равносильна системе $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\ s+t=\frac{1}{2}.\end{cases}$ Это означает, что меньшее основание трапеции вдвое меньше большего, а точки $K$ и $M$ на диагоналях подчинены лишь условию $\frac{OK}{OA}+\frac{OM}{OB}=\frac{1}{2}$ — в этом случае прямая $l$ действительно удовлетворяет условию задачи и при этом, если $\frac{OK}{OA}\neq\frac{OM}{OB}$, $l$ не параллельна основаниям.

Министерство образования Республики Беларусь

« 50 »

# Белорусская республиканская математическая олимпиада школьников

Условия и решения задач

Первый день

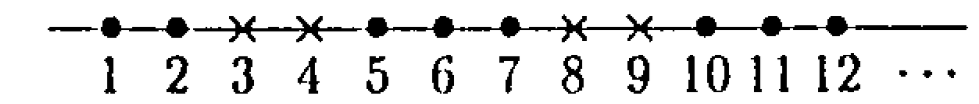
Брест 2000

В настоящей брошюре представлен комплект заданий юбилейной , 50-й математической олимпиады школьников Беларуси.

Методическая комиссия поздравляет участников и организаторов олипмиады, учителей, а также всех коллег, вносящих свой неоценимый вклад в олимпиадное движение в республике, с юбилеем, и желает нынешнему и будущим поколениям юных математиков успехов в учёбе и науке и последующих больших достижений на благо Беларуси.

Нынешняя олимпиада ознаменована ещё двумя юбилеями: известным подвижникам олимпиадного движения, авторам и многолетним составителям новых олимпиадных задач, членам Жюри, Игорю Константиновичу Жуку и Виктору Ивановичу Каскевичу исполнилось 50 и 40 лет. Поздравляем!






. Рис. 3

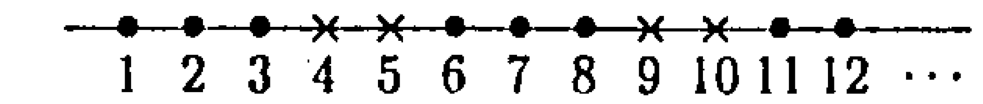



Рис. 4

На рис. 1 — 4 крестиками отмечены номера членов последовательности, входящих в соотвествующее произведение. Указанные произведения действительно являются инвариантами, поскольку операция из условия задачи изменяет знак ровно у двух членов каждого произведения, т. е. сами произведения после её действия не изменяются.

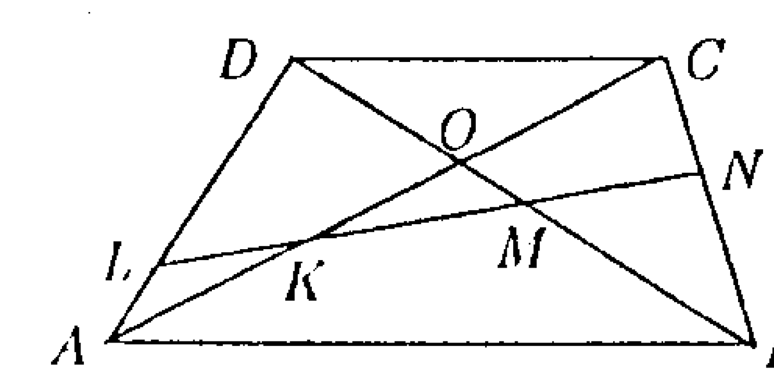
Для последовательности из $\mathcal{M}_N^*$, поскольку её члены, начиная с 5-ого, равны $+1$, эти инварианты соответственно равны:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3\varepsilon_4, \quad \varepsilon_4.$$

Так как система $\begin{cases} \varepsilon_1\varepsilon_2 = \omega_1, \\ \varepsilon_2\varepsilon_3 = \omega_2, \\ \varepsilon_3\varepsilon_4 = \omega_3, \\ \varepsilon_4 = \omega_4, \end{cases}$ какие бы мы ни задали числа $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, равные $+1$ и $-1$, очевидно однозначно разрешима и её решения — числа $+1$ и $-1$, то всего попарно не подобных последовательностей из $\mathcal{M}_N^*$ не менее числа четвёрок $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ с элементами $+1$ и $-1$, т. е. не менее $2^4 = 16$. Но последовательностей из $\mathcal{M}_N^*$ ровно 16. Поэтому все они попарно не подобны друг другу. Следовательно, попарно не подобных последовательностей из $\mathcal{M}_N$ также ровно 16, поскольку, как доказано выше, любая последовательность из $\mathcal{M}_N$ подобна некоторой последовательности из $\mathcal{M}_N^*$.

4. Ответ: нельзя.

Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей, $L$, $K$, $M$, $N$ (в таком порядке) — точки пересечения $l$ с боковыми сторонами и диагоналями (см. рис.).




Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \lambda\vec{b}$, (здесь $\lambda$ — отрицательный коэффициент, модуль которого равен отношению оснований $DC$ и $AB$. Пусть также $\overrightarrow{OK} = t\vec{a}$ и $\overrightarrow{OM} = s\vec{b}$, где $t$ и $s$ — (положительные) числовые коэффициенты. Имеем $\overrightarrow{MK} = t\vec{a} - s\vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{MK} = -\lambda\vec{b} + t\vec{a} + (t\vec{a} - s\vec{b}) = 2t\vec{a} - (\lambda + s)\vec{b}.$$

Далее, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$. Так как векторы $\overrightarrow{DL}$ и $\overrightarrow{DA}$ коллинеарны, то $\frac{2t}{1} = \frac{\lambda + s}{\lambda}$, или $\lambda + s = 2\lambda t$. Итак, $LK = KM$ равносильно $\lambda + s = 2\lambda t$. Аналогично, $KM = MN$ равносильно $\lambda + t = 2\lambda s$. Таким образом, равенство отрезков $LK$, $KM$ и $MN$ равносильно выполнению системы $\begin{cases} \lambda + s = 2\lambda t, \\ \lambda + t = 2\lambda s, \end{cases}$ – которая равносильна системе $\begin{cases} \lambda + s = 2\lambda t, \\ t - s = 2\lambda(s - t). \end{cases}$ Из второго равенства получаем $s = t$, либо $2\lambda = -1$. Если $s = t$, то прямая $l$ параллельна основаниям. Если же $2\lambda = -1$, то последняя система ном +1. Каждая последовательность из $\mathcal{M}_n$ подобна некоторой последовательности из $\mathcal{M}_n^+$ (действительно, если последовательность $A \in \mathcal{M}_n^+$, то доказывать нечего, а если $A \notin \mathcal{M}_n^+$, то изменив знаки у первых пяти её членов, получим подобную $A$ последовательность из $\mathcal{M}_n^+$). Поэтому нам достаточно доказать, что среди последовательностей из $\mathcal{M}_n^+$ ровно 16 попарно не подобных. Если $A \in \mathcal{M}_n^+$, то через $A^{(n-1)}$ обозначим подпоследовательность длины $n-1$ последовательности $A$, начинающуюся со второго члена последовательности $A$. Докажем, что если $A, B \in \mathcal{M}_n^+$, то $A \sim B \iff A^{(n-1)} \sim B^{(n-1)}$. Пусть $A \sim B$ и $A, B \in \mathcal{M}_n^+$. Рассмотрим последовательность шагов, приводящих $A$ к $B$. Среди этих шагов, поскольку первые члены у $A$ и $B$ совпадают, шагов, состоящих в изменении первых пяти членов, чётное число; поэтому результат будет тот же, как если бы этих шагов вообще не было. Следовательно, для перехода от $A$ к $B$ достаточно все операции проделывать только над членами подпоследовательностей $A^{(n-1)}$ и $B^{(n-1)}$, а это и означает, что $A^{(n-1)} \sim B^{(n-1)}$. Обратное: $A^{(n-1)} \sim B^{(n-1)} \Longrightarrow A \sim B$ очевидно.

Таким образом, поскольку последовательности $A$ и $B$ из $\mathcal{M}_n^+$ подобны тогда и только тогда, когда подобны последовательности $A^{(n-1)}$ и $B^{(n-1)}$ длины $n-1$, а таких попарно не подобных последовательностей согласно предположению индукции в точности 16, то поарно не подобных последовательностей из $\mathcal{M}_n^+$, а тогда и из $\mathcal{M}_n$, также ровно 16.

*Второе решение.* Докажем утверждение задачи, используя понятие инварианта. Всякая последовательность из $\mathcal{M}_N$ подобна последовательности, у которой последние $N-4$ члена равны +1 (действительно, начав с $N$-ого члена будем двигаться по последовательности от конца к началу и, встречая член $-1$, будем изменять знак у этого и предшествующих ему четырёх членов — такое продвижение мы заведомо можем осуществить до 5-ого члена последовательности включительно). Итак, любая последовательность из $\mathcal{M}_N$ подобна последовательности вида $\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{N-4}\right)$ (обозначим эту последовательность через $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, а всё множество таких последовательностей — через $\mathcal{M}_N^*$). Докажем, что если последовательности $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ и $\eta = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ различны, то $\Pi(\varepsilon)$ не подобна $\Pi(\eta)$. Для этого поставим в соответствие каждой последовательности из $\mathcal{M}_N$ систему из четырёх инвариантов операции из условия задачи:

I инвариант — произведение всех членов последовательности с номерами $5k+1$ и $5k+2$; (рис. 1)
II инвариант — произведение всех членов последовательности с номерами $5k+2$ и $5k+3$; (рис. 2)
III инвариант — произведение всех членов последовательности с номерами $5k+3$ и $5k+4$; (рис. 3)
IV инвариант — произведение всех членов последовательности с номерами $5k+4$ и $5k+5$. (рис. 4)

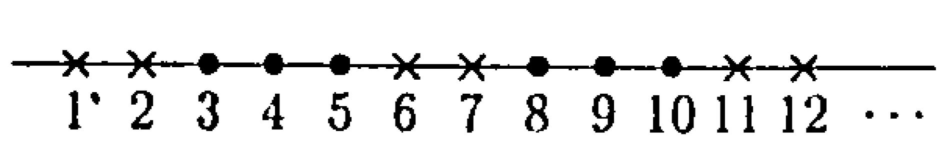


Рис. 1

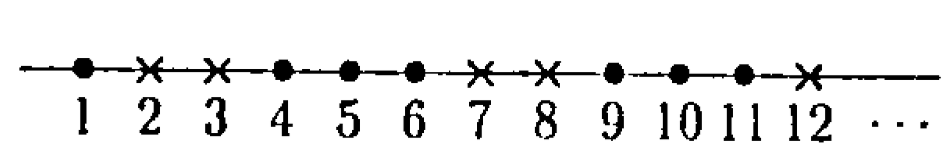


Рис. 2



# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

## 8 класс

1. Найдите все пары целых чисел $x$ и $y$, для которых выполнено равенство $3xy - x - 2y = 8$.

(У. Менский)

2. В квадрате $ABCD$ на сторонах $BC$ и $CD$ отмечены точки $M$ и $K$ соответственно так, что $MC = KD$. Пусть $P$ — точка пересечения отрезков $MD$ и $BK$.

Докажите, что прямые $AP$ и $MK$ перпендикулярны.

(С.Мазаник)

3. Про квадратное уравнение

$$ax^2 - 4bx + 4c = 0, \quad a > 0,$$

известно, что его корни принадлежат отрезку $[2; 3]$.

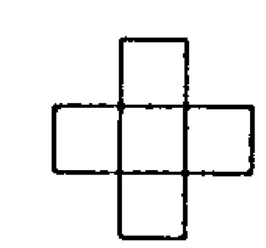
Докажите, что выполнены неравенства

а) $a \le b \le c < a + b$;

б) $\dfrac{a}{a+c} + \dfrac{b}{b+a} > \dfrac{c}{c+b}$.

(С.Мазаник)

4. Какое наибольшее количество „крестов“ (см. рисунок), составленных из пяти квадратиков $1 \times 1$, можно положить на клетчатую доску $8 \times 8$ так, чтобы границы крестов проходили по сторонам клеток, кресты не перекрывали друг друга и не выступали за края доски?



(И.Жук, В.Каскевич)

## 9 класс

1. Найдите все пары целых чисел $x$ и $y$, для которых выполнено равенство $y(x^2+36)+x(y^2-36)+y^2(y-12)=0$.

(И.Воронович, С.Мазаник)

2. Высота $CD$ и биссектриса $AE$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90^0$) пересекаются в точке $F$. Пусть $G$ — точка пересечения прямых $ED$ и $BF$.

Докажите, что площадь четырёхугольника $CEGF$ равна площади треугольника $BDG$.

(И.Жук)

3. Имеется набор из $k$ последовательностей длины $n$, члены которых — числа из множества $\{0,\ 1,\ 2\}$. По любым двум последовательностям $(a_i)$, $(b_i)$ из данного набора можно построить последоваетльность $(c_i)$ по следующему правилу

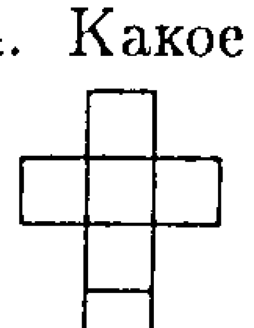
$$c_i = \left[\frac{a_i+b_i+1}{2}\right], \quad i=1,\ldots,n,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, и добавить её в набор уже имеющихся последовательностей. С новым набором последовательностей можно проделывать такую же операцию и т.д.

Известно, что из начального набора за конечное число указанных операций можно получить набор, содержащий $3^n$ различных последовательностей. (Две последовательности считаются различными, если они отличаются хотя бы одним членом.) Найдите наименьшее возможное значение $k$.

(П.Лукьяненко)

4. Какое наибольшее количество „крестов" (см. рисунок), составленных из шести квадратиков $1\times 1$, можно положить на клетчатую доску $9\times 9$ так, чтобы границы крестов проходили по сторонам клеток, кресты не перекрывали друг друга и не выступали за края доски?



(И.Жук, Е.Барабанов, В.Каскевич)



Очевидно, что при $n \geq 15$ число $\dfrac{n!}{2000}$ является целым, т.е. $\left\{\dfrac{n!}{2000}\right\} = 0$ и, следовательно, исходное уравнение решений не имеет, так как по условию $q^2$ — нецелое число. Поэтому $n < 15$. С другой стороны, знаменатель дроби $\dfrac{n!}{2000}$ после приведения к несократимой дроби должен являться точным квадратом. Поэтому, так как $2000 = 2^4\cdot 5^3$, $n!$ должно делиться на 5, но не на 25, иначе 5 будет входить в знаменатель в нечетной степени. Следовательно, $5 \leq n \leq 9$. Рассмотрим каждый из этих пяти случаев.

1. $n=5$. $\quad n! = 2^3\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow 2$ входит в знаменатель дроби $\dfrac{n!}{2000}$ в нечётной (первой) степени, чего, очевидно, быть не может.

2. $n=6$. $\quad n! = 2^4\cdot 3^2\cdot 5 \Rightarrow \left\{\dfrac{n!}{2000}\right\} = \dfrac{9}{25}$.

3. $n=7$. $\quad n! = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow \left\{\dfrac{n!}{2000}\right\} = \dfrac{13}{25}$.

4. $n=8$. $\quad n! = 2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow \left\{\dfrac{n!}{2000}\right\} = \dfrac{4}{25}$.

5. $n=9$. $\quad n! = 2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow \left\{\dfrac{n!}{2000}\right\} = \dfrac{11}{25} = -1+\dfrac{36}{25} = \left\{\dfrac{36}{25}\right\}$.

Следовательно, $q$ имеет вид $\dfrac{k}{5}$, где $0 < k < 10000$ в виду условия $0 < q < 2000$. Кроме того, $\left\{\dfrac{k^2}{25}\right\} = \left\{\dfrac{m}{25}\right\}$ равносильно $k^2 \equiv m \pmod{25}$. Если при этом $m = a^2$, то сравнение $k^2 \equiv a^2 \pmod{25}$ имеет ровно два решения $k=a$ и $k=25-a$ для $0<k<25$, $a \not\equiv 0 \pmod 5$. Кроме того, оно имеет решения вида $k=a+25l$ и $k=25-a+25l$ при $l=1,\ldots,799$. Таким образом, для каждого из $n=6,8,9$ будет ровно по 800 решений соответствующих уравнений при $0<k<10000$. Сравнение $k^2\equiv 13 \pmod{25}$ решений не имеет, так как $k^2-13$ не делится на 5. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно 2400 решений.

3. Через $\mathcal{M}_N$ обозначим множество всех $N$-членных последовательностей, составленных из $+1$ и $-1$. Будем писать $A\sim B$, если последовательность $A$ подобна последовательности $B$. Ясно, что если $A\sim B$, то $B\sim A$ (действительно, проделав в обратном (а на самом деле, в любом) порядке шаги, приводящие $A$ к $B$, получим последовательность $B$). Поэтому если $A$ не подобна $B$, то и $B$ не подобна $A$. Так же легко видеть, что если последовательности $A$ и $B$ порознь подобны последовательности $C$, то $A\sim B$.

*Первое решение.* Доказательство проведём методом математической индукции по $N\geq 5$. Если $N=5$, то в этом случае операция состоит в одновременном изменении знаков у всех членов последовательности. Поэтому для каждой последовательности длины 5 имеется только ещё одна, ей подобная. Поскольку всего последовательностей в $\mathcal{M}_5$ ровно $2^5$, то, следовательно, среди них попарно не подобных в точности $2^5/2 = 2^4 = 16$.

Допустим, мы доказали что среди последовательностей из $\mathcal{M}_{n-1}$ имеется ровно 16 попарно не подобных. Докажем, что это же верно и для множества $\mathcal{M}_n$. Через $\mathcal{M}_n^+$ обозначим подмножество $\mathcal{M}_n$, состоящее из последовательностей с первым чле-

## 11 класс

1. Двое играют в такую игру: первый записывает на доске действительное число $a$, затем второй — число $b$ и, наконец, снова первый — число $c$. После этого составляются три уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$
$$x^3 + bx^2 + cx + a = 0,$$
$$x^3 + cx^2 + ax + b = 0.$$

Всегда ли первый может добиться того, чтобы

а) все три уравнения имели общий действительный корень?

б) все три уравнения имели общий отрицательный корень?

(С.Соболевский)

2. Сколько решений имеет уравнение

$$\{q^2\} = \left\{\frac{n!}{2000}\right\},$$

где $q$ — рациональное нецелое число и $0 < q < 2000$, а $n$ — натуральное число?

(С.Ших)

3. Над последовательностью длины $N$, $N \geq 5$, члены которой $+1$ или $-1$, разрешается на каждом шаге проделывать следующую операцию: выбрать какие-либо (свои для каждого хода) пять последовательных её членов и изменить знак каждого из них на противоположный. Две такие последовательности назовём *подобными*, если одну из них можно за некоторое число указанных шагов превратить в другую.

Какое существует наибольшее число различных попарно не подобных последовательностей длины $N$?

(Е.Барабанов)

4. Прямая $l$ пересекает боковые стороны и диагонали трапеции. Оказалось, что отрезок прямой $l$, заключённый между боковыми сторонами трапеции, делится её диагоналями на три равные по длине части.

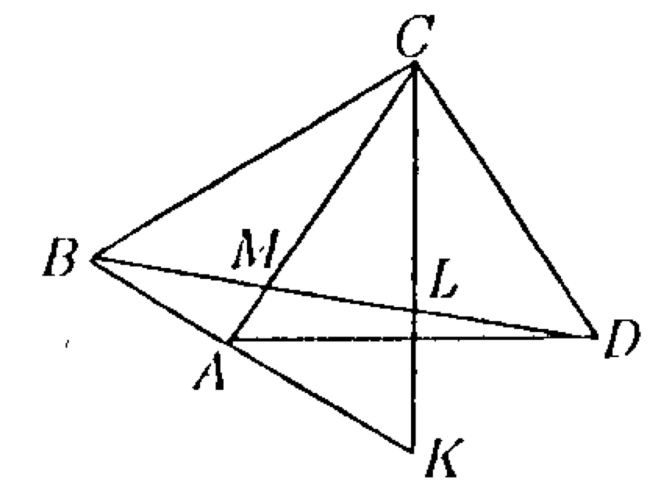
Можно ли утверждать, что прямая $l$ параллельна основаниям трапеции?

(Е.Барабанов)



разбирается аналогично, при этом получаются те же решения $m = 36$ и $n = 12$ или 18. Тривиально проверяется, что найденные пары $(36; 12)$ и $(36; 18)$ действительно являются решениями исходного уравнения.

3. Пусть $L$ — точка пересечения $CK$ и $BD$. Тогда по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{MC}{ML} = \frac{CD}{LD}$, откуда $\frac{MC}{ML} = \frac{MC+CD}{ML+LD} = \frac{MC+CD}{MD}$. По условию $MA(MC+CD) = MB \cdot MD$, т.е. $\frac{MB}{MA} = \frac{MC+CD}{MD}$, поэтому $\frac{MB}{MA} = \frac{MC}{ML}$. Тогда треугольники $BMA$ и $CML$ подобны и, следовательно, $\angle MBA = \angle MCL$.




Но $\angle MCL = \angle LCD$, поэтому $\angle KBD = \angle MBA = \angle LCD = \angle KCD$. Углы $KBD$ и $KCD$ опираются на один и тот же отрезок $KD$, а их вершины лежат в одной полуплоскости относительно этого отрезка, следовательно, точки $K$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной окружности, откуда и следует равенство углов $\angle BKC = \angle CDB$ как опирающихся на общую хорду $BC$.

4. Ответ: $n = 2$, и $-1$ стоит на середине стороны $\Delta ABC$; $n = 3$, и $-1$ стоит в центре $\Delta ABC$.

Условимся называть прямые, содержащие одну из сторон какого-либо „малого" треугольника *отмеченными*, а операцию, состоящую в перемене знаков у точек, лежащих на отмеченной прямой $MN$, будем обозначать через $F(MN)$.

Предположим, что с помощью описанных в условии задачи операций мы получили во всех отмеченных точках числа $+1$. Заметим, что каждая из отмеченных прямых либо вообще не содержит ни одной из точек $A$, $B$, $C$, либо содержит ровно две из этих точек. Из этого следует, что при любой дозволенной операции сохраняется произведение чисел, записанных в точках $A$, $B$, $C$. Поскольку в конце это произведение равно $+1$, то число $-1$ не могло стоять в вершине $\Delta ABC$.

Пусть теперь $n = 2$. Помимо вершин $\Delta ABC$ имеется ещё ровно 3 отмеченные точки — середины сторон $\Delta ABC$ (см. рис. 1). Пусть, например, $-1$ стоит в точке $M$ (см. рис. 1). Тогда, применяя последовательно операции $F(BC)$, $F(AC)$, $F(AB)$, $F(LN)$, мы получим числа $+1$ во всех отмеченных точках.

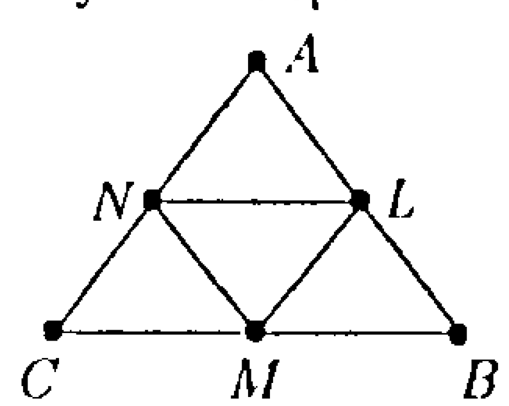



Рис. 1

Рассмотрим случай $n = 3$ (см. рис. 2). Как показано выше, $-1$ не может стоять в вершине $\Delta ABC$. Помимо точек $A$, $B$, $C$ на сторонах треугольника $ABC$ имеется ещё шесть отмеченных точек, являющихся вершинами правильного шестиугольника со стороной 1. Каждая отмеченная прямая содержит ровно две из этих точек; следовательно, при любой дозволенной операции произведение чисел, записанных в этих точках, не изменяется. Поэтому в начальный момент ни одно из этих чисел не могло быть равным $-1$. Если же $-1$ стоит в центре $\Delta ABC$, то, применяя последовательно операции $F(A_2, C_1)$, $F(B_2, A_1)$, $F(C_2, B_1)$, $F(A, B)$, $F(B, C)$, $F(C, A)$, получим во всех отмеченных точках числа $+1$.

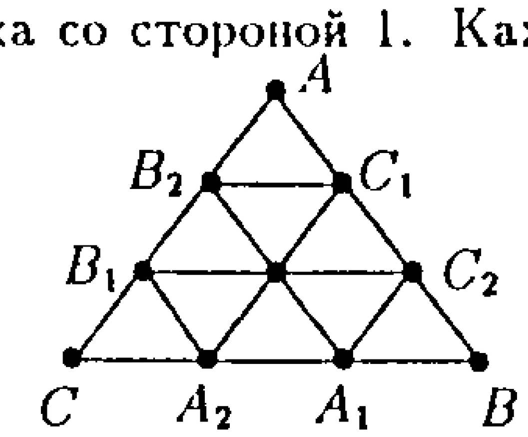



Рис. 2

Пусть $n \geq 3$. Число $-1$, как доказано, не могло в начальный момент стоять в вершине $\triangle ABC$. Но нетрудно убедиться, что любая отмеченная точка, отличная от вершины $\triangle ABC$, является вершиной некоторого правильного шестиугольника со стороной 1, составленного из шести треугольников разбиения. Произвольная отмеченная прямая либо вообще не содержит ни одной вершины этого шестиугольника, либо содержит ровно две его вершины. Поэтому произведение чисел, записанных во всех вершинах шестиугольника, при любой дозволенной операции не меняется. Следовательно, ни в одной из его вершин не могло в начальный момент стоять число $-1$. Таким образом, при $n \geq 3$ при любом начальном положении числа $-1$ с помощью описанных в условии задачи операций получить во всех отмеченных точках числа $+1$ невозможно.

## 11 класс

1. Ответ: а) да; б) нет.

а) Выбирая произвольное $a$, а затем $c = -1 - a - b$, первый всегда добьётся того, чтобы все три уравнения имели корень $x = 1$.

b) Покажем, что если второй игрок положит $b \neq a$, то уравнения не будут иметь общих корней, отличных от 1. Действительно, пусть все три уравнения имеют общий корень $k \neq 1$.

Тогда, вычитая второе уравнение из первого, будем иметь

$$(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0, \qquad (1)$$

причем $k$ должно удовлетворять уравнению (1). Последнее имеет, при $a \neq b$, два корня $x = 1$ и $x = \frac{c-a}{a-b}$, при $a = b \neq c$ — единственный корень $x = 1$, а при $a = b = c$ его корнями являются все действительные числа.

Однако, поскольку случай $a = b$ не имеет места, а $k \neq 1$, имеем

$$k = \frac{c-a}{a-b}. \qquad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что если последним своим ходом первый игрок положил $c = a$, то $k = 0$, т.е. общий корень получившихся уравнений не является отрицательным. Поэтому $c \neq a$. Вычитая первое уравнение из третьего, получим

$$k = \frac{b-c}{c-a}. \qquad (3)$$

По аналогичной причине отсюда $c \neq b$.

Далее, вычитая третье уравнение из первого, будем иметь

$$k = \frac{a-b}{b-c}. \qquad (4)$$

Перемножая (2)-(4), получим $k^3 = 1$, откуда $k = 1$. Противоречие.

2. Ответ: 2400.



## 10 класс

6 1. Найдите геометрическое множество всех точек на координатной плоскости $xOy$, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом. (Это значит, что две касательные, проведённые из такой точки к параболе, взаимно перпендикулярны.)

(И.Городнин)

8 2. Найдите все натуральные числа $m$ и $n$, удовлетворяющие уравнению

$$(m-n)^2(n^2-m) = 4m^2n.$$

(И.Городнин)

6 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена биссектриса угла $ACD$ до её пересечения в точке $K$ с продолжением стороны $BA$. Известно, что $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$, где $M$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ данного четырёхугольника.

Докажите, что $\angle BKC = \angle CDB$.

(С.Ших)

10 4. Правильный треугольник $ABC$ со стороной $n$, где $n$ — натуральное число, разбит прямыми, параллельными сторонам треугольника, на правильные треугольники со стороной 1. Отмечены все вершины получившихся „малых“ треугольников, и в каждой отмеченной точке записано число, причём известно, что ровно одно из этих чисел равно $-1$, а все остальные равны 1. Разрешается выбрать произвольную прямую, содержащую сторону одного из „малых“ треугольников, и для всех отмеченных точек на этой прямой поменять знак у соответствующего числа на противоположный.

Опишите все ситуации (т. е. значения числа $n$ и положения числа $-1$), в которых с помощью указанных операций можно добиться того, что во всех отмеченных точках будут стоять числа $+1$.

(И.Жук)

## 10 класс

1. Искомое множество точек — горизонтальная прямая, уравнение которой $y = -\frac{1}{4}$ (знатоки сразу заметят, что это уравнение директрисы данной параболы).

Пусть $X(x_0, y_0)$ — любая точка, удовлетворяющая условию. Любая (не вертикальная) прямая, проходящая через $X$, задаётся уравнением $y = k(x - x_0) + y_0$, где $k$ — угловой коэффициент. Эта прямая или не имеет общих точек с параболой $y = x^2$, или пересекает её в двух точках, или касается её в одной точке тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 = k(x - x_0) + y_0$ или не имеет действительных решений, имеет два действительных решения, или имеет ровно одно действительное решение, соответственно. Последний случай имеет место тогда и только тогда, когда дискриминант этого квадратного уравнения равен нулю: $D = k^2 - 4x_0k + 4y_0 = 0$. По условию это уравнение имеет два решения $k_1$ и $k_2$, так как из точки $X$ проходят две касательные к параболе. При этом $k_1k_2 = -1$ (условие перпендикулярности прямых). Но по теореме Виета $k_1k_2 = 4y_0$, откуда $y_0 = -\frac{1}{4}$. Итак, точка $X(x_0, y_0)$ принадлежит искомому геометрическому месту точек тогда и только тогда, когда $y_0 = -\frac{1}{4}$, т. е. $X$ лежит на прямой $y = -\frac{1}{4}$.

2. Ответ: $(m,n) = (0,0), (36,12)$ или $(36,18)$.

В любом из случаев $m = n, m = n^2, m = -n$ получаем $m = n = 0$, что, очевидно, является решением данного уравнения.

Пусть теперь $m + n \neq 0, n \neq 0, m \neq 0$. Добавляя к обеим частям данного уравнения $4mn(n^2 - m)$, получим

$$(m+n)^2(n^2 - m) = 4mn^3. \qquad (1)$$

Разделив исходное уравнение почленно на уравнение (1), получим

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = \frac{m}{n^2}, \qquad (2)$$

откуда видим, что $m$ является квадратом целого числа. Пусть $m = k^2$; можем для определённости считать, что $k$ — натуральное. Тогда из (2) получаем, что $\frac{k^2-n}{k^2+n} = \pm\frac{k}{n}$. Рассмотрим случай $\frac{k^2-n}{k^2+n} = \frac{k}{n}$. Это может быть записано в виде

$$n^2 - (k^2 - k)n + k^3 = 0. \qquad (3)$$

Так как $n$ целое, дискриминант квадратного относительно $n$ уравнения (3) должен быть полным квадратом. Имеем $D = (k^2 - k)^2 - 4k^3 = k^2((k-3)^2 - 8)$. Отсюда видим, что $(k-3)^2 - 8$ есть квадрат целого числа. Пусть $(k-3)^2 - 8 = l^2, l \geq 0$; тогда $(k - 3 - l)(k - 3 + l) = 8$. Заметим, что целые числа $k - 3 - l$ и $k - 3 + l$ имеют одинаковую чётность, поэтому из последнего равенства получаем, что либо $k-3-l = 2$ и $k - 3 + l = 4$, откуда $k = 6$, либо $k - 3 - l = -4$ и $k - 3 + l = -2$, откуда $k = 0$, что противоречит соглашению $m \neq 0$. Итак, $k = 6, m = 36$; $D = 6^2((6-3)^2-8) = 36$. Решая теперь уравнение (3) при $k = 6$, получаем $n = 12$ или $n = 18$. Случай $\frac{k^2-n}{k^2+n} = -\frac{k}{n}$



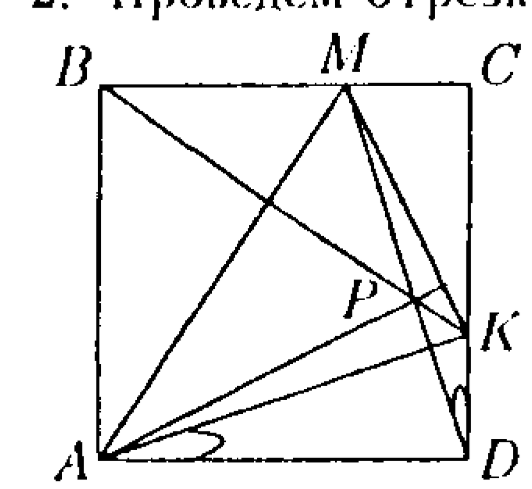
# РЕШЕНИЯ

## 8 класс

1. Ответ: $(-8,0)$, $(0,-4)$, $(1,9)$, $(5,1)$.

Преобразуем исходное уравнение к виду $(3x-2)(3y-1) = 26$. Следовательно, $3x - 2 = m$, $3y - 1 = n$, где целые числа $m$ и $n$ являются делителями числа 26. Поскольку число $3x - 2$ даёт остаток 1 при делении на 3, то легко видеть, что $m$ может принимать лишь значения $-26$, $-2$, 1 и 13 (тогда $n$ принимает соотвественно значения $-1$, $-13$, 26, 2). Отсюда легко находим все возможные значения $x$ и $y$: $x = -8$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 4$; $x = 1$, $y = 9$; $x = 5$, $y = 1$.

2. Проведём отрезки $AK$ и $AM$. Легко видеть, что треугольники $AKD$ и $DMC$ равны (как прямоугольные с равными катетами $AD = DC$, $DK = CM$). Поэтому $\angle KAD = \angle MDC$, откуда $MD \perp AK$. Аналогично, $KB \perp AM$. Поэтому точка $P$ является точкой пересечения высот треугольника $AMK$, откуда и следует, что прямые $AP$ и $MK$ перпендикулярны.




3. а) Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни исходного уравнения. Тогда из теоремы Виета следует $\frac{4b}{a} = x_1 + x_2 \geq 2 + 2 = 4$, откуда $b \geq a$. Снова по теореме Виета $\frac{4c}{a} = x_1 \cdot x_2$, поэтому требуемые неравенства $b \leq c < a + b$ равносильны неравенствам $\frac{4b}{a} \leq \frac{4c}{a}$ и $\frac{4c}{a} < \frac{4b+4a}{a} = \frac{4b}{a} + 4$, или

$$x_1 + x_2 \leq x_1 \cdot x_2 < 4 + (x_1 + x_2) \iff 0 \leq x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) < 4. \qquad (1)$$

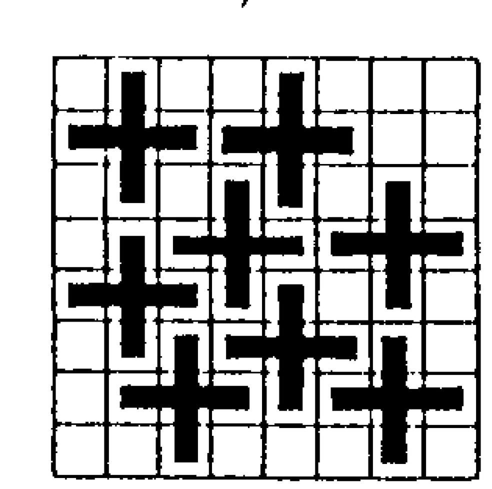
Так как $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + 1$, то (1) равносильно $1 \leq (x_1-1)(x_2-1) < 5$, что, очевидно, выполняется, поскольку $x_1, x_2 \in [2,3]$.

б) Из неравенств, доказанных в предыдущем пункте, следует

$$\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{b+c} = \frac{a+b}{b+c} > \frac{c}{b+c}.$$

4. Ответ: 8.

Заметим, что к каждой стороне квадрата может примыкать не более, чем по два креста. Поэтому не более 8 клеток на границе квадрата могут быть накрыты крестами. Тогда всего, вместе с внутренними $6 \cdot 6 = 36$ клетками, крестами может быть накрыто не более $8 + 36 = 44$ клеток. Так как каждый крест состоит из 5 клеток, то количество крестов — не более 8, ввиду того, что $\frac{44}{5} < 9$. Пример для 8 крестов приведён на рисунке.



## 9 класс

**1.** Ответ: $(0,0)$, $(0,6)$, $(-8,-2)$, $(1,4)$, $(4,4)$.

Перепишем уравнение в виде $yx^2 + (y^2-36)x + y(y-6)^2 = 0$. Очевидно, что если $y=0$, то $x=0$ и пара $(x,y)=(0,0)$ действительно является решением. Если же $y \neq 0$, то исходное соотношение можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $x$. Поэтому

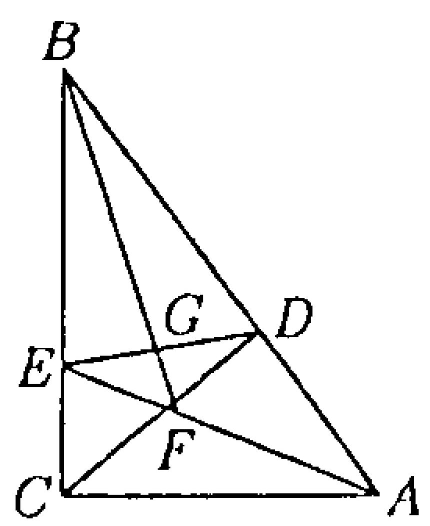
$$x = \frac{(36-y^2) \pm \sqrt{(y^2-36)^2 - 4y^2(y-6)^2}}{2y}. \qquad (1)$$

Чтобы при целом $y$ значение $x$ было целым, необходимо, чтобы полным квадратом было подкоренное выражение. Но

$$(y^2-36)^2 - 4y^2(y-6)^2 = (y-6)^2((y+6)^2 - 4y^2) = 3(y-6)^2(6-y)(y+2).$$

Следовательно, существует такое натуральное $m$, что $3(6-y)(y+2) = m^2$. В частности, $(6-y)(y+2) \geq 0$, откуда $-2 \leq y \leq 6$. Несложной проверкой убеждаемся, что лишь при $y=-2$, $y=4$ и $y=6$ выражение $3(6-y)(y+2)$ является полным квадратом. Рассматривая эти значения $y$, находим остальные решения: $(-8,-2)$, $(1,4)$, $(4,4)$ и $(0,6)$.

**2.** Так как $AE$ — биссектриса $\Delta ABC$ и $AF$ — биссектриса $\Delta ADC$, то




$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} = \cos\angle BAC = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CF} \implies$$
$$CE\cdot CF = BE\cdot DF = (BC-EC)(CD-CF) \implies$$
$$BC\cdot CD = BC\cdot CF + EC\cdot CD.$$

Умножая обе части полученного равенства на $\frac{1}{2}\sin\angle BCD$, получим $S(BCD) = S(BCF) + S(ECD)$. Но

$$S(BCD) = S(CEGF) + S(BEG) + S(BGD) + S(GDF),$$
$$S(BCF) = S(CEGF) + S(BEG), \quad S(ECD) = S(CEGF) + S(GDF),$$

откуда и следует требуемое равенство площадей $S(CEGF) = S(BDG)$.

**3.** Ответ: $n+1$.

Если набор содержит $3^n$ различных последовательностей длины $n$, то он должен содержать все возможные последовательности, так как их ровно $3^n$. Из формулы

$$c_i = \left[\frac{a_i+b_i+1}{2}\right], \quad i=1,\ldots,n, \qquad (1)$$

видно, что $c_i=0$ только при $a_i=b_i=0$, и $c_i=2$ только при $a_i=b_i=2$. Следовательно, последовательность, состоящая из одних нулей (обозначим её $A_0$), не может быть получена из других последовательностей, отличных от $A_0$. Поэтому последовательность $A_0$ должна присутствовать в первоначальном наборе. Аналогичное утверждение



справедливо и для последовательностей $A_j$, у которых один элемент, стоящий на $j$-м месте, равен 2, а остальные элементы равны 0. Таких последовательностей ровно $n$. Поэтому $k \geq n+1$.

Покажем, что из последовательностей $A_j$, $j=0,1,\ldots,n$, можно получить набор из всех $3^n$ возможных последовательностей. Назовем операцию получения новой последовательности сложением и обозначим $\oplus$. Несложно роверяется, что эта операция удовлетворяет сочетательному закону: $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(b\oplus C)$. Поэтому обе эти записи могут быть заменены на $A\oplus B\oplus C$.

Предположим, что нам необходимо построить последовательность $F$, содержащую двойки на позициях $m_1, \ldots, m_x$, единицы на позициях $m_{x+1}, \ldots, m_{x+y}$ и нули на позициях $m_{x+y+1}, \ldots, m_n$, $x\geq 0$, $y \geq 0$, $x+y\leq n$. Нетрудно проверить, что для этого достаточно проделать следующие операции:

1. Строим последовательность $C = A_0 \oplus A_{m_1} \oplus \ldots \oplus A_{m_x}$, которая содержит $x$ единиц и $n-x$ нулей.

2. Строим последовательность $D = C \oplus A_{m_1} \oplus \ldots \oplus A_{m_x}$, которая содержит $x$ двоек и $n-x$ нулей.

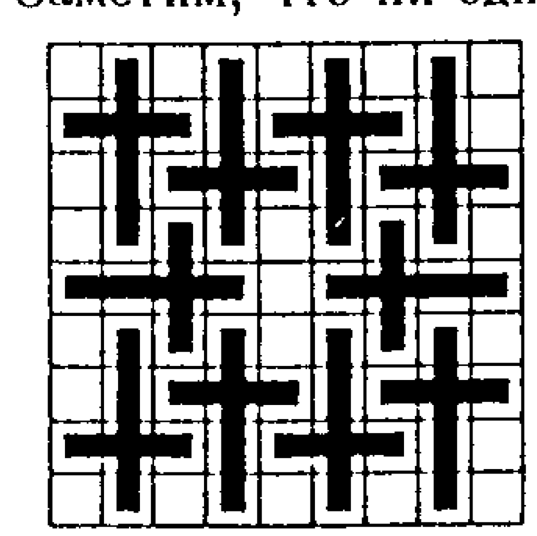
3. Строим последовательность $E = A_0 \oplus A_{m_1} \oplus \ldots \oplus A_{m_x} \oplus A_{m_{x+1}} \oplus \ldots \oplus A_{m_{x+y}}$, которая содержит $x+y$ единиц и $n-x-y$ нулей.

4. Строим требуемую последовательность $F = D \oplus E$.

Очевидно, что таким образом может быть построена любая последовательность, следовательно, $k=n+1$.

**4.** Ответ: 10.

Заметим, что ни одна из угловых клеток квадрата не может принадлежать крестам. Кроме того, никакие две соседние клетки на границе квадрата также не могут одновремено принадлежать одному или разным крестам. Поэтому не более 4 клеток, примыкающих к одной и той же стороне квадрата, могут быть накрыты крестами. А всего на границе квадрата таких клеток — не более 16. Тогда, вместе с внутренними $7\cdot 7 = 49$ клетками, крестами может быть накрыто не более $16+49 = 65$ клеток. Так как каждый крест состоит из 6 клеток, то количество крестов — не более 10, ввиду того, что $\frac{65}{6} < 11$. Пример для 10 крестов приведён на следующем рисунке.



$f(x) = x\mathrm{tg}x$, то $f(0) = 0$ и $f(x) \to +\infty$, при $x \to \pi/2$, причём, очевидно, $\alpha \neq \pi/4$. Тогда $AC = BC\cos\alpha = \cos\alpha AB/\sin\alpha = \alpha$. Таким образом нужный треугольник построен.

2) Пусть нашёлся неравнобедренный треугольник $\Delta ABC$, в характеристческом наборе $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ которого не более 3 различных чисел. Так как треугольник неравнобедренный, то $a \neq b \neq c \neq a$ и $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Не нарушая общности, предположим, что $a < b < c$, тогда $\alpha < \beta < \gamma$ (против большей стороны в треугольнике лежит больший угол). Так как среди чисел $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ не более 3 различных , то $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Тогда по теореме синусов имеем $a/\sin a = b/\sin b = c/\sin c$. Но функция $g(x) = x/\sin x$ убывает на интервале $(0, \pi)$, т.е. из полученного равенства следует, что $a = b = c$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.



# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

## 8 класс

5. На некоторой олимпиаде полное решение задачи № 5 в восьмом классе оценивалось в 4 балла. Количество школьников, получивших за эту задачу 3 балла, оказалось равным числу школьников, получивших за неё 2 балла. За эту задачу каждый школьник получил не менее 1 балла, и дробных баллов не выставлялось.

Определите количество школьников, получивших за задачу № 5 не менее трёх баллов, если известно, что суммарное число баллов, выставленных за эту задачу, на 30 больше числа восьмиклассников, которые участвовали в олимпиаде.

(В.Каскевич)

6. Пусть $f(x) = \{x\} + \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$, где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа $x$.

а) Докажите, что $f(x) < 1,5$ для $x > 0$ и $f(x) < 2$ для $x < 0$.

б) Докажите, что для любого натурального $n$ существует такое $x_0$, что $f(x_0) > 2 - \dfrac{1}{n}$.

(И.Городнин)

7. На стороне $AB$ неравнобедренного треугольника $ABC$ со сторонами $BC < AC < AB$ отмечены точки $B_1$ и $C_2$ так, что $AC_2 = AC$, $BB_1 = BC$. На стороне $AC$ отмечена точка $B_2$, такая, что $CB_2 = CB$, а на продолжении стороны $CB$ за точку $B$ — точка $C_1$, такая, что $CC_1 = CA$.

Докажите, что прямые $C_1C_2$ и $B_1B_2$ параллельны.

(И.Воронович)

8. На плоскости отмечено 7 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две отмеченные точки соединены отрезком.

Можно ли покрасить эти отрезки в несколько цветов (каждый отрезок — целиком в один цвет) так, чтобы имелось ровно по три отрезка каждого цвета, причём они образовывали треугольник с вершинами в трёх отмеченных точках?

(У.Мище)

## 9 класс

5. Определите, сколько существует уравнений вида $x^2 - px - q = 0$, где $p$ и $q$ — натуральные числа, таких, что корни каждого из этих уравнений не превосходят 10.

(М.Наумик)

6. На гипотенузе $AB$ и катете $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники $\triangle ABF$ и $\triangle CAG$. Пусть $M$ — середина катета $BC$.

Найдите длину этого катета, если $MF = 11$ и $MG = 7$.

(И.Воронович)

7. Двое игроков по очереди ставят фишки в клетки доски $20 \times 20$. За один ход разрешается поставить одну фишку в пустую клетку. Выигрывает тот игрок, после хода которого какие-то четыре фишки окажутся в клетках, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски.

Кто выигрывает при правильной игре: первый (начинающий) или второй игрок, и как он должен играть, чтобы добиться победы независимо от игры соперника?

(В.Каскевич)

8. Докажите, что не все числа $a$, $b$, $c$, $d$ различны, если выполняется равенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}+\frac{d}{a}+\frac{a}{d}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}+\frac{ac}{bd}+\frac{bd}{ac}+2 .$$

(В.Каскевич)



Построим пример треугольной пирамиды с двумя правильными вершинами. Для этого рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный $\triangle ABC$ с гипотенузой $AB$. Пусть $D$ — не лежащая в плоскости треугольника $ABC$ точка, такая, что $|B - D| < \varepsilon$. Из соображений непрерывности ясно, что найдётся достаточно малое $\varepsilon$, при котором у пирамиды $DABC$ будет ровно две правильные вершины: $A$ и $C$.

Аналогично строится пример и для $N = 3$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, катеты $AC$, $BC$ и гипотенуза $AB$ которого удовлетворяют неравенствам $\frac{AC}{2} < BC < \frac{AB}{2} < AC$ (например, $AC = 9$, $BC = 25$, $AB = \sqrt{116}$). Из середины $M$ гипотенузы восставим к плоскости $\triangle ABC$ перпендикуляр и отметим на нём точку $D$ ($D \neq M$). Пирамида $DABC$, если $D$ близка к $M$, имеет $N = 3$ правильные вершины. В самом деле, если $D$ достаточно близка к $M$, то вершина $B$ не является правильной, поскольку тогда $BD + BC < BA$. Остальные же вершины построенной пирамиды $DABC$ правильные. Для точки $D$ это верно при любой длине отрезка $DM$, поскольку $DA = DB = DC$ (в силу равенства прямоугольных треугольников $DMA$, $DMB$ и $DMC$). Среди отрезков, выходящих из вершины $A$, наибольшим, если $DM$ достаточно мало, является отрезок $AB$. Так как $AD > AM$ и $AC > AM$, то $AD + AC > AM + AM = AB$. Итак, вершина $A$ правильная. Для вершины же $C$ имеем: если $DM$ мало, то наибольшим среди отрезков, выходящих из вершины $C$, является отрезок $CA$ (поскольку $CA > \frac{AB}{2} \approx CD$ и $CA > BC$). Но $CA < CB + CD$ — это неравенство получается сложением неравенств $CA > \frac{CA}{2} < CB$ и $CA > \frac{AB}{2} < CD$ (последнее верно, т.к. $CD \approx CM = \frac{AB}{2}$, а $\frac{CA}{2} < \frac{AB}{2}$. Таким образом, $C$ также правильная.

7. Ответ: а) все натуральные $n \neq 2$; в) $a = b = 1$ и $a = 2^8$, $b = 2^{10}$.

а) При $n = 1$ подходят любые $a = b \neq 1$. Если $n > 2$, то числа $a = (n-1)^{(n-1)}$ и $b = (n-1)^n$, как легко проверить, удовлетворяют уравнению (при этом $a > 1$, $b > 1$). Осталось убедиться, что $n = 2$ не удовлетворяет условию задачи. Итак, пусть $n > 1, a > 1, b > 1$. Пусть $p$ — любой простой делитель $a$ (а, следовательно, и $b$). Можно записать $a = p^s l, b = p^t m$, где $s, t$ — натуральные числа, а натуральные $l$ и $m$ взаимно просты с $p$. Имеем $b^b = (a^a)^n > a^a$, откуда $b > a$. Тогда $a^{an} = b^b > a^b$, следовательно, $an > b$. Далее, $(p^s k)^{an} = (p^t m)^b$; степени вхождения $p$ в обе части равенства должны быть равны, поэтому $san = tb$. Т.к. $b < na$, отсюда получаем $s < t$. Итак, степень $s$ вхождения произвольного простого $p$ в $a$ меньше степени $t$ вхождения $p$ в $b$. Стало быть, $a$ делит $b$, или $b = ka$ $(k > 1)$. В силу данного уравнения тогда имеем $b^b = (ka)^{ka} = a^{na}$, откуда $(ka)^k = a^n$, т.е. $a^{n-k} = k^k > 1$, или $n - k > 0$. Поскольку $k > 1$, то $n > 2$.

б) Рассуждая, как в пункте а) решения, получим при $n = 5$: $b = ka$ $(k > 1$, и $(ka)^k = a^5$ т.е. $a^{5-k} = k^k$, $1 < k < 5$. При $k = 2$ или 3 решений, как легко проверяется, нет. При $k = 4$ получаем $a = 4^4 = 2^8, b = 4a = 2^{10}$.

8. Решение. Докажем, что $n = 4$.

1) Построим неравнобедренный треугольник $ABC$, в наборе длин сторон и величин углов которого будет не более 4 различных чисел. Пусть $AB = \pi/2\,(м)$, $\angle A = \pi/2\,(рад.)$, а $\angle C = \alpha$, где $\alpha \operatorname{tg} \alpha = \pi/2$. Такое $\alpha$ существует, поскольку если

## 11 класс

5. Ответ: можно.

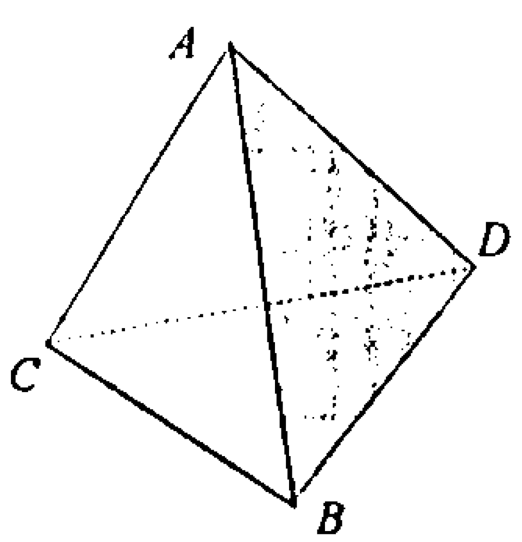
Опишем возможный способ раскраски. Занумеруем точки числами от 1 до 9 и запишем эти числа в таблицу $3 \times 3$ в некотором порядке. Закрасим теперь отдельным цветом три отрезка, соединяющие точки с номерами из первого столбца таблицы, отдельным цветом — отрезки, соединяющие точки с номерами из второго столбца, и отдельным цветом — из третьего столбца. Аналогично поступим и для трёх строк таблицы. (Для любой точки закрашено по два отрезка разного цвета, выходящих из этой точки.) Рассмотим теперь тройки точек с номерами, принадлежащими разным столбцам и разным строкам таблицы; каждая точка принадлежит в точности двум таким тройкам. (Например, точка с номером 1 принадлежит тройкам 1, 5, 9 и 1, 8, 6.) Закрасим отдельным цветом отрезки, соединяющие точки из каждой такой тройки. Тем самым для любой точки закрасилось в разные цвета ещё по два отрезка, выходящих из неё. Тогда для любой точки все восемь выходящих из нее отрезков закрашены – по два отрезка разных цветов. Итак, все отрезки закрашены; на любом шаге закрашивалось в новый цвет по три отрезка новых отрезка, образующих треугольник. (Всего получилось 12 различных цветов.) Тем самым требуемая раскраска получена.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

6. Ответ: 1, 2, 3, 4.

Докажем, что в каждой треугольной пирамиде имеется хотя бы одна правильная вершина.

Пусть $ABCD$ — какая-либо треугольная пирамида, и пусть длина её ребра $AB$ не меньше длины каждого из остальных её рёбер $AC$, $AD$, $BC$ и $BD$. Из треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ согласно неравенству треугольника получаем соответственно: $AB < AC + BC$ и $AB < AD + BD$. Складывая почленно эти неравенства, получим: $2AB < AC + BC + AD + BD$, или, переставив слагаемые в правой части, $2AB < (AC + AD) + (BC + BD)$. Из последнего неравенства вытекает, что либо $AB < AC + AD$, либо $AB < BC + BD$. Если $AB < AC + AD$, то, поскольку $AB \geq AC$ и $AB \geq AD$, из рёбер $AB$, $AC$, $AD$, выходящих из вершины $A$ пирамиды, можно составить треугольник, а если $AB < BC + BD$, то, аналогично, треугольник можно составить из рёбер, выходящих из вершины $B$. Итак, число $N$ правильных вершин любой треугольной пирамиды отлично от нуля.




Приведём примеры треугольных пирамид, число $N$ правильных вершин которых в точности равно 1, 2, 3, 4 соотвественно. Для $N = 4$ и $N = 1$ примеры очевидны: их доставляют, соответственно, правильный тетраэдр и правильная пирамида с ребром основания 1 и боковым ребром 3. Чуть сложнее строятся примеры для $N = 2$ и $N = 3$.

Построим пример треугольной пирамиды с двумя правильными вершинами. Для этого рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный $\triangle ABC$ с гипотенузой



## 10 класс

5 5. Двое игроков по очереди ставят фишки в клетки доски $25 \times 25$. За один ход разрешается поставить одну фишку в пустую клетку. Выигрывает тот игрок, после хода которого какие-то четыре фишки окажутся в клетках, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски.

Кто выигрывает при правильной игре: первый (начинающий) или второй игрок, и как он должен играть, чтобы добиться победы независимо от игры соперника?

(В.Каскевич)

6. На плоскости даны прямоугольник $ABCD$ и некоторая точка $X$.

4 а) Докажите, что среди отрезков $XA$, $XB$, $XC$ и $XD$ найдутся три, из которых можно составить треугольник.

5 б) Останется ли справедливым это утверждение, если прямоугольник заменить параллелограммом?

(И.Воронович)

8 7. Найдите все натуральные числа $a$ и $b$, удовлетворяющие уравнению

$$a^{(a^a)} = b^b.$$

(И.Воронович)

8. Множество $R$ ненулевых векторов на плоскости назовём *согласованным*, если для него выполнены два условия:

1) для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в том числе и равных) из $R$ вектор $S_{\vec{b}}(\vec{a})$, симметричный вектору $\vec{a}$ относительно прямой, перпендикулярной вектору $\vec{b}$, также принадлежит $R$;

2) каковы бы ни были $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $R$, вектор $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a})$ есть целое кратное вектора $\vec{b}$ (т. е. $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a}) = k\vec{b}$ для некоторого, своего для каждых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, целого $k$).

3 а) Докажите, что для любых не коллинеарных и не ортогональных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $R$ либо $\vec{a} - \vec{b} \in R$, либо $\vec{a} + \vec{b} \in R$.

5 б*) Существует ли бесконечное согласованное множество? Какое наибольшее число ненулевых векторов может иметь конечное согласованное множество?

(А.Миротин, Е.Барабанов)

## 11 класс

5. На плоскости отмечено 9 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две отмеченные точки соединены отрезком.

Можно ли покрасить эти отрезки в несколько цветов (каждый отрезок — целиком в один из цветов) так, чтобы имелось по три отрезка каждого цвета, причём они образовывали треугольник с вершинами в трёх отмеченных точках?

(У.Мище)

(4) 6. Вершину треугольной пирамиды назовём *правильной*, если из выходящих из неё рёбер можно составить треугольник.

Какое число правильных вершин может иметь треугольная пирамида? (Укажите все случаи.)

(Е.Барабанов)

7. а) Найдите все натуральные $n$, при которых уравнение

$$(a^a)^n = b^b$$

имеет решение в натуральных числах $a$ и $b$, больших 1.

б) Найдите все натуральные числа $a$ и $b$, удовлетворяющие равенству

$$(a^a)^5 = b^b.$$

(И.Воронович)

8. Пусть в $\triangle ABC$ его стороны и углы равны соответственно: $AB = c\,(м)$, $BC = a\,(м)$, $CA = b\,(м)$ и $\angle A = \alpha\,(рад)$, $\angle B = \beta\,(рад)$, $\angle C = \gamma\,(рад)$.

Найдите минимальное значение $n$, для которого существует неравнобедренный треугольник, такой, что в наборе $(a,\, b,\, c,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma)$ ровно $n$ различных чисел.

(И.Лосев)



в случае а) все возможные согласованные множества исчерпываются множествами, показанными на рис. 2.

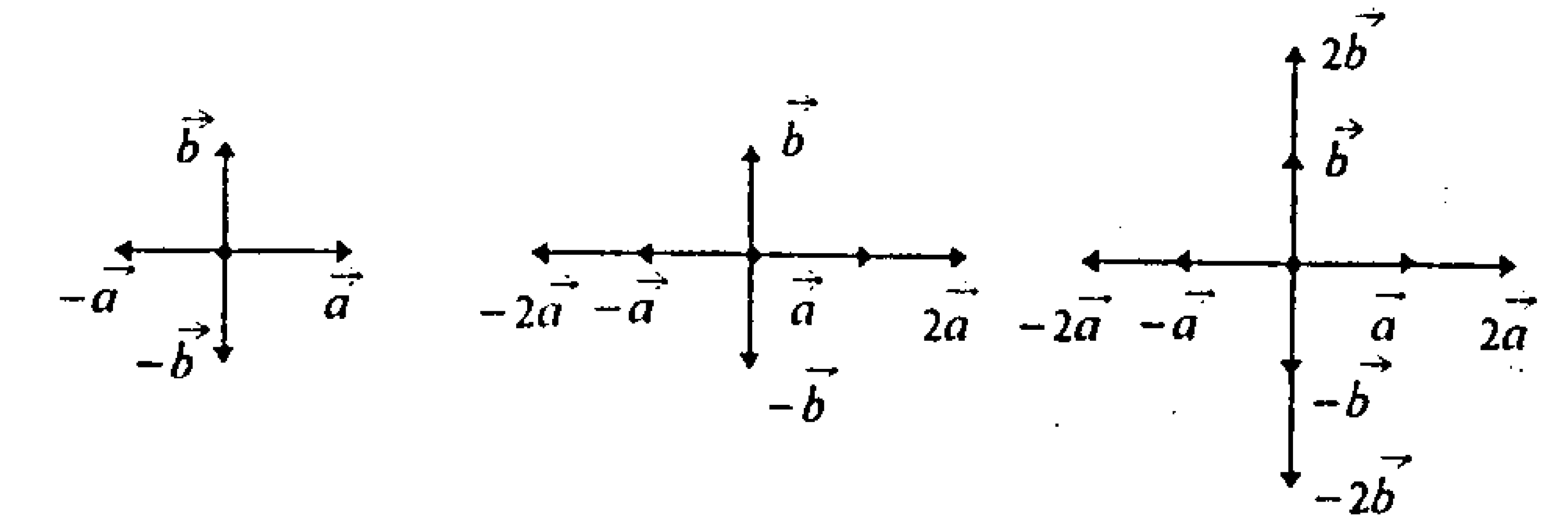



Рис. 2

Остаётся рассмотреть случай б). Если $|\vec a| = |\vec b|$, то треугольник, составленный из векторов $\vec a$, $\vec b$ и $S_{\vec b}(\vec a)$, равносторонний; поэтому $2\alpha + 60^0 = 180^0$, откуда $\alpha = 60^0$. Легко проверить, что векторы, соединяющие центр правильного шестиугольника с его вершинами, действительно, образуют согласованное множество и что в этом случае не простых согласованных множеств нет.

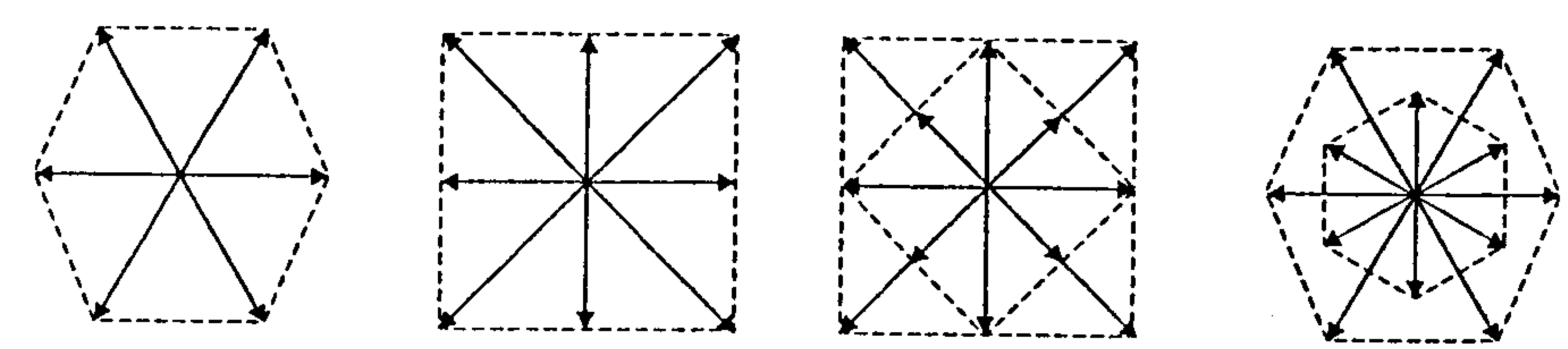


Рис. 3

Если $|\vec a| < |\vec b|$. Тогда $\angle(\vec a, \vec b) > 60^0$, т. е. $\alpha < 60^0$. Значит, принадлежащие множеству $R$ векторы $T(\vec b\,|\,\vec a)$ и $T(-\vec b\,|\,S_{\vec b}(\vec a))$, лежат между векторами $\vec a$ и $S_{\vec b}(\vec a)$. Здесь также возможны два случая:

$$1б)\ T(\vec b\,|\,\vec a) = T(-\vec b\,|\,S_{\vec b}(\vec a)) \quad и \quad 2б)\ T(\vec b\,|\,\vec a) \neq T(-\vec b\,|\,S_{\vec b}(\vec a)).$$

В случае 1б) получаем: $2\alpha = 90^0$, т. е. $\alpha = 45^0$. Простыми вычислениями получаем, что этому случаю соответствует простое согласованное множество, составленное из векторов, соединяющих центр квадрата с серединами его сторон и вершинами. Из этого множества получаем единственное не простое множество, соответствующее случаю 1б). В случае 2б) имеем: $\angle\left(T(\vec b\,|\,\vec a),\, T(-\vec b\,|\,S_{\vec b}(\vec a)\right) = 60^0$. Значит, $4\alpha + 60^0 = 180^0$, откуда $\alpha = 30^0$. Простыми вычислениями получаем, что этому случаю соответствует простое множество, составленное из векторов, соединяющих центр с вершинами правильных концентрических шестиугольников, отношение сторон которых $1 : \sqrt{3}$ и которые повёрнуты друг относительно друга на $30^0$. Из этого также вытеакет, что не простых согласованных множеств в этом случае нет. Таким образом, все согласованные множества исчерпываются множествами, изображёнными на рис. 1 — 3.

проверить, что множество $R = \{-2\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}, 2\vec{a}\}$ согласованное, и поэтому других согласованных множеств, содержащих более двух коллинеарных векторов, нет. Итак, согласованные множества $R$, составленные только из коллинеарных векторов, исчерпываются изображёнными на рис. 1.

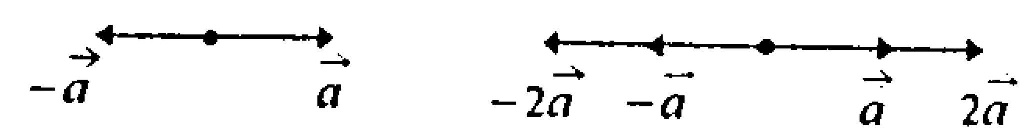
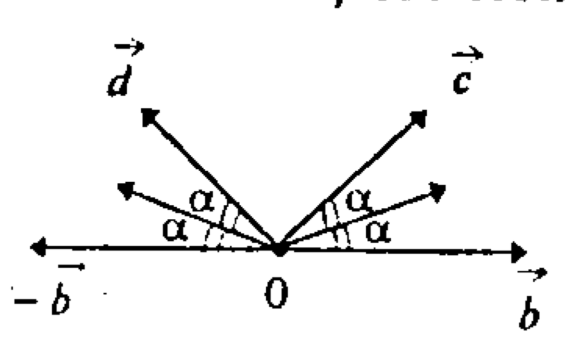



Рис. 1

Пусть согласованное множество $R$ содержит не коллинеарные векторы. Так как $\vec{a} \in R \Longrightarrow S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R \Longrightarrow -S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R$, а векторы $\vec{a} \in R$ и $-S_{\vec{b}}(\vec{a})$ симметричны относительно прямой, содержащей вектор $\vec{b}$, то множеству $R$ вместе с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$) принадлежит и вектор $T(\vec{a}|\vec{b})$, симметричный вектору $\vec{a}$ относительно прямой, содержащей вектор $\vec{b}$. Поэтому если $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha \neq 0$, то рассматривая векторы $\vec{a_1} = \vec{a}$, $\vec{a_2} = \vec{b}$, $\vec{a_3} = T(\vec{a_1}|\vec{a_2})$, $\vec{a_4} = T(\vec{a_2}|\vec{a_3})$, $\vec{a_5} = T(\vec{a_3}|\vec{a_4})$, ..., видим, что: i) все они принадлежат $R$; ii) угол $\angle(\vec{a_k}, \vec{a_{k+1}}) = \alpha$ и iii) $|\vec{a}| = |\vec{a_1}| = \ldots = |\vec{a_{2k+1}}| = \ldots$ и $|\vec{b}| = |\vec{a_2}| = |\vec{a_4}| = \ldots = |\vec{a_{2k}}| = \ldots$.

Покажем, что согласованное множество $R$ не может быть бесконечным. Если бы $R$ было бесконечно, то нашлись бы ненулевые векторы $\vec{a}, \vec{b} \in R$, для которых $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha < 30^0$. Обозначим $\vec{c} = T(\vec{b}|\vec{a})$ и $\vec{d} = T(-\vec{b}|S_{\vec{b}}(\vec{a}))$, т. е. $\vec{d} = S_{\vec{b}}(\vec{c})$ и $|\vec{d}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Так как $\angle(\vec{c}, \vec{d}) < 180^0$, то согласно неравенству треугольника $0 < |\vec{c} - \vec{d}| < |\vec{c}| + |\vec{d}| = 2|\vec{b}|$, а поскольку вектор $\vec{c} - \vec{d}$ должен быть согласно 2) кратен $\vec{b}$, то $\vec{c} - \vec{d} = \vec{b}$. Значит, векторы $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$ образуют равносторонний треугольник, и поэтому $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 60^0$, т. е. $4\alpha + 60^0 = 180^0$, откуда $\alpha = 30^0$. Противоречие. Итак, согласованное множество $R$ должно быть конечным.




Для удобства назовём вектор $\vec{a} \in R$ простым, если из коллинеарных ему векторов только ещё вектор $-\vec{a} \in R$. Если вектор $\vec{a} \in R$ не является простым, то, как следует из предыдущего, из коллинеарных этому вектору векторов множеству $R$, кроме вектора $-\vec{a} \in R$, принадлежит ещё либо только векторы $2\vec{a}$ и $-2\vec{a}$, либо только векторы $\vec{a}/2$ и $-\vec{a}/2$. Кроме того, если вектор $\vec{a} \in R$ не является простым, то для любого вектора $\vec{b} \in R$ не является простым и вектор $T(\vec{a}|\vec{b})$. Согласованное множество назовём простым, если все его векторы простые.

Так как согласованное множество $R$ конечно, то из множества углов, образованных его векторами, выберем наименьший положительный угол, который обозначим через $\alpha$. Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in R$ — те векторы, для которых $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$. Поскольку $\alpha$ — наименьший положительный угол между векторами из $R$, то вследствие ii) найдётся такое $n$, что $\vec{a_1} = \vec{a_n}$ и других векторов, не коллинеарных векторам $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$, множество $R$ не содержит. Без нарушения общности считаем, что $|\vec{a}| \leq |\vec{b}|$.

Поскольку $\alpha > \pi$, то согласно неравенству треугольника $|\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a})| < |\vec{a}| + |S_{\vec{b}}(\vec{a})| = |\vec{a}| + |\vec{a}| = 2|\vec{a}| \leq 2|\vec{b}|$. Поэтому либо а) вектор $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{0}$, либо б) вектор $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{b}$. В случае а) имеем: $\vec{a} = S_{\vec{b}}(\vec{a})$, т. е. $\alpha = 90^0$. Из рассуждений, проведённых для множеств $R$, состоящих только из коллинеарных векторов, тривиально вытекает, что



# РЕШЕНИЯ

## 8 класс

5. Ответ: 10.

Пусть $x$ школьников получили за данную задачу 1 балл, $y$ школьников – 2 балла (и столько же – 3 балла), $z$ школьников – 4 балла. Тогда всего в олимпиаде участвовало $x + 2y + z$ восьмиклассников и они вместе получили за задачу №5 $x + 5y + 4z$ баллов. Согласно условию $(x + 5y + 4z) - (x + 2y + z) = 30$, т.е. $3y + 3z = 30$. Поэтому число школьников, которые получили за эту задачу не менее трёх баллов, равно $y + z = 10$.

6. а) Так как для любого $x$ его дробная часть $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $0 \leq \{x\} < 1$, то неравенство $f(x) < 2$ выполнено для любых значений $x$ и, в частности, для $x < 0$.

Докажем требуемое неравенство для положительных $x$. Рассмотрим вначале случай $x \geq 1$. Положим $x = n + \alpha$, где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$. Тогда $\{x\} = \alpha$ и $\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{n+\alpha}$. Поэтому $f(x) = \alpha + \frac{1}{n+\alpha} \leq \alpha + \frac{1}{1+\alpha}$. Покажем, что $\alpha + \frac{1}{1+\alpha} < 1{,}5$ для любого $\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Действительно,

$$\alpha + \frac{1}{1+\alpha} < 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\alpha^2 + \alpha + 1) < 3(\alpha + 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 - \alpha - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - 1)(2\alpha + 1) < 0.$$

Последнее неравенство очевидно выполнено для любого $\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$.

Итак, требуемое неравенство доказано для $x \geq 1$. Остается заметить, что случай $0 < x < 1$ сводится к предыдущему с помощью замены $x = \frac{1}{y}$, поскольку

$$f(x) = \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{1}{y}\right\} + \{y\},$$

причём при $0 < x < 1$ имеем $y > 1$.

б) Из предыдущего доказательства следует, что для $n \geq 2$ такое $x_0$ может быть только отрицательным. Положим $x_0 = -\frac{m}{m^2+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{1}{x_0} = -m - \frac{1}{m}$. Поэтому $\{x_0\} = 1 - \frac{m}{m^2+1}$ и $\{\frac{1}{x_0}\} = 1 - \frac{1}{m}$. Следовательно

$$\{x_0\} + \{\frac{1}{x_0}\} = 2 - \frac{m}{m^2+1} - \frac{1}{m} > 2 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} > 2 - \frac{1}{n} \quad \forall m > 2n,$$

что и доказывает требуемое утверждение для любого $n \geq 1$.

7. *Первое решение.* Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, тогда $\overrightarrow{BA} = \vec{a} + \vec{b}$. Пусть $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{a} + \vec{b}|$, тогда $a < b < c$. Из условия следует, что

$$\overrightarrow{C_1B} = \frac{b-a}{a}\vec{a}, \ \overrightarrow{BC_2} = \frac{c-b}{c}(\vec{a} + \vec{b}), \ \overrightarrow{AB_2} = -\frac{b-a}{b}\vec{b}, \ \overrightarrow{B_1A} = \frac{c-a}{c}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Поэтому

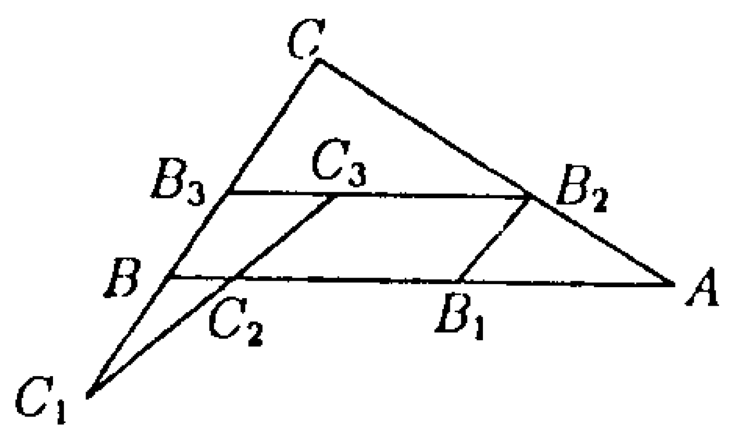
$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_2} = \frac{c-a}{c}\vec{a} + \left(\frac{c-a}{c} - \frac{b-a}{b}\right)\vec{b} = \frac{c-a}{c}\vec{a} + \frac{a(c-b)}{bc}\vec{b},$$

и

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BC_2} = \left(\frac{b-a}{a} - \frac{c-b}{c}\right)\vec{a} + \frac{c-b}{c}\vec{b} = \frac{b(c-a)}{ac}\vec{a} + \frac{c-b}{c}\vec{b}.$$

Очевидно, что $\frac{b}{a}\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{C_1C_2}$, т.е. векторы $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ коллинеарны, откуда и следует, требуемая параллельность прямых $B_1B_2$ и $C_1C_2$.

*Второе решение.* Проведём через точку $B_2$ прямую, параллельную $AB$, до её пересечения в точке $B_3$ со стороной $BC$; пусть $C_3$ — точка пересечения прямых $C_1C_2$ и $B_2B_3$. Для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что $B_1B_2C_3C_2$ — параллелограмм.




Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Тогда $a < b < c$ и $CB_2 = a$, $BB_1 = a$, $BC_2 = c - b$, $C_1B = b - a$, Так как $\Delta\, B_3CB_2 \sim \Delta\, BCA$, то $B_3B_2 = \frac{ac}{b}$, $B_3C = \frac{a^2}{b}$. Поэтому

$$BB_3 = a - B_3C = \frac{a(b-a)}{b}, \quad C_1B_3 = C_1B + BB_3 = \frac{(b-a)(b+a)}{b}.$$

Из подобия треугольников $C_1BC_2$ и $C_1B_3C_3$ следует

$$\frac{B_3C_3}{BC_2} = \frac{C_1B_3}{C_1B}, \quad \Longrightarrow \quad B_3C_3 = \frac{(b+a)(c-b)}{b},$$

откуда

$$B_2C_3 = B_2B_3 - B_3C_3 = \frac{ac}{b} - \frac{(c-b)(b+a)}{b} = a + b - c.$$

С другой стороны, $B_1C_2 = BB_1 - BC_2 = a - (c - b) = a + b - c$. Таким образом, $B_2C_3 = B_1C_2$ и так как по построению $B_2C_3 \parallel B_1C_2$, то $C_2C_3B_2B_1$ — параллелограмм, и, следовательно прямые $C_1C_2$ и $B_1B_2$ параллельны.

8. Ответ: можно.

Так как из каждой точки выходит 6 отрезков, то всего отрезков будет $7 \cdot 6/2 = 21$. Все они разбиваются на тройки отрезков, составляющих треугольники с вершинами в данных точках. Поэтому должно быть 7 треугольников разных цветов. Поскольку из каждой вершины выходит две стороны одного итого же треугольника, то из любой данной точки выходит по два отрезка каких-то трёх цветов. В-частности, каждая данная точка является вершиной ровно трёх треугольников. Поэтому для построения примера нужной раскраски

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | | | | |
| 2 | × | | | × | × | | |
| 3 | × | | | | | × | × |
| 4 | | × | | × | | × | |
| 5 | | × | | | × | | × |
| 6 | | | × | | × | × | |
| 7 | | | × | × | | | × |



*Первое решение.* Обозначим через $k(\vec{a};\vec{b})$ то целое число, для которого согласно условию 2) $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a}) = k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{b}$, или, равносильно, $S_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{a} - k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{b}$. Поскольку векторы $\vec{a}$ и $S_{\vec{b}}(\vec{a})$ имеют равную длину, то в силу свойств скалярного умножения

$$|\vec{a}|^2 = |S_{\vec{b}}(\vec{a})|^2 = \left(\vec{a} - k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - 2k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b} + k^2(\vec{a};\vec{b})\,|\vec{b}|^2,$$

или, сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем:

$$k^2(\vec{a};\vec{b})\,|\vec{b}|^2 - 2k(\vec{a};\vec{b})\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 0. \qquad (*)$$

В дальнейшем считаем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарными и не ортогональными. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не ортогональны, то $k(\vec{a};\vec{b}) \neq 0$. Поэтому из $(*)$ находим $k(\vec{a};\vec{b}) = 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$, т. е. $k(\vec{a};\vec{b}) = 2\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Точно так же получаем $k(\vec{b};\vec{a}) = 2\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\varphi$. Перемножив почленно два последних равенства, найдём

$$k(\vec{a};\vec{b})\,k(\vec{b};\vec{a}) = 4\cos^2\varphi. \qquad (**)$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и не ортогональны, то $|\cos\varphi|$ отличен от 0 и 1; поэтому $0 < \cos^2\varphi < 1$. Значит, поскольку число $4\cos^2\varphi$ должно быть целым (вследствие $(**)$ оно —произведение двух целых чисел), то $4\cos^2\varphi \in \{1,\ 2,\ 3\}$, т. е. в силу $(**)$ $k(\vec{a};\vec{b})\,k(\vec{b};\vec{a}) \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Следовательно, хотя бы один из сомножителей $k(\vec{a};\vec{b})$ или $k(\vec{b};\vec{a})$ должен быть равен 1 или $-1$.

Если $k(\vec{a};\vec{b}) = 1$, то $\vec{a} - \vec{b} = S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R$, а если $k(\vec{a};\vec{b}) = -1$, то $\vec{a} + \vec{b} = S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R$. Если же $k(\vec{b};\vec{a}) = 1$, то $\vec{a} - \vec{b} = -S_{\vec{a}}(\vec{b}) \in R$, а если $k(\vec{b};\vec{a}) = -1$, то $\vec{a} + \vec{b} = S_{\vec{a}}(\vec{b}) \in R$. Свойство а) доказано.

*Второе решение.* Докажем, что если векторы $\vec{a}, \vec{b} \in R$ и $0 < \angle(\vec{a}, \vec{b}) < \pi/2$, то $\vec{a} - \vec{b} \in R$ и $\vec{b} - \vec{a} \in R$.

Пусть без нарушения общности $|\vec{a}| \le |\vec{b}|$. Тогда, поскольку $\angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, согласно неравенству треугольника $\left|\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a})\right| < |\vec{a}| + \left|S_{\vec{b}}(\vec{a})\right| = |\vec{a}| + |\vec{a}| = 2\,|\vec{a}| \le 2\,\left|\vec{b}\right|$. Следовательно, поскольку вектор $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a})$ отличен от нулевого вектора и сонаправлен с вектором $\vec{b}$ (поскольку $\angle(\vec{a}, \vec{b}) < \pi/2$), а его длина — целое кратное вектора $\vec{b}$, то $\vec{a} - S_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{b}$. Поэтому $\vec{a} - \vec{b} = S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R$ и $\vec{b} - \vec{a} = -S_{\vec{b}}(\vec{a}) \in R$.

Если $\pi/2 < \angle(\vec{a}, \vec{b}) < \pi$, то $0 < \angle(\vec{a}, -\vec{b}) < \pi/2$. Поэтому вследствие доказанного $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - (-\vec{b}) \in R$ и $-\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{b} + \vec{a}) \in R$, т. е. $\vec{a} + \vec{b} \in R$. Свойство а) доказано.

б) Опишем все согласованные множества.

Если $\vec{a} \neq 0$, то легко проверить, что множество $R = \{-\vec{a},\, \vec{a},\, \}$ согласованное.

Пусть множество $R$ содержит по меньшей мере три (а тогда и четыре) вектора. Рассмотрим вначале случай, когда все векторы из $R$ коллинеарны. Если коллинеарные векторы $\vec{a}, \vec{b} \in R$ и $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$, то вследствие свойств 1) и 2) получаем: найдутся такие натуральные $k$ и $l$, что $2|\vec{a}| = k\,\vec{b}$ и $2|\vec{b}| = l\,\vec{a}$. Из этих равенств вытекает, что $kl = 4$. Поэтому либо $k = l = 2$ (что невозможно, поскольку тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, либо $k = 1$, $l = 4$ (или, симметрично, $l = 1$, $k = 4$). Значит, $|\vec{b}| = 2\,\vec{a}$ (или $|\vec{a}| = 2\,\vec{b}$). Легко

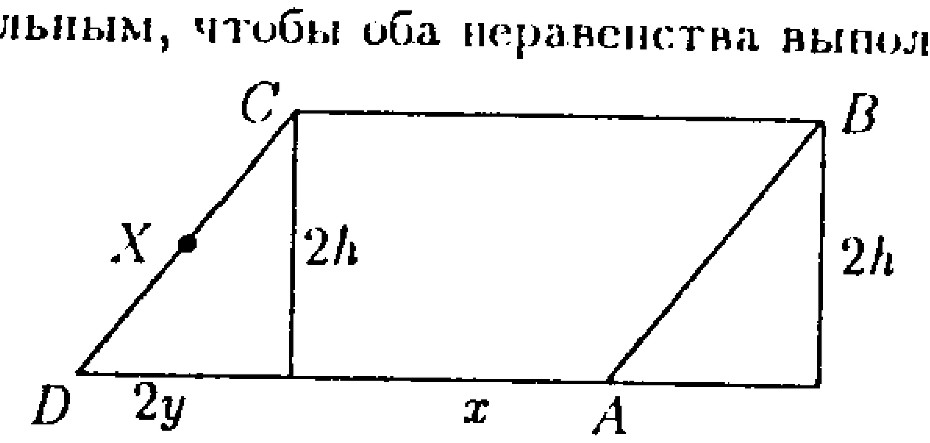
Аналогично, $XB^2 + XD^2 = \frac{1}{2}BD^2 + 2XO^2$. Осталось заметить, что $AC = BD$, так как диагонали прямоугольника равны. Лемма доказана.

Выберем теперь из всех отрезков наибольший; пусть это будет, например, $XA$. Тогда из равенства леммы следует, что среди трех отрезков $XA$, $XB$, $XD$ нет вырожденных (т.е. нулевой длины) и для них выполнено неравенство $XA^2 \le XB^2 + XD^2$. Поэтому $XA \le \sqrt{XB^2 + XD^2} < XB + XD$, т.е. из этих отрезков можно составить треугольник.

б) Выберем точку $X$ на середине стороны $DC$ параллелограмма $ABCD$, а положительные величины $x$, $y$, $h$ подберем так, чтобы из отрезков $XC$, $XD$, $XB$ и $XA$ нельзя было выбрать три, являющиеся сторонами треугольника (см. рис.). Для этого достаточно, чтобы $2XD = XC + XD < XA$ и $XD + XA < XB$, т.е. чтобы $x$, $y$, $h$ удовлеьворяли системе

$$2\sqrt{y^2 + h^2} < \sqrt{(x+y)^2 + h^2}, \qquad \sqrt{y^2 + h^2} + \sqrt{(x+y)^2 + h^2} < \sqrt{(x+3y)^2 + h^2}.$$

При $h = 0$ (вырожденный параллелограмм) первое неравенство даёт $y < x$, а второе выполняется автоматически. Поэтому можем взять $0 < y < x$ любыми, а $h$ настолько близким к нулю положительным, чтобы оба неравенства выполнялись.




Можно также просто положить $y = h = \frac{x}{2}$.

7. Ответ: $a = b = 1$.

Очевидно, что $a = b = 1$ — решение. Предположим, что $a > 1$, $b > 1$. Имеем $b^b = a^{(a^a)} > a^a$, откуда $b > a$. Тогда, учитывая равенство из условия, получаем

$$a^{a-1} < b < a^a . \qquad (*)$$

(Действительно, $a^{(a^a)}) = b^b > a^b$, откуда $a^a > b$; далее, $a^{(a^a)} = b^b < (a^a)^b = a^{ab}$, откуда $a^a < ab$, или $a^{a-1} < b$.)

Пусть теперь $p$ — произвольное простое, на которое делятся $a$ и $b$; пусть $a = p^s n, b = p^t m$, где $n$ и $m$ взаимно просты с $p$. Из равенства $(p^s n)^{(a^a)} = (p^t m)^b$ следует тогда, что $sa^a = tb$, и, ввиду неравенства $(*)$, $s < t < sa$. Итак, степень $t$ вхождения произвольного простого $p$ в $b$ меньше степени $sa$ вхождения $p$ в $a^a$. Поэтому $a^a$ делится на $b$, и $a^a > b$. Пусть $a^a = kb$, где $k > 1$. Тогда $b^b = a^{(a^a)} = a^{kb}$, откуда $b = a^k$. С учётом $(*)$ теперь получаем $a^{a-1} < a^k < a^a$, или $a - 1 < k < a$ — противоречие.

8. Ответ: б) Нет, не может. Двенадцать векторов.

а) Вначале заметим, что если $\vec{a} \in R$, то и $-\vec{a} \in R$. Для доказательства этого достаточно в условии 1) взять вектор $\vec{b}$ равным вектору $\vec{a}$.

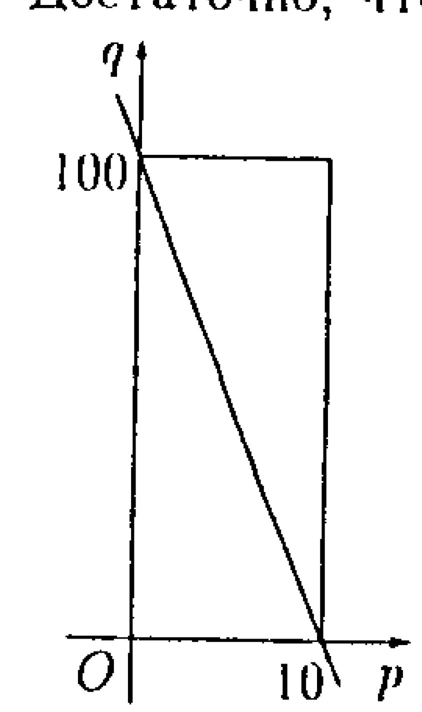


достаточно построить таблицу $7 \times 7$, отнеся каждой точке свой столбец, а треугольнику каждого цвета — свою строку. В каждой строке должны быть отмечены три клетки, соответствующие точкам, образующим треугольник (т.е. соединённым попарно отрезками одинакового цвета). При этом, т.к. любая точка является вершиной ровно трёх треугольников, в каждом столбце таблицы должно быть ровно три отмеченных клетки. Возможный пример такой таблицы указан на рисунке.

## 9 класс

5. Ответ: 450.

Достаточно, чтобы больший корень был меньше, либо равен 10, т.е. достаточно найти количество решений неравенства



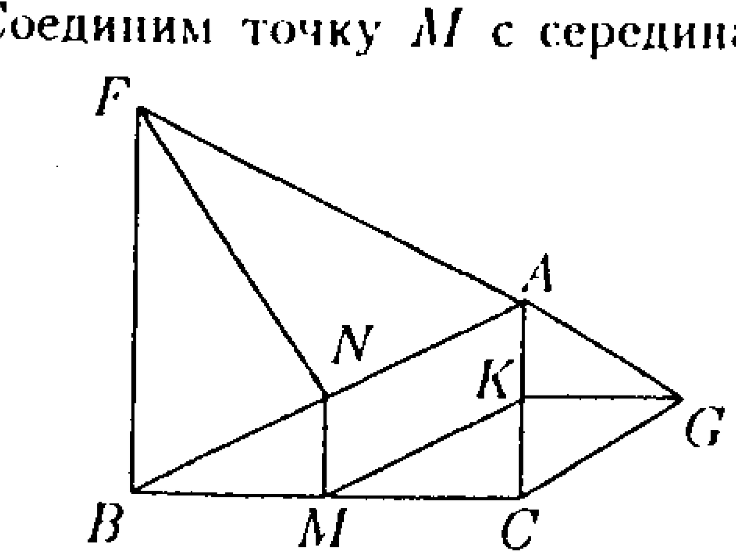

$$\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \le 10$$

в натуральных числах. Избавляясь от знака квадратного корня и упрощая, получим $q \le 100 - 10p$ (при дополнительном условии, что $p \le 20$, которое в данной ситуации будет автоматически выполняться, учитывая, что $p$ и $q$ — положительные целые).

Количество натуральных решений такого неравенства, очевидно, равно количеству натуральных точек (т.е. точек с натуральными координатами) на координатной плоскости $pOq$, расположенных в первой четверти и не выше прямой $q = 100 - 10p$. Эти точки расположены внутри прямоугольного треугольника с катетами 100 и 10 (см. рис.) и на его гипотенузе. На гипотенузе, легко видеть, 9 натуральных точек: $(1,90), (2,80), \ldots, (3,70)$. Внутри прямоугольника $100 \times 10$ расположены $99 \cdot 9 = 891$ точек. Поэтому внутри указанного треугольника $(891 - 9) : 2 = 441$ точек. Всего, добавляя точки на гипотенузе, получим 450 точек.

6. Ответ: $BC = 12$.

Соединим точку $M$ с серединами $N$ и $K$ гипотенузы $AB$ и катета $AC$ соответственно. Тогда $MN$ и $MK$ — средние линии треугольника $ABC$. Отсюда получаем, что $\angle FNM = 90^0 + \angle A = \angle GKM$. По теореме косинусов для треугольника $FNM$ имеем $11^2 = FN^2 + MN^2 - 2FN \cdot MN \cos \angle FNM$. Аналогично, по теореме косинусов для треугольника $GKM$, $7^2 = GK^2 + MK^2 - 2GK \cdot MK \cos \angle GKM$.




Учитывая, что $FN = \frac{\sqrt{3}}{2}BA$, $GK = \frac{\sqrt{3}}{2}CA$, $MN = \frac{1}{2}CA$, $MK = \frac{1}{2}BA$, эти равенства можем переписать в виде $11^2 = \frac{3}{4}BA^2 + \frac{1}{4}CA^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot BA \cdot CA \cos \angle FNM$, $7^2 = \frac{3}{4}CA^2 + \frac{1}{4}BA^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot BA \cos \angle GKM$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $72 = 11^2 - 7^2 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(BA^2 - CA^2) = \frac{1}{2}(BA^2 - CA^2) = \frac{1}{2}BC^2$, откуда $BC^2 = 144$ и, окончательно, $BC = 12$.

7. Ответ: выигрывает второй.

Заметим, что если имеются два каких-то столбца, в которых уже стоят фишки, причём в одной и той же строке, то нельзя ходить ни в какую из клеток этих столбцов, иначе следующим ходом противник может получить требуемый прямоугольник и тем самым выиграет. Поэтому для того, чтобы выиграть, второму игроку достаточно придерживаться следующей стратегии. Второй игрок ставит фишку в клетку той же строки (расположенную в полностью пустом столбце), в которую поставил свою фишку первый игрок последним ходом. Таким образом, после хода второго игрока первому игроку нельзя ходить в клетки занятых столбцов (т.е. таких столбцов, в которых есть хотя бы одна занятая клетка), в противном случае, как уже отмечалось, следующим ходом второй игрок выигрывает. Но, поскольку число столбцов чётное, то рано или поздно (после десяти ходов каждого пустые столбцы будут исчерпаны) первый игрок не сможет походить в незанятый столбец и поэтому проиграет.

8. *Первое решение.* Умножим данное равенство на $abcd$. Это равенство равносильно $(b-a)(c-b)(d-c)(a-d) = 0$ (в чём можно убедиться, если раскрыть скобки в выражении $(b-a)(c-b)(d-c)(a-d)$), и значит, не все числа $a$, $b$, $c$, $d$ различны.

*Второе решение.* Пусть

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \alpha\ ,$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} = \gamma\ ,$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} + \frac{ac}{bd} + \frac{bd}{ac} = \beta\ .$$

Тогда $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{a}$ - корни многочлена $f(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1$ . Согласно условию задачи $f(1) = 0$. Это значит, что среди дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{a}$ есть число 1, и поэтому не все числа $a$, $b$, $c$, $d$ различны, что и требовалось.



## 10 класс

5. Ответ: выигрывает первый.

Заметим, что если имеются два каких-то столбца, в которых уже стоят фишки, причём в одной и той же строке, то нельзя ходить ни в какую из клеток этих столбцов, иначе следующим ходом противник может получить требуемый прямоугольник и тем самым выиграет. То же самое верно, если поменять местами слова „столбец“ и „строка“. Будем называть такие столбцы (строчки) парными. Кроме того, будем называть столбец пустым, если в нем все клетки пустые, и — занятым, если есть хотя бы одна клетка, в которой стоит фишка. Аналогично определяем понятие пустой или занятой строки. Легко видеть также, что нельзя ходить в клетку, которая расположена на пересечении занятых строчки и столбца. Такие ходы, а также ходы на клетки парных строчек (столбцов), которые приносят победу сопернику, будем называть проигрышными.

Выигрышная стратегия для первого игрока — следующая. Первый ход он делает в любую клетку (вообще видно, что ничего не меняется, если в ходе игры переставлять местами строчки и столбцы, разумеется, сохраняя при этом расположение фишек на переставляемых линиях), например, в клетку первой строчки первого столбца. Таким образом, на доске останется чётное число (а именно, 24) пустых строчек и столько же пустых столбцов. Далее первый игрок отвечает на ход второго таким образом, чтобы после его хода на доске снова оставалось чётное число пустых строчек и чётное число пустых столбцов. Это значит, что если второй игрок походил в клетку на пересечении пустых строчки и столбца, то и первый игрок ходит в клетку на пересечении пустых строчки и столбца (легко видеть, что такая клетка при указанной стратегии всегда найдётся). Если же второй игрок походил в клетку занятого столбца и пустой (что обязательно, иначе - проигрыш) строчки, то первый игрок ходит в клетку этого же столбца и пустой строчки (опять же, ввиду условия чётности при указанной стратегии, это всегда возможно). Аналогично, если поменять местами слова „столбец“ и „строка“. Итак, на всякий непроигрышный ход второго игрока первый игрок может ответить непроигрышным ходом. Поскольку число ходов ограничено, то рано или поздно второй игрок будет вынужден сделать проигрышный ход и первый выиграет.

6. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

*Лемма.* Пусть $ABCD$ — прямоугольник, $X$ — произвольная точка. Тогда $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$. Пусть $O$ — центр прямоугольника. Тогда по теореме косинусов для треугольников $AOX$ и $COX$ имеем

$$XA^2 = AO^2 + XO^2 - 2AO \cdot XO \cdot \cos\angle AOX$$

и

$$XC^2 = CO^2 + XO^2 - 2CO \cdot XO \cdot \cos\angle COX.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\cos\angle COX = -\cos\angle AOX$, $AO = CO = \frac{1}{2}AC$, получим

$$XA^2 + XC^2 = 2AO^2 + 2XO^2 = \frac{1}{2}AC^2 + 2XO^2.$$