m \cdot 1 \ge 3^2 - 3$, либо $m \cdot 2 \ge 3^2 - 3$. В любом случае $m \ge 3$. Итак, $m = 3$.

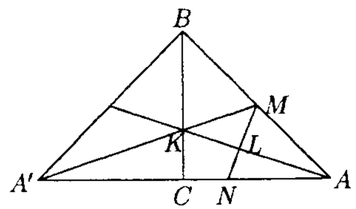
РЕШЕНИЯ

8 класс

5. Ответ: 1999.

Любой делитель числа 10^{999} имеет вид $d = 2^a \cdot 5^b$, где a и b — целые неотрицательные числа, причем $a \le 999$ и $b \le 999$. При этом d не делит 10^{998} лишь в двух случаях: $a > 998$, т.е. $a = 999$, или $b > 998$, т.е. $b = 999$. В первом случае $d = 2^{999}$, $d = 2^{999} \cdot 5$, $d = 2^{999} \cdot 5^2$,..., $d = 2^{999} \cdot 5^{999}$ (1000 возможных значений). Во втором случае $d = 5^{999}$, $d = 5^{999} \cdot 2$ $d = 5^{999} \cdot 2^2$,..., $d = 5^{999} \cdot 2^{999}$ (тоже 1000 возможных значений). Но число $2^{999} \cdot 5^{999}$ подсчитано дважды, поэтому общее число искомых делителей равно $2000 - 1 = 1999$.

6. Поскольку треугольник ABC равнобедренный и M — середина стороны AB, то вся картинка симметрична относительно прямой CM. Следовательно, точка C равноудалена от прямых MK и MN. С другой стороны, взяв на продолжении стороны AC за точку C точку A' такую, что $CA = CA'$, получим равнобедренный треугольник ABA', у которого высота BC служит также медианой. Так как $BK : KC = 2 : 1$, то K — точка пересечения медиан треугольника ABA'. Поэтому $K \in A'M$; кроме того, продолжение AK является медианой. Следовательно, точка C равноудалена от $A'M$ и AK. Таким образом, точка C равноудалена от прямых AK и MN. Это означает, что C принадлежит биссектрисе угла KLN.



7. Ответ: 85.

Пусть n — количество участников конференции, тогда каждый получил по $n - 1$ сувениру. Из условия следует, что $n - 1$ делится на 2. на 3 и на 7, т.е. на 42. Таким образом, можно записать $n = 42k + 1$, т.е. $n = 43$ или 85, или 128 и т.д. Если бы $n = 43$, то в указанный в условии момент по половине сувениров получили бы не менее 22 делегатов, по одной третьей — не менее 15, по одной седьмой — не менее 7. Т.е. всего делегатов не менее $22 + 15 + 7 = 44$ — противоречие. С другой стороны, делегатов могло быть 85. Действительно, разобьем делегатов на три группы в 43, 29 и 13 человек. Пусть к середине конференции в каждой группе делегаты обменялись сувенирами кадый с каждым, и никакие два делегата из разных групп не обменивались сувенирами. Легко видеть, что в этот момент условие задачи выполнено. Таким образом, наименьшее число делегатов равно 85.

8. 1) Если $m = 3k$, то не позднее второго шага будут появляться лишь числа, кратные 3, т.е. все числа вида $3l \pm 1$ недостижимы.

2) Если $m = 3k + 1$, то все числа вида $3lm + 2$ недостижимы. Действительно, так как $3lm + 2$ не делится ни на 3, ни на m, то оно не получено путем умножения. Следовательно, оно получено из числа $3lm - 1$ прибавлением 3, либо из числа $3lm + 2 - m$ прибавлением m. Тогда одно из этих двух чисел ~~чисел~~ получено умножением

на 3 или на m. Но $3m-1$ не делится ни на 3, ни на m; число $3lm+2-m$ не делится на m, так как $m>2$; кроме того,

$$3lm+2-m=(3l-1)m+2=(3l-1)(3k+1)+2=3(3kl-k+l)+1$$

не делится на 3.

3) Если $m=3k+2$, то совершенно аналогично получаем, что все числа вида $3lm+1$ ($l\in\mathbb{N}$) недостижимы. Утверждение доказано.

9 класс

5. Сложим данные равенства, получим $a^2-c^2=(a+b)c$. Поэтому достаточно доказать, что

$$(a+b)c=ab. \qquad (*)$$

Из первого равенства $c=\dfrac{a^2-b^2}{b}$; подставив во второе равенство, получим после преобразований

$$a^3-ab^2+a^2b-b^3=ab^2, \quad \text{или} \quad ab\frac{a^2-b^2}{b}+b^2\frac{a^2-b^2}{b}=ab^2, \quad \text{или} \quad abc+b^2c=ab^2,$$

откуда после сокращения на b следует $(*)$.

6. Ответ: 55 баллов.

Пусть в олимпиаде участвовало n школьников (по условию $n\geq 32$), и победитель набрал x баллов. Тогда остальные $n-1$ школьникам $150-x$ баллов. Обозначим через m наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $m\geq\frac{1}{2}n$ и рассмотрим m аутсайдеров (набравших наименьшее количество баллов). Это количество составляет не более $m\cdot\dfrac{150-x}{n-1}$. А поскольку m не меньше половины от числа участников, то согласно условию задачи

$$m\cdot\frac{150-x}{n-1}\geq 50.$$

Решая полученное неравенство относительно x, находим, что

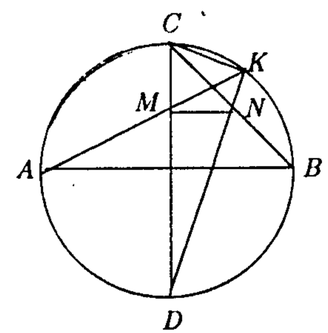
$$x\leq 50\left(3-\frac{n-1}{m}\right).$$

При четном $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}$) число $m=k$, и тогда $x\leq 50\left(1+\frac{1}{k}\right)$, откуда, учитывая, что $k\geq 16$), получаем: $x\leq 50\left(1+\frac{1}{16}\right)=53\frac{2}{16}$. Атак как x целое, то $x\leq 53$.

При нечетном $n=2k+1$ число $m=k+1$, и в этом случае $x\leq 50\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$, откуда аналогично, поскольку $k\geq 16$), получаем: $x\leq 50\left(1+\frac{2}{17}\right)=55\frac{15}{17}$. Снова, так как x целое, то $x\leq 55$.

Нетрудно убедиться, что оценка $x=55$ достижима. Действительно, при $n=33$, если один из школьников получил 2 балла, победитель – 55 баллов, а остальные 31 участников – по 3 балла, то все условия задачи, очевидно, выполняются.

7. Рассмотрим (см. рис.) один из возможных случаев расположения точек на окружности. Легко видеть, что $\angle DCB=\angle AKD$, как углы, опирающиеся на равные дуги. С другой стороны, эти же углы опираются на отрезок MN, поэтому точки C, K, N, M лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle CMN+\angle CKN=180^0$ и так как $\angle CKN=\angle CKD$, а последний угол опирается на диаметр CD, то $\angle CMN=90^0$, что влечет параллельность отрезков MN и AB.



Остальные возможные конфигурации рассматриваются аналогично, поскольку всегда точки C, K, N, M будут принадлежать одной окружности.

8. Если первая операция — умножение, то на $2k$ шаге ($k\geq 2$) из числа x получается число не меньшее, чем

$$\underbrace{n(\ldots(n(n}_{k}x+\underbrace{n)+n)\ldots)+n}_{k}>x>n\cdot n\ldots(n(nx+n)+n)=n^{k-2}(n^2x+n^2+n)=n^k(x+1)+n^{k-1}.$$

Если же первая операция — сложение, то на $2k$ шаге из числа x получается число большее, чем

$$\underbrace{n(\ldots(n(}_{k}x+\underbrace{n)+n)\ldots)+n}_{k}>n^k(x+n)=n^k(x+1)+(n-1)n^k>n^k(x+1)+n^{k-1}.$$

В любом случае, на $2k$ шаге из числа 1 получается число большее, чем $n^k(x+1)+n^{k-1}>2\cdot 4^k+4^{k-1}$. Значит все числа, меньшие, чем $2\cdot 4^k+4^{k-1}$, могут получиться лишь за меньшее чем $2k$ число шагов, т.е. за 1, за 2, за $2k-1$ шагов.

Заметим, что за l шагов можно получить не более чем 2^{l+1} различных чисел. Действительно, есть два способа выбора первой операции и на каждом из l шагов имеется два способа выбора числа — m или n, т.е. всего различных последовательностей действий имеется $2\cdot 2^l=2^{l+1}$. Поэтому общее количество чисел, получаемых менее чем за $2k$ шагов, не более

$$2^2+2^3+\ldots+2^{2k}=2\cdot 4^k-4<2\cdot 4^k.$$

Итак, среди чисел, меньших $2\cdot 4^k+4^{k-1}$, не менее $(2\cdot 4^k+4^{k-1})-2\cdot 4^k=4^{k-1}$ недостижимых, Следовательно, существуют сколь угодно большие недостижимые числа.