8.1. Действительные числа x, y и z удовлетворяют двойному равенству $(x-3)(y+3)=(y-3)(z+3)=-12$.

Найдите все возможные значения выражения $(x-1)(z+1)$.

Ответ: -4.

Из условия задачи следуют равенства $x-3=-\dfrac{12}{y+3}$ и $z+3=-\dfrac{12}{y-3}$. Поэтому, $x-1=2-\dfrac{12}{y+3}=\dfrac{2y-6}{y+3}$ и $z+1=-2-\dfrac{12}{y-3}=\dfrac{-2y-6}{y-3}$. Следовательно, $(x-1)(z+1)=\dfrac{2(y-3)}{y+3}\cdot\dfrac{-2(y+3)}{y-3}=-4$.

8.2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отметили точки K и L соответственно так, что $KL \parallel BC$. При этом оказалось, что $DK \parallel LB$. Известны длины оснований трапеции: $AD = 49$ и $BC = 9$.

Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $KL = 21$.

Продлим BL до пересечения прямой AD в точке B_1, а также продлим DK до пересечения с прямой BC в точке D_1. Получим, что $DB_1 = KL = D_1B$, так как DB_1LK и D_1BLK — параллелограммы.

Стороны угла BAB_1 пересечены параллельными прямыми DD_1 и B_1B. Поэтому по теореме о пропорциональных отрезках (обобщённой теореме Фалеса) верно равенство $\dfrac{DB_1}{AD} = \dfrac{BK}{AK}$. По этой же теореме $\dfrac{BK}{AK} = \dfrac{CL}{DL}$. Стороны угла DCD_1 пересечены параллельными прямыми, так что $\dfrac{CL}{DL} = \dfrac{CB}{BD_1}$.

Из полученных равенств вытекает, что $\dfrac{DB_1}{AD} = \dfrac{CB}{BD_1}$, или $\dfrac{KL}{AD} = \dfrac{CB}{KL}$, откуда $KL^2 = AD \cdot CB = 49 \cdot 9$. Поэтому $KL = 21$.

Замечание. Задачу можно решить намного проще, пользуясь понятием подобия трегугольников.

8.3. В каждой чёрной клетке шахматной доски сидит жук. Через каждую секунду каждый жук переползает в соседнюю по вершине (но не по стороне) клетку. В одной клетке могут находиться несколько жуков.

Какое наибольшее число жуков может через некоторое время оказаться в одной клетке?

Ответ: 16.

Перекрасим некоторые чёрные клетки в серый цвет так, чтобы для каждой чёрной клетки все соседние с ней (по вершине) клетки были серыми и наоборот, для каждой серой клетки все соседние с ней (по вершине) клетки были чёрными. Получится раскраска этих клеток, похожая на шахматную. При этом 16 чёрных клеток станут серыми и столько же останутся чёрными. Заметим, что через каждую секунду жук из чёрной клетки переползает на серую, а из серой — на чёрную. Поэтому через каждую секунду число жуков на серых клетках и число жуков на чёрных клетках остаются неизменными и равными 16. Следовательно, на любой клетке (чёрной или серой) может собраться не более 16 жуков. Соответствующий пример, показывающий, что это значение достигается, легко построить. Пусть все жуки переползают так, чтобы оказаться в нижней левой угловой клетке (в шахматной доске она чёрная), а каждый жук, оказавшийся в этой клетке, в следующую секунду переползает в единственную соседнюю с ним клетку.

8.4. На столе лежат 2020 фишек. За один ход разрешается выбрать две или три группы с одинаковым количеством фишек в них и объединить выбранные группы в одну (вначале есть 2020 групп по одной фишке).

Какое наименьшее количество групп можно получить, сделав несколько ходов?

Ответ: 3.

Заметим, что, при объединении двух или трёх групп в одну, количество фишек получается вдвое и, соответственно, втрое больше, чем было в каждой из них. Так как вначале в каждой группе было по одной фишке, то количество фишек в любой из групп всегда имеет вид 2^a3^b, где a и b — некоторые неотрицательные числа. Поскольку число 2020 не представимо в таком виде, то одну группу получить невозможно.

Предположим, что мы смогли получить две группы, тогда верно равенство $2^a3^b + 2^x3^y = 2020$. Число 2020 на 3 не делится, значит, по крайней мере одно из чисел b и y равно нулю. Не ограничивая общности, положим $y = 0$, тогда $2^a3^b + 2^x = 2020$. Число 2019 нечётно и не является степенью тройки, поэтому $x > 0$, откуда заключаем, что и $a > 0$. Разделив уравнение на 2, получим уравнение $2^{a-1}3^b + 2^{x-1} = 1010$. Аналогично, 1009 — не степень тройки, значит, a и x больше единицы и $2^{a-2}3^b + 2^{x-2} = 505$. Наконец, число $504 = 2^3 3^2 7$ не имеет вид $2^{a-2}3^b$, поэтому $x > 2$ и $a = 2$. Таким образом, мы пришли к равенству $3^b + 2^{x-2} = 505$, с неизвестными натуральными показателями b и $x - 2$. Заметим, что $2^9 = 512 > 505$, а при $x - 2 = 8$ число $505 - 2^{x-2} = 249$ не является степенью тройки. Если же $x - 2 < 8$, то число $505 - 2^{x-2}$ не меньше, чем $377 > 243 = 3^5$, однако, $3^6 > 505$. Следовательно, это уравнение не имеет решений.

Покажем, что три кучки получить можно. Для этого достаточно привести пример представления 2020 в виде суммы трёх чисел вида 2^a3^b. Например, подойдёт следующее равенство: $2020 = 1024 + 972 + 24 = 2^{10} + 2^2 \cdot 3^5 + 2^3 \cdot 3$.

9.1. В первой четверти координатной плоскости нарисован график функции $y = \dfrac{2}{x}$. На нём отмечены точки B_1, B_2 и B_3, сумма абсцисс которых равна 20, а сумма ординат равна 21. Точка A имеет координаты $(2; 2)$.

Найдите сумму $AB_1 + AB_2 + AB_3$.

Ответ: 35.

Докажем следующее утверждение: если $B(x_0; y_0)$ $(x_0, y_0 > 0)$ — произвольная точка графика $y = \dfrac{2}{x}$, то $AB = x_0 + y_0 - 2$.

Действительно, поскольку $x_0 y_0 = 2$, то можно записать равенства

$$\begin{aligned} AB^2 = &(x_0 - 2)^2 + (y_0 - 2) = x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 4y_0 + 8 = \\ = &x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 4y_0 + 4 + 2x_0 y_0 = (x_0 + y_0 - 2)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $AB = |x_0 + y_0 - 2|$. Так как числа x_0 и y_0 положительны, то $x_0 + y_0 - 2 \geqslant 2\sqrt{x_0 y_0} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 > 0$, значит, $AB = x_0 + y_0 - 2$.

Применив эту формулу три раза, получим ответ

$$\begin{aligned} AB_1 + AB_2 + AB_3 &= x_1 + y_1 - 2 + x_2 + y_2 - 2 + x_3 + y_3 - 2 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) - 6 = 20 + 21 - 6 = 35. \end{aligned}$$

9.2. Решите уравнение в действительных числах:

$$[x]\{x\} + 2x = \{x\} + 9.$$

(Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x, а через $\{x\}$ — его дробная часть; $\{x\} = x - [x]$.)

Ответ: 3.75; 4.2.

Учитывая, что $x = [x] + \{x\}$, перепишем уравнение из условия в виде

$$([x] + 1)(\{x\} + 2) = 11. \qquad (1)$$

Если выразить отсюда $\{x\}$, то получится, что $\{x\}$ — рациональное число.

Случай $\{x\} = 0$, очевидно, невозможен, иначе $([x]+1)\cdot 2 = 11$, но чётности частей этого равенства различны. Значит, можно записать $\{x\} = \dfrac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, причём $m < n$, поскольку $\{x\} < 1$.

Равенство (1) принимает вид $([x] + 1)(m + 2n) = 11n$. Так как числа m и n взаимно просты, то и числа $(m + 2n)$ и n взаимно просты, поэтому, 11 делится на $m + 2n$. Число 11 простое, значит, $m + 2n = 11$ и $[x] + 1 = n$. Первое из равенств возможно только в двух случаях: при $m = 1$, $n = 5$ и $m = 3$, $n = 4$. В первом случае $[x] = 4$ и решение имеет вид $x = 4\frac{1}{5} = 4.2$, а во-втором, $x = 3\frac{3}{4} = 3.75$.

9.3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отметили точки K и L соответственно так, что $KL \parallel AD$. Известно, что $AD = 9$, $BC = 4$ и $KL = 6$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке P, а отрезки AL и DK — в точке T.

Определите все возможные значения отношения, в котором отрезок KL может делить отрезок PT.

Ответ: $1 : 1$.

Докажем, что четырёхугольник $KPLT$ является параллелограммом, а значит, точка пересечения отрезков KL и PT делит отрезок PT в отношении $1 : 1$.

Отметим на основании AD такую точку E, что $AE = 4$. Так как $AE \parallel BC$ и $AE = BC$, то $ABCE$ — параллелограмм, а значит, $AB \parallel CE$. Пусть F — точка пересечения отрезков CE и KL. Так как $KF \parallel AE$ и $AK \parallel FE$, то $AKFE$ — параллелограмм, а значит, $KF = 4$. Следовательно, $FL = 2$. Так как $FL \parallel ED$, то

$$\frac{LD}{CL} = \frac{ED - FL}{FL} = \frac{3}{2}.$$

Треугольники ALD и KCL подобны, так как $\angle ADL = \angle KLC$ и

$$\frac{AD}{KL} = \frac{LD}{CL}.$$

Поэтому, $\angle CKL = \angle LAD = \angle KLA$. Следовательно, $CK \parallel AL$. Аналогичным образом доказывается, что $BL \parallel DK$. Таким образом, $KPLT$ — параллелограмм.

9.4. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. По окончании турнира выяснилось, что все команды набрали разные количества очков, а команда, занявшая последнее место, проиграла меньше матчей, чем команда-победитель турнира.

Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире? (В футболе команда, выигравшая матч, получает три очка, проигравшая — нуль, а в случае ничьи обе команды получают по одному очку.)

Ответ: 6 команд.

Покажем, что число участвующих команд не могло быть меньше шести. Пусть всего участвовало n команд.

Обозначим количество матчей, которые проиграла команда B, занявшая последнее место, через b. Через x_k обозначим количество очков, набранное командой, занявшей k-е место. Так как команда B не проиграла $n-1-b$ матчей, то она набрала $x_n \geqslant n-1-b$ очков. Поэтому $x_{n-1} \geqslant (n-1-b)+1$, $x_{n-2} \geqslant (n-1-b)+2$, $\ldots$, $x_1 \geqslant (n-1-b)+n-1$. С другой стороны, команда-победитель A проиграла по крайней мере $b+1$ матч, а тогда количество x_1 набранных ею очков не превосходит $3(n-2-b)$. Получаем двойное неравенство $3(n-2-b) \geqslant x_1 \geqslant (n-1-b)+n-1$, откуда $n \geqslant 4+2b$.

При $b \geqslant 1$ требуемое неравенство $n \geqslant 6$ уже доказано, поэтому рассмотрим случай $b=0$. Если B выиграла хотя бы один матч, то $x_n \geqslant n-1+2$, $x_{n-1} \geqslant n-1+3, \ldots, x_1 \geqslant n-1+n+1$ и верно неравенство $3(n-2) \geqslant x_1 \geqslant 2n$, откуда снова $n \geqslant 6$. Пусть теперь команда B сыграла все свои матчи вничью, в том числе, и с командой A. Тогда A выиграла не более $n-3$ матчей и набрала не более $x_1 \leqslant 3(n-3)+1 = 3n-8$ очков. С другой стороны, $x_n = n-1$ (у B ровно $n-1$ ничья), $x_{n-1} \geqslant n$, $\ldots$, $x_1 \geqslant 2n-2$. Таким образом, $3n-8 \geqslant x_1 \geqslant 2n-2$, откуда и в этот раз получаем, что $n \geqslant 6$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что команд могло быть шесть. Пронумеруем команды в порядке убывания набранных очков. Назовём последовательно результаты всех матчей. Пусть первая команда выиграла у второй, пятой и шестой, а остальные игры проиграла. Вторая команда выиграла у третьей и пятой и сыграла вничью с четвёртой и шестой. Третья команда выиграла у четвёртой, проиграла пятой и сыграла вничью с шестой. Четвёртая команда сыграла вничью с пятой и шестой. Наконец, пятая и шестая команды сыграли вничью. Нетрудно убедиться, что турнир с указанными результатами удовлетворяет условию задачи.

10.1. На координатной плоскости нарисован график функции $y = \dfrac{2}{x}$. В первой четверти координатной плоскости на нём отмечены точки A_1, A_2, $\ldots$, A_{20}, а в третьей — C_1, C_2, $\ldots$, C_{21}. Известно, что сумма абсцисс точек $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ равна модулю суммы ординат точек $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$, а сумма ординат точек $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ равна модулю суммы абсцисс точек $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$. Точка B имеет координаты $(-2; -2)$.

Найдите разность

$$(BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_{20}) - (BC_1 + BC_2 + \ldots + BC_{21}).$$

Ответ: 82.

Докажем следующее утверждение: если $A(x_0; y_0)$ $(x_0, y_0 > 0)$ — произвольная точка графика $y = \dfrac{2}{x}$, то $AB = x_0 + y_0 + 2$.

Действительно, поскольку $x_0 y_0 = 2$, то можно записать равенства

$$\begin{aligned} AB^2 = &(x_0 + 2)^2 + (y_0 + 2)^2 = x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 + 4y_0 + 8 = \\ = &x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 + 4y_0 + 4 + 2x_0 y_0 = (x_0 + y_0 + 2)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $AB = |x_0 + y_0 + 2|$.

Аналогично, если $C(u_0; v_0)$ $(u_0, v_0 < 0)$ — произвольная точка графика $y = \dfrac{2}{x}$, то $CB = -u_0 - v_0 - 2$.

Предыдущие вычисления показывают, что $CB = |u_0 + v_0 + 2|$. Заметим, что из равенства $|u_0| \cdot |v_0| = 2$ следует, что $|u_0| + |v_0| \geqslant 2\sqrt{|u_0| \cdot |v_0|} = 2\sqrt{2} > 2$. Значит, $CB = |u_0 + v_0 + 2| = -u_0 - v_0 - 2$.

Пусть точки A_1, A_2, $\ldots$, A_{20} имеют координаты $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, (x_{20}, y_{20}), а координаты точек $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$ равны $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_2)$, $\ldots$, (u_{21}, v_{21}). По условию верны равенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} = -(v_1 + v_2 + \ldots + v_{21})$ и $y_1 + y_2 + \ldots + y_{20} = -(u_1 + u_2 + \ldots + u_{21})$. Сложив эти равенства, получим

$$x_1 + \ldots + x_{20} + y_1 + \ldots + y_{20} = (-u_1 + \ldots + u_{21} + v_1 + \ldots + v_{21}). \qquad (1)$$

Используя доказанные утверждения выразим:

$$\begin{aligned} BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_{20} = &x_1 + y_1 + 2 + x_2 + y_2 + 2 + \ldots + x_{20} + y_{20} + 2 = \\ = &x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{20} + 40; \\ BC_1 + BC_2 + \ldots + BC_{21} = &- u_1 - v_1 - 2 - u_2 - v_2 - 2 - \ldots - u_{21} - v_{21} - 2 = \\ = &(-u_1 + u_2 + \ldots + u_{21} + v_1 + v_2 + \ldots + v_{21}) - 42. \end{aligned}$$

С учётом равенства (1), искомая разность $(BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_{20}) - (BC_1 + BC_2 + \ldots + BC_{21})$ равна $40 - (-42) = 82$.

10.2. Решите уравнение $8x^2 - 67 = 3^y - 2^z$ в натуральных числах x, y, z.

Ответ: $x = 3$, $y = z = 2$.

Запишем уравнение из условия в виде

$$2^z + 8x^2 = 3^y + 67.$$

Если число y нечётно, то 3^y даёт остаток 3 при делении на 8, а вся правая часть даёт тот же остаток, что и число $3+67 = 70$, т. е. 6. Однако левая часть $2^z + 8x^2$ при делении на 8 может давать только остатки 2, 4 и 6, следовательно, y нечётно.

Тогда 3^y даёт остаток 1 при делении на 8, а вся правая часть — тот же остаток, что $1+67 = 68$, т. е. 4. Число 2^z+8x^2 при делении на 8 может остаток 4 только при $z = 2$. Поэтому уравнение принимает вид $8x^2 = 3^y + 63$. Правая часть этого уравнения делится на 9, значит, x кратно трём и можно записать $x = 3x_1$. В этих обозначениях получаем равенство $8x_1^2 = 3^{y-2} + 7$. При $y = 2$ получаем решение $z = 2$, $x = 3$, $y = 2$. Если же $y > 2$, то число $3y^2 + 7$ даёт остаток 1 при делении на 3, в то время, как $8x_1^2$, как нетрудно убедиться, может давать только остатки 0 и 2 при делении на 3. Следовательно, тройка $x = 3$, $y = z = 2$ — единственное решение исходного уравнения.

10.3. Саша и Влад играют в игру на координатной плоскости. Вначале Саша отмечает любые три целочисленные точки (т. е. точки, у которых обе координаты — целые числа). После этого ходит Влад. За ход Влад выбирает две из трёх имеющихся точек и поворачивает одну из них вокруг другой на 90° в произвольном направлении. Влад выиграет, если ему удастся за несколько ходов добиться того, что какие-то две из трёх точек совпадут. Если же Влад не сможет этого сделать, то побеждает Саша.

Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему выиграть независимо от действий другого?

Ответ: Влад.

Покажем, что, какие бы три целочисленные точки Саша ни выбрал, Влад может добиться того, что после нескольких ходов две из трёх точек совпадут.

Заметим, что после каждого хода Влада все три отмеченные точки остаются целочисленными. Следовательно, сумма S квадратов отрезков, соединяющих эти точки, также всегда является целым числом. Покажем, что, если все три точки различны, то Влад может уменьшить S своим ходом.

Обозначим отмеченные точки буквами A, B и C так, чтобы угол $\angle BAC$ находился в промежутке $[45^\circ; 180^\circ]$, для этого достаточно обозначить за A вершину, при которой угол в треугольнике ABC максимален, а, если точки лежат на одно прямой, то обозначить за A точку, находящуюся между двумя другими. Повернём точку вокруг A вовнутрь треугольника ABC (в случае $\angle BAC$ повернём в произвольном направлении), и получим точку D. Тогда расстояния AB и AD равны AB и AC соответственно. Третье же расстояние между точками уменьшится, так как

$$\begin{aligned} BD^2 =& AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC - 90^\circ) < \\ <& AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2, \end{aligned}$$

поскольку $\cos(\angle BAC - 90^\circ) > \cos \angle BAC$. Следовательно, сумма S квадратов попарных расстояний между точками, действительно, уменьшилась.

Сумма S является неотрицательными целым числом и бесконечно уменьшаться не сможет, значит, Влад всегда сможет добиться того, что две из трёх точек совпадут.

10.4. Внутри равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что площадь треугольника ABC равна

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(AD^2+BD^2+CD^2)+\frac{3}{4}AD\cdot BD.$$

Найдите угол ADB.

Ответ: 150°.

Повернём треугольник ADC вокруг точки C на 60° так, чтобы точка A перешла в точку B. Образ точки D при этом повороте обозначим через D'. Четырёхугольник $CDBD'$ составлен из треугольников CBD и CBD', причём второй равен треугольнику CAD, поэтому $S_{CDBD'}=S_{CAD}+S_{CBD}$. С другой стороны, $CDBD'$ составлен из равностороннего треугольника CDD' и треугольника BDD'. Стороны треугольника BDD' равны отрезкам AD, BD и CD соответственно. Обозначим через S' площадь такого треугольника. Выразим площадь $CDBD'$ двумя способами: $S_{CAD}+S_{CBD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}CD^2+S'$.

Аналогично сделаем повороты вокруг вершин A и C, запишем соответствующие равенства и сложим их. В результате получим равенство

$$S_{CAD}+S_{CBD}+S_{CBD}+S_{BAD}+S_{BAD}+S_{CAD}=\frac{\sqrt{3}}{4}(CD^2+CB^2+CA^2)+3S'.$$

Левая часть этого равенства равна $2S$, а площадь S', очевидно, не превышает $\dfrac{1}{2}AD\cdot BD$. Значит, верно неравенство

$$2S\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(AD^2+BD^2+CD^2)+\frac{3}{2}AD\cdot BD.$$

В условии дано, что это неравенство является равенством. Следовательно, равенством является и неравенство $S'\leqslant\frac{1}{2}AD\cdot BD$, использованное при его доказательстве. Это возможно только, если в треугольнике BDD' выполнено равенство $\angle DBD'=90^\circ$. Заметим, что $\angle DBD'=\angle DBC+\angle CDD'$, где углы $\angle DBC$ и $\angle CDD'$ дополняют углы $\angle DAB$ и $\angle DBA$ до 60°. Следовательно, $\angle DAB+\angle DBA=120^\circ-90^\circ=30^\circ$ и $\angle ADB=150^\circ$.

11.1. Окружность пересекает параболу $y = x^2$ в трёх точках: A, B и C, причём в точке C касательные к этим параболе и окружности совпали. Проекция отрезка AB на ось абсцисс равна 2.

Найдите величину угла ACB.

Ответ: 90°.

Пусть точки A, B и C имеют координаты $(a; a^2)$, (b, b^2) и (c, c^2) соответственно, а уравнение описанной окружности треугольника ABC имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0^2) = R^2$, где $(x_0; y_0)$ — координаты центра, а R — радиус этой окружности. Абсциссы общих точек этой окружности и параболы $y = x^2$ являются решениями уравнения $(x - x_0)^2 + (x^2 - y_0^2) = R^2$. Раскроем скобки и приведём подобные члены:

$$x^4 + (1 - 2y_0)x^2 - 2x_0 x + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0. \qquad (1)$$

Три из четырёх корней многочлена в левой части равенства по условию (1) равны a, b и c, так как окружность и парабола пересекаются в точках A, B и C. А поскольку в точке C совпали касательные к параболе и окружности, то абсцисса точки C является корнем многочлена из левой части (1) кратности по крайней мере 2. Значит, с учётом кратности, все корни этого многочлена равны a, b, c и c.

По теореме Виета коэффициент при x^3 равен минус сумме корней, следовательно, верно равенство $a + b + 2c = 0$. Не ограничивая общности, положим $b > a$, тогда по условию $b - a = 2$. Запишем эти равенства в виде $(c + b) + (c + a) = 0$ и $(c + b) - (c + a) = 2$. Нетрудно видеть, что они равносильны паре равенств $c + b = 1$ и $c + a = -1$.

Координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ равны $(c - a; c^2 - a^2)$ и $(c - b; c^2 - b^2)$. Запишем их скалярное произведение:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =&(c - a)(c - b) + (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = \\ =&(c - a)(c - b)(1 + (c + a)(c + b)) = (c - a)(c - b)(1 - 1 \cdot 1) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, эти векторы перпендикулярны, поэтому $\angle BCA = 90^\circ$.

11.2. Найдите все натуральные числа a, b и c, для которых выполнено равенство

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

Ответ: $a = 2$, $b = 6$, $c = 2$.

Рассмотрим два случая в зависимости от чётности числа c.

Случай 1: c чётно. Тогда $3^c \equiv 1 \mod 8$, и из условия вытекает, что

$$2^a + 2b^2 \equiv 68 \equiv 4 \mod 8.$$

Рассмотрим чётность числа b.

а) Если число b нечётно, то $2b^2 \equiv 2 \mod 8$, откуда $2^a \equiv 2 \mod 8$, т. е. $a = 1$. Уравнение примет вид $2b^2 = 3^c + 65$. Отсюда, во-первых, b не кратно 5, а в-вторых, $2b^2 \equiv 3^c \mod 5$. Заметим, что это невозможно, поскольку $2b^2 \equiv \pm 2 \mod 5$, а $3^c \equiv \pm 1 \mod 5$ при чётных c.

б) Если число b чётно, то $2b^2 \equiv 0 \mod 8$, и тогда $2^a \equiv 4 \mod 8$, т. е. $a = 2$. Уравнение примет вид $2b^2 = 3^c + 63$. Очевидно, что b кратно 3 и можно записать $b = 3b_1$. В этих обозначениях получаем равенство $2b_1^2 = 3^{c-2} + 7$. При $c = 2$ получаем решение $a = 2$, $b = 6$, $c = 2$. Если же $c > 2$, то число $3^{c-2} + 7$ даёт остаток 1 при делении на 3, в то время, как $2b_1^2$, как нетрудно убедиться, может давать только остатки 0 и 2 при делении на 3. Следовательно, в первом случае других решений нет.

Случай 2: c нечётно. Тогда $3^c \equiv 3 \mod 8$, поэтому

$$2^a + 2b^2 \equiv 70 \equiv 6 \mod 8.$$

Рассмотрим чётность числа b.

а) Если число b чётно, то $2b^2 \equiv 0 \mod 8$, откуда $2^a \equiv 6 \mod 8$, что, очевидно, невозможно.

б) Если число b нечётно, то $2b^2 \equiv 2 \mod 8$, откуда $2^a \equiv 4 \mod 8$. Тогда $a = 2$ и уравнение примет вид $2b^2 = 3^c + 63$. Аналогично случаю 1б) можно обозначить $b = 3b_1$ и получить уравнение $2b_1^2 = 3^{c-2} + 7$, в котором $c - 2 \geqslant 1$. Но это значит, что $2b_1^2 \equiv 7 \mod 3$, что невозможно, поскольку удвоенные квадраты натуральных чисел не могут давать остаток 1 при делении на 3.

11.3. На высоте AH остроугольного треугольника ABC выбрана точка X. Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1, соответственно. Точка P — основание высоты, опущенной из вершины B на прямую HC_1, а точка Q — основание высоты, опущенной из вершины C на прямую HB_1.

Докажите, что описанная окружность треугольника PQH проходит через середину стороны BC.

Решение. Докажем два вспомогательных утверждения.

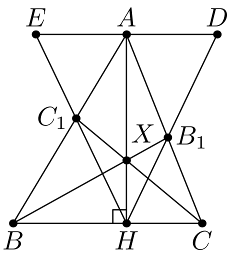

Рис. 1

Лемма 1. *На высоте AH выбрана точка X. Если прямые BX и CX пересекают соответственно стороны AC и AB в точках B_1 и C_1, то $\angle AHB_1 = \angle AHC_1$.*

Доказательство. Проведём через вершину A прямую ℓ параллельную стороне BC. Через D и E обозначим точки пересечения прямой ℓ с прямыми HB_1 и HC_1, соответственно. Докажем равенство $AD = AE$. Треугольники AB_1D и CB_1H подобны. Следовательно, $AD = \dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot CH$. Аналогично, $AE = \dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot BH$. Из теоремы Чевы для треугольника ABC следует, что $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CH}{HB} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$. Поэтому, $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CH}{BH} \cdot \dfrac{C_1B}{AC_1} = 1$. В треугольнике HDE отрезок HA является высотой и медианой. Следовательно, треугольник HDE равнобедренный и AH — биссектриса угла DHE.

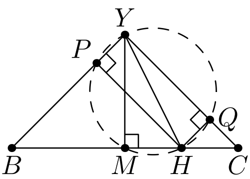

Рис. 2

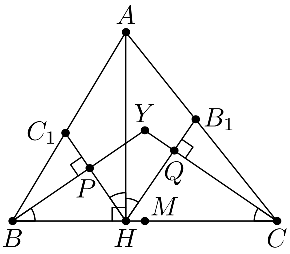

Рис. 3

Лемма 2. *На основании BC равнобедренного треугольника YBC отмечена точка H. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из H на прямые YB и YC, соответственно. Тогда описанная окружность треугольника PQH проходит через вершину Y и середину стороны BC.*

Доказательство. Пусть M — середина отрезка BC (см. рис. 2). Тогда

$$\angle YMH = \angle YPH = \angle YQH = 90^\circ.$$

Следовательно, точки M, P и Q лежат на окружности с диаметром YH.

Перейдём к решению задачи. Пусть Y — точка пересечения прямых BP и CQ (см. рис. 3). Из леммы 1 следует, что $\angle AHB_1 = \angle AHC_1$, а значит,

$$\angle BHP = 90^\circ - \angle AHC_1 = 90^\circ - \angle AHB_1 = \angle CHQ.$$

Поэтому, $\angle YBC = 90^\circ - \angle BHP = 90^\circ - \angle CHQ = \angle YCB$, т.е. треугольник YBC равнобедренный. Утверждение задачи следует из леммы 2.

11.4. В группе из 2020 человек каждый послал по одной открытке каждому своему знакомому из этой группы. Оказалось, что каждый человек получил не более трёх открыток и для каждого человека все его знакомые получили различные количества открыток.

Найдите максимально возможное количество посланных открыток.

Ответ: 4038 открыток.

Из условия следует, что у каждого человека не более трёх знакомых. Рассмотрим три подмножества A, B и C, состоящих из тех людей, у которых количество знакомых ровно 3, 2 и 1, соответственно. Тогда, очевидно, $|A| + |B| + |C| \leqslant 2020$, а общее количество посланных открыток равно $3|A| + 2|B| + |C|$. (Напомним, что через $|X|$ обозначается количество элементов в конечном множестве X.)

Докажем неравенства $|A| \leqslant |B| \leqslant |C|$. Каждый человек a из A знаком с человеком b из B. При этом у человека b нет второго знакомого a' из A, отличного от a. Следовательно, $|A| \leqslant |B|$.

Рассмотрим произвольного человека b из B. Либо b напрямую знаком с человеком из C, либо b знаком с некоторым человеком из A, который, очевидно, знаком с человеком из C. Следовательно, мы можем сопоставить каждому b из B некоторого c из C, при этом разным людям из B сопоставляются разные люди из C. Следовательно, $|B| \leqslant |C|$. Поэтому, $3|A| \leqslant |A| + |B| + |C| \leqslant 2020$, а значит, $|A| \leqslant 673$. Более того, $|A| + 2|B| \leqslant |A| + |B| + |C| \leqslant 2020$.

Подмножество A состоит из чётного числа элементов, так как всех людей из A можно разбить на пары знакомых. Следовательно, $|A| \leqslant 672$. Оценим сверху величину $3|A| + 2|B| + |C|$. Имеем

$$3|A| + 2|B| + |C| = 3|A|/2 + (|A| + 2|B|)/2 + (|A| + |B| + |C|) \leqslant$$
$$\leqslant 3 \cdot 672/2 + 1010 + 2020 = 4038.$$

Приведём пример того, что указанная оценка посланных открыток действительно достигается. Предположим, что первоначально все люди не знакомы между собой. Выберем четырёх человек b, c и b', c'. Познакомим b и c, b' и c', а также b и b'. Остальных 2016 человек разобьём на 336 подгрупп по 6 человек. Пусть a_i, b_i, c_i и a_i', b_i', c_i' люди из i-ой группы. Познакомим a_i с b_i, c_i, а человека a_i' с b_i', c_i'. Более того, познакомим a_i и a_i', а также b_i и b_i'. Несложно видеть, что для того способа выполнено условие задачи и справедливы равенства

$$a = 2 \cdot 336 = 672, \quad b = c = 2 \cdot 336 + 2 = 674.$$

Следовательно, общее количество посланных открыток равно

$$3 \cdot 672 + 2 \cdot 674 + 674 = 4038.$$