LI Белорусская математическая олимпиада школьников

г. Барановичи, 26 - 31 марта 2001 г.

Второй день

11 класс

5. а) Дана возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n), $n \in \mathbb{N}$. Число a_k из этой последовательности назовём *забавным*, если его можно представить в виде суммы каких-либо других (не обязательно различных) членов последовательности.

Докажите, что начиная с некоторого номера все члены последовательности забавные.

б) Верно ли утверждение п. а), если возрастающая последовательность (a_n) — это последовательность рациональных чисел?

9 **6.** На клетчатой доске отмечен квадрат $n \times n$ $(n \geq 3)$ клеток. В каждой клетке квадрата поставлена стрелка, указывающая на одну из соседних с ней по стороне клеток доски. В одной из клеток квадрата находится муха. Каждый год муха переползает в соседнюю клетку, на которую указывает стрелка, причём сразу после того, как муха покидает клетку, эта стрелка поворачивается на 90^0 против хода часовой стрелки. Докажите, что не более чем через $2^{n/2} \cdot (2n-1)!!$ лет муха выползет за пределы квадрата. (По определению $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$.)

5 **7.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность S_1; окружность S_2 проходит через вершину D, точку O диагонали BD четырехугольника и пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N. Прямые OM и AB пересекаются в точке R, прямые ON и BC – в точке T, а прямые NM и CA – в точке S, при этом R, T и S лежат в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой BD.

Докажите, что точки R, T и S лежат на одной прямой.

8. В некотором племени n туземцев, каждые двое из них либо дружат, либо враждуют. Однажды вождь решил, чтобы каждый туземец (включая и самого вождя) носил ожерелье из камней, причём чтобы у любых двух дружащих туземцев нашлось хотя бы по одному камню одинакового вида, а у любых двух враждующих не было камней одинакового вида. (Не исключено, что у кого-то в ожерелье может не оказаться ни одного камня.)

а) Докажите, что это можно сделать.

б) Какое наименьшее число видов камней заведомо достаточно, чтобы сделать это?

LI Белорусская математическая олимпиада школьников

г. Барановичи, 26 - 31 марта 2001 г.

Первый день

11 класс

1. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$, а на ней отмечены различные точки A, B и C, причём точка B расположена левее, а точка C — правее остальных. Точка N на отрезке BC такова, что прямая AN параллельна оси ординат. Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников ABN и ACN соответственно. Найдите длину отрезка AN.

2. Докажите, что для любого натурального n и любого действительного положительного a выполняется неравенство

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right).$$

8 **3.** На прямой l расположены точки A, B и N в указанном порядке. Для произвольного угла $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ проводятся следующие построения. В одной полуплоскости относительно l выбираются точки C и D такие, что N, C и D лежат на одной прямой, $\angle NAD = \angle NBC = \alpha$ и точки A, B, C и D принадлежат одной окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей получающихся четырёхугольников $ABCD$, когда α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

9 **4.** Для проведения олимпиады жюри составляет комплекты задач — по 4 задачи в каждом. Разные комплекты могут иметь одинаковые задачи, но не более одной.

Какое наименьшее число задач необходимо, чтобы составить 10 таких комплектов?