8.5. Решите уравнение $4k! + 1 = (2n! + 1)^2$ в натуральных числах k и n.

Ответ: $k = 2$, $n = 1$ или $k = 3$, $n = 2$.

Преобразуем уравнение из условия к виду

$$k! = n!(n! + 1).$$

Очевидно, что $k > n$. Сократим обе части на $n!$ и получим равенство $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) = (n!+1)$. В левой части этого равенства присутствуют $k-n$ множителей, являющихся последовательными натуральными числами. Поэтому при $k - n \geqslant 3$ левая чать делится на 3. Правая же часть делится на 3 лишь при $n = 2$. Если $n = 2$, то $k! = 6$ и, соответственно, $k = 3$, что даёт нам одно решение. Предположим, что $n \neq 3$. Тогда $k - n \leqslant 2$ и возможны следующие два варианта.

Если $k-n = 1$, то $n+1 = n!+1$, откуда $n! = n$, что верно лишь при $n = 1$. В этом случае $k! = 2$, и, соответственно, $k = 2$, что даёт нам второе решение.

Если же $k - n = 2$, то $(n + 2)(n + 1) = n! + 1$, или $n^2 + 3n + 1 = n!$. Следовательно, число 1 кратно n т. е. $n = 1$, что не подходит в последнее равенство.

8.6. На клетчатую доску размера 8×8 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 11.

Разобьём всю доску на 16 квадратов 2×2. Нетрудно видеть, что уголки должны накрывать по крайней мере две клетки каждого такого квадратика. Следовательно, по крайней мере 32 клетки доски покрыты уголками, что означает, что уголков должно быть не меньше 11.

Приведём пример, показывающий, что 11 уголков можно разместить так, чтобы больше ни одного нельзя было выложить. Для удобства воспользуемся шахматной нотацией клеток. Разместим 5 уголков вида  так, чтобы их угловыми клетками были $a2$, $c2$, $e2$, $g2$ и $d4$. Ещё 4 уголка вида  выложим так, чтобы их угловыми клетками были $a7$, $c7$, $e7$ и $g2$. Наконец, расположим 2 уголка вида  с угловыми клетками $b5$ и $g5$.

8.7. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC тупой. Из точки A опустили перпендикуляр AH на прямую CD, а из точки C опустили перпендикуляр CE на прямую AD. Прямые AH и CE пересекаются в точке K.

Докажите, что прямые HE и BK перпендикулярны.

Решение. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если в треугольнике ABC опущены высоты AA_1 и BB_1, то $\angle CAB = \angle CA_1B_1$.*

Доказательство приведём для остроугольного треугольника ABC (случаи прямоугольного и тупоугольного треугольников рассматриваются аналогично). Для удобства обозначим $\angle A = \angle CAB$ и $\angle B = \angle ABC$. Пусть M — середина стороны AB. Так как длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы, то $AM = MB_1 = MA_1 = MB$. Следовательно, треугольники MB_1A, MA_1B_1 и MBA_1 равнобедренные. Поэтому, $\angle AMB_1 = 180° - 2\angle A$ и $\angle A_1MB = 180° - 2\angle B$, а значит, $\angle B_1MA_1 = 2(\angle A + \angle B) - 180°$ и

$$\angle MA_1B_1 = \frac{180° - \angle B_1MA_1}{2} = 180° - \angle A - \angle B.$$

Таким образом, $\angle CA_1B_1 = 180° - (\angle MA_1B_1 + \angle B) = \angle A$. Лемма доказана.

Пусть P — точка пересечения прямых AH и BC, а Q — точка пересечения прямых CE и AB. Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $PQ \parallel HE$ и $PQ \perp BK$. Так как $AB \parallel CD$, то $QA \perp PK$. Аналогично, $PC \perp QK$. Следовательно, B – точка пересечения высот в треугольнике KQP, а значит, $PQ \perp BK$. Прямые AE и CH – высоты в треугольнике AKC. Согласно лемме $\angle QPK = \angle ACK = \angle EHK$. Поэтому, $PQ \parallel HE$.

8.8. Назовём разбиение множества чисел 1, 2, …, $3n$ на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), …, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если справедливы равенства

$$a_1 = b_1 + 2c_1 - 1, \quad a_2 = b_2 + 2c_2 - 1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n + 2c_n - 1.$$

Найдите все хорошие разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2n + k, 2n - k + 1, k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Обозначим $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ и $C = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. Сложив равенства из условия задачи, получим $A = B + 2C - n$. Справедливы неравенства

$$A \leqslant (2n+1) + (2n+2) + \ldots + 3n = \frac{n(5n+1)}{2},$$
$$B + C \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n+1),$$
$$C \geqslant 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Поэтому, $\dfrac{n(5n+1)}{2} \geqslant A = (B + C) + C - n \geqslant n(n+2) + \dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{n(5n+1)}{2}$. Следовательно, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{2n+1, 2n+2, \ldots, 3n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ и $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Без нарушения общности будем считать, что $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, …, $c_n = n$. Для произвольного индекса k от 1 до n верно равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + 2(c_1 + c_2 + \ldots + c_k) - k.$$

С одной стороны, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant (2n+1) + (2n+2) + \ldots + (2n+k) = 2nk + \dfrac{k(k+1)}{2}$. А с другой стороны, $b_1 + b_2 + \ldots + b_k \leqslant 2n + (2n-1) + \ldots + (2n-k+1) = 2nk - \dfrac{k(k-1)}{2}$ и $c_1 + c_2 + \ldots + c_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Так как

$$2nk + \frac{k(k+1)}{2} = 2nk - \frac{k(k-1)}{2} + 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k,$$

то $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{2n+1, 2n+2, \ldots, 2n+k\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \{2n, 2n-1, \ldots, 2n-k+1\}$. Следовательно, $a_k = 2n + k$ и $b_k = 2n - k + 1$.

9.5. Центром тяжести многоугольника, нарисованного на координатной плоскости, называется точка, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин многоугольника.

Можно ли на координатной плоскости нарисовать два одинаковых многоугольника, у которых нет общих точек, но совпадают центры тяжести?

Ответ: Да, можно.

Аналогично понятию центра многоугольника центром конечного набора точек, отмеченных на координатной плоскости, будем называть точку, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат точек набора.

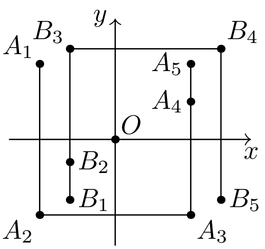


Рис. 1

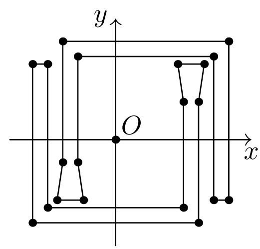


Рис. 2

Процедурой “раздвоения” произвольной точки P будем называть замену точки P на такие две точки P_1 и P_2, что середина отрезка P_1P_2 совпадает с P. Другими словами, точка $P(x, y)$ заменяется на точки $P_1(x+\delta_x, y+\delta_y)$ и $P_2(x-\delta_x, y-\delta_y)$, где δ_x и δ_y — произвольные действительные числа. Несложно видеть, что если каждую точку конечного набора точек “раздвоить”, то центры исходного набора точек и полученного совпадут.

Рассмотрим две четырёхзвенных ломаных с вершинами

$$A_1(-10, 10), \quad A_2(-10, -10), \quad A_3(10, -10), \quad A_4(10, 5), \quad A_5(10, 10) \quad \text{и}$$
$$B_1(-6, -8), \quad B_2(-6, -3), \quad B_3(-6, 12), \quad B_4(14, 12), \quad B_5(14, -8),$$

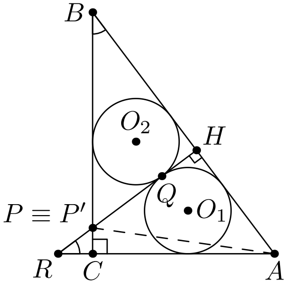
соответственно (см. рис. 1). Непосредственные вычисления показывают, что центры двух ломанных совпадают с одной и той же точкой $(2, 1)$. Наконец, чтобы из ломаных получить многоугольники, обладающие требуемым в условии свойством, “раздвоим” соответствующим образом каждую из вершин ломанных (см. рис. 2).

9.6. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C построили две окружности равного радиуса так, что они: касаются друг друга в точке Q, касаются гипотенузы AB, а также, одна из них касается катета AC, а другая — катета BC. На катете BC отметили точку P, для которой $\angle PAB = 45°$.

Найдите угол между прямой PQ и гипотенузой AB.

Ответ: $90°$.

Пусть O_1 — центр той окружности из условия задачи, которая касается катета AC, а O_2 — центр второй окружности, касающейся катета BC.



Проведём через точку Q прямую ℓ перпендикулярно гипотенузе AB. Пусть H, P' и R — точки пересечения прямой ℓ с прямыми AB, BC и AC, соответственно. Так как центры O_1 и O_2 равноудалены от гипотенузы AB, то $O_1O_2 \parallel AB$. Поэтому, $\ell \perp O_1O_2$ и прямая ℓ касается окружностей из условия задачи. Так как $\angle HRA = 90° - \angle CAB = \angle ABC$, то прямоугольные треугольники HAR и $HP'B$ подобны, а значит, они равны, так равны вписанные окружности этих треугольников. Следовательно, $AH = P'H$. Таким образом, прямоугольный треугольник HAP' равнобедренный. Поэтому, $\angle HAP' = 45°$, а значит, точка P' совпадает с точкой P и искомый угол равен $90°$.

9.7. Назовём разбиение множества чисел 2^0, 2^1, $\ldots$, 2^{3n-1} на тройки (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, (a_n, b_n, c_n) *хорошим*, если каждый из квадратных трёхчленов

$$a_1^2x^2 + b_1x + c_1^4, \quad a_2^2x^2 + b_2x + c_2^4, \quad \ldots, \quad a_n^2x^2 + b_nx + c_n^4$$

имеет хотя бы один действительный корень.

Найдите все хороших разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

Ответ: Существует единственное хорошее разбиение, состоящее из троек $(2^{2n-k}, 2^{2n+k-1}, 2^{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Рассмотрим какое-либо хорошее разбиение (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), $\ldots$, $(a_n$, b_n, $c_n)$. Пусть $a_k = 2^{\alpha_k}$, $b_k = 2^{\beta_k}$ и $c_k = 2^{\gamma_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Так как квадратный трёхчлен $a_k^2x^2 + b_kx + c_k^4$ имеет хотя бы один действительный корень, то его дискриминант неотрицательный:

$$D_k = b_k^2 - 4a_k^2c_k^4 = 2^{2\beta_k} - 2^{2\alpha_k + 4\gamma_k + 2} \geqslant 0 \quad \text{т.е.} \quad \beta_k \geqslant \alpha_k + 2\gamma_k + 1.$$

Обозначим $A = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $B = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ и $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$. Тогда $B \geqslant A + 2C + n$. Справедливы неравенства

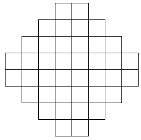
$$B \leqslant 2n + (2n+1) + \ldots + (3n-1) = 2n^2 + \frac{n(n-1)}{2},$$
$$A + C \geqslant 0 + 1 + \ldots + 2n - 1 = n(2n-1),$$
$$C \geqslant 0 + 1 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

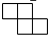
Так как $n(2n-1) + n(n-1)/2 + n = 2n^2 + n(n-1)/2$, то

$$B \geqslant A + 2C + n = (A + C) + C + n \geqslant 2n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \geqslant B.$$

Следовательно, $B = A + 2C + n$. Поэтому, $\beta_k = \alpha_k + 2\gamma_k + 1$ при всех k от 1 до n. Так как $(\beta_k + 1) = (\alpha_k + 1) + 2(\gamma_k + 1) - 1$, то из задачи **8.7** следует, что $\beta_k = 2n + k - 1$, $\alpha_k = 2n - k$ и $\gamma_k = k - 1$. Поэтому существует единственное хорошее разбиение $(a_k, b_k, c_k) = (2^{2n-k}, 2^{2n+k-1}, 2^{k-1})$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

9.8. Ацтекским диамантом порядка n называется фигура на координатной плоскости, состоящая из единичных квадратов, центры которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leqslant n$. На рисунке справа изображён ацтекский диамант порядка 4.

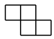


Можно ли разрезать ацтекский диамант порядка 2020 на фигурки вида , состоящие из четырёх клеток. (Фигурки можно вращать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

Ответ: нет, невозможно.

Предисловие. Уважаемые коллеги. К сожалению, при формулировке задачи была допущена опечатка: ранг диаманта предполагался равным 2021. В результате этого, задача получилась слишком сложной для учащихся 9 класса. Чтобы участники олимпиады получили заслуженные баллы в зависимости от проделанной работы, оценивайте, пожалуйста, верное решение, показывающее, что, если число $n(n+1)$ не делится на 4, то диамант ранга n нельзя разбить на указанные фигурки, в **7** баллов. Для получения полного балла учащийся не обязан сформулировать это утверждение в общем виде, главное — чтобы его решение было применимо в общем случае.

Пример верного решения. Рассмотрим квадрат $\mathcal{K}$ размера 2×2, образованный единичными клетками, имеющими начало координат в качестве одной из своих вершин. Разделим всю координатную плоскость на квадраты размера 2×2 так, чтобы $\mathcal{K}$ был одним из квадратов разбиения, и раскрасим полученные квадраты в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, причём $\mathcal{K}$ покрасим в чёрный цвет.

Нетрудно видеть, что каждая фигурка вида  накрывает нечётное количество чёрных клеток. Однако, из соображений симметрии видно, что общее количество чёрных клеток чётно. Следовательно, если диамант можно разбить на такие фигурки, то потребуется чётное количество фигурок. Значит, общее количество клеток диаманта кратно восьми. Это количество равно $2n(n+1)$. Таким образом, если $n(n+1)$ не кратно четырём, то разбиение невозможно.

10.5. На столе лежат 2020 фишек. За один ход разрешается выбрать две или три группы с одинаковым количеством фишек в них и объединить выбранные группы в одну (вначале есть 2020 групп по одной фишке).

Какое наименьшее количество групп можно получить, сделав несколько ходов?

Ответ: 3.

Заметим, что, при объединении двух или трёх групп в одну, количество фишек получается вдвое и, соответственно, втрое больше, чем было в каждой из них. Так как вначале в каждой группе было по одной фишке, то количество фишек в любой из групп всегда имеет вид 2^a3^b, где a и b — некоторые неотрицательные числа. Поскольку число 2020 не представимо в таком виде, то одну группу получить невозможно.

Предположим, что мы смогли получить две группы, тогда верно равенство $2^a3^b + 2^x3^y = 2020$. Число 2020 на 3 не делится, значит, по крайней мере одно из чисел b и y равно нулю. Не ограничивая общности, положим $y = 0$, тогда $2^a3^b + 2^x = 2020$. Число 2019 нечётно и не является степенью тройки, поэтому $x > 0$, откуда заключаем, что и $a > 0$. Разделив уравнение на 2, получим уравнение $2^{a-1}3^b + 2^{x-1} = 1010$. Аналогично, 1009 — не степень тройки, значит, a и x больше единицы и $2^{a-2}3^b + 2^{x-2} = 505$. Наконец, число $504 = 2^3 3^2 7$ не имеет вид $2^{a-2}3^b$, поэтому $x > 2$ и $a = 2$. Таким образом, мы пришли к равенству $3^b + 2^{x-2} = 505$, с неизвестными натуральными показателями b и $x - 2$. Заметим, что $2^9 = 512 > 505$, а при $x - 2 = 8$ число $505 - 2^{x-2} = 249$ не является степенью тройки. Если же $x - 2 < 8$, то число $505 - 2^{x-2}$ не меньше, чем $377 > 243 = 3^5$, однако, $3^6 > 505$. Следовательно, это уравнение не имеет решений.

Покажем, что три кучки получить можно. Для этого достаточно привести пример представления 2020 в виде суммы трёх чисел вида 2^a3^b. Например, подойдёт следующее равенство: $2020 = 1024 + 972 + 24 = 2^{10} + 2^2 \cdot 3^5 + 2^3 \cdot 3$.

10.6. В футбольном турнире приняли участие 10 команд: каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. По окончании турнира выяснилось, что все команды набрали разное количество очков, а команда-победитель турнира выиграла меньше матчей, чем команда „Метеор".

Какое наиболее низкое место в турнире могла занять команда „Метеор"? (В футболе команда, выигравшая матч получает три очка, проигравшая — нуль, а в случае ничьи обе команды получают по одному очку.)

Ответ: 4-е место.

Пусть команда-победитель выиграла x матчей, тогда команда „Метеор" выиграла по крайней мере $x+1$ матч. Пусть „Метеор" занял k-е место, а через S_i будем обозначать количество очков, набранных командой, занявшей i-е место. Тогда

$$S_1 \leqslant 3x + (9-x) = 9 + 2x,\ S_2 \leqslant 8 + 2x,\ \ldots,\ S_k \leqslant 10 + 2x - k,\ \ldots, S_{10} \leqslant 2x.$$

Во-первых, общее количество очков, набранных всеми командами, не превышает $2x+9+2x+8+\ldots+2x = 20x+45$. Это же число не может быть меньше удвоенного количества всех матчей турнира, т. е. $2\cdot 45$. Значит, $20x+45 \geqslant 90$, откуда заключаем, что $x \geqslant 3$.

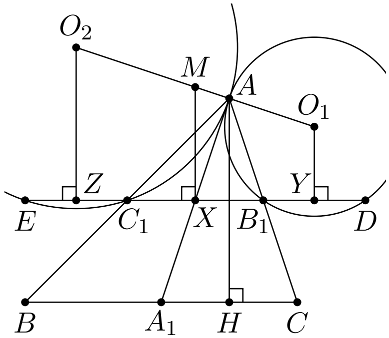
Во-вторых, так как „Метеор" выиграл не меньше, чем $x+1$ матч, то $S_k \geqslant 3(x+1)$. Поэтому $10+2x-k \geqslant 3x+3$, откуда $k \leqslant 7-x \leqslant 7-3 = 4$.

Покажем теперь, что „Метеор" мог занять четвёртое место. Пронумеруем команды в порядке убывания набранных очков. Назовём последовательно результаты всех матчей. Пусть первая команда выиграла у второй, четвёртой и десятой, а остальные игры сыграла вничью. Вторая команда выиграла у четвёртой, шестой и десятой, а с третьей, пятой, седьмой, восьмой и девятой сыграла вничью. Третья команда выиграла у четвёртой и седьмой, а с пятой, шестой, восьмой, девятой и десятой сыграла вничью. Четвёртая команда проиграла пятой и шестой и выиграла у седьмой, восьмой, девятой и десятой. Пятая команда сыграла вничью с командами с шестой по десятую. Шестая команда сыграла вничью с командами с седьмой по десятую. Седьмая команда выиграла у девятой и сыграла вничью с восьмой и десятой. Восьмая команда сыграла вничью с девятой и десятой, которые между собой также сыграли вничью. Нетрудно убедиться, что турнир с указанными результатами удовлетворяет условию задачи.

10.7. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB, соответственно. Окружность ω_1 с центром O_1 проходит через точку B_1 и касается прямой AA_1 в точке A. Окружность ω_2 с центром O_2 проходит через точку C_1 и также касается прямой AA_1 в точке A. Пусть AH — высота в треугольнике ABC, а точка M — середина отрезка O_1O_2.

Докажите, что $MA_1 = MH$.

Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1H. Обозначим середину медианы AA_1 через X. Не сложно видеть, что точка X лежит на отрезке B_1C_1 и делит его пополам. Так как в произвольном прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $XA_1 = XA = XH$. Следовательно, точка X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1H. Так как $B_1C_1 \parallel BC$, то для завершения доказательства достаточно установить, что $MX \perp B_1C_1$.



Пусть прямая B_1C_1 пересекает окружности ω_1 и ω_2 во второй раз в точках D и E, соответственно. Так как квадрат длины касательной равен произведению длин отрезков секущей, то $AX^2 = XC_1 \cdot XE = XB_1 \cdot XD$, а значит, из равенства $XC_1 = XB_1$, следует, что $EC_1 = DB_1$. Обозначим середины отрезков DB_1 и EC_1 через Y и Z, соответственно. В силу доказанного, $XY = XZ$. Центры O_1 и O_2 окружностей ω_1 и ω_2 лежат на серединных перпендикулярах к хордам DB_1 и EC_1, соответственно. Поэтому, O_1O_2ZY — прямоугольная трапеция, а MX — средняя линия в ней. Поэтому, $MX \perp YZ$.

10.8. Числа $2, 3, 4, \ldots, 2020$ разбили на тройки. В каждой тройке числа упорядочили по возрастанию и нашли разность между средним по величине числом и средним арифметическим большего и меньшего из чисел, т. е. для тройки $a < b < c$ посчитали $|b - \dfrac{a+c}{2}|$. После чего вычислили сумму полученных 673 чисел.

Найдите наибольшее возможное значение вычисленной суммы.

Ответ: $\frac{3n^2-3n+2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor \lceil \frac{n}{2}\rceil}{4}$, при $n = 2019$.

Заметим, что искомая сумма не изменится, если из всех чисел вычесть одно и то же число, поэтому, будем считать, что на тройки разбивают числа от 1 до 2019. Решим задачу в общем виде, заменив число 2019 на $3n$, где n — произвольное натуральное число.

Рассмотрим разбиение на тройки, при котором заданная сумма достигает максимума. Каждую из троек полученного разбиения $b < a < c$ назовём *отрицательной*, если $a \leqslant (b + c)/2$, и *положительной*, если $a \geqslant (b + c)/2$. Элементы b, a, c будем называть *минимальным, средним, максимальным* соответственно. Также будем говорить о значении $|a - (b + c)/2|$ как о *сумме тройки*.

Начнём с доказательства следующей леммы:

Лемма 1. Если тройка $b < a < c$ положительная, то $a = c - 1$. Если данная тройка отрицательна, то $a = b + 1$.

Доказательство. Так как после замены каждого числа a на $3n-a$ сумма не меняется, а отрицательные тройки становятся положительными и наоборот, то можно считать, что тройка $b < a < c$ положительна. Будем рассуждать от противного: предположим, что $c = a + s$, где $s > 1$. Заметим, что если существует отрицательная тройка $x < a + i < y$ для некоторых $0 < i < s$, то после замены a и $a + i$ в своих тройках местами сумма по всем тройкам возрастёт на $2i$. Таким образом, такая ситуация невозможна. Тогда предположим, что существует тройка $x, y, a + i$ такая, что $0 < i < s$ и $a + i$ не является центральным элементом. Не нарушая общности, пусть x — центральный элемент в данной тройке. Если мы поменяем местами a и $a + i$ в своих тройках, то выражение $|a - (b + c)/2|$ увеличится на i. Посмотрим, как изменилось значение $S = |x - (a + i + y)/2| = |\frac{3}{2}x - (a + x + y)/2 - i/2|$. Если x остался средним элементом в a, x, y, то S изменится не более, чем на $i/2$, то есть общая сумма увеличится на не менее, чем $i - i/2 = i/2$. Если x более не центральный элемент в новой тройке, то, очевидно, $a < x < a + i$. Пусть t является центральным элементом в a, x, y. Тогда S изменится на

$$\left|\left|\frac{3}{2}t - \frac{a+x+y}{2}\right| - \left|\frac{3}{2}x - \frac{a+x+y}{2} - \frac{i}{2}\right|\right| \leqslant \left|\frac{3}{2}(t-x) + \frac{i}{2}\right|.$$

Так как $-i + 1 \leqslant a - x \leqslant t - x < 0$, получаем

$$\frac{i}{2} > \frac{3}{2}(t-x) + \frac{i}{2} \geqslant -\frac{3(i-1)}{2} + \frac{i}{2} > -i,$$

то есть $|x-(a+i+y)/2|$ изменится менее, чем на i. Поскольку $|a-(b+c)/2|$ увеличилось на i, общая сумма увеличится хотя бы на 1, противоречие.

Таким образом, все числа $a+1,\dots,a+s-1$ являются центральными и лежат в положительных тройках. Рассмотрим тройку $x < a+s-1 < y$. Она положительна, и $y \geqslant a+s+1 = (a+s-1)+2$, так как $a+s$ лежит в тройке с a. Итак, мы нашли число y, строго большее a, которое является центральным в положительной тройке и отличается от максимального числа в своей тройке не менее, чем на 2. Рассуждая аналогичным образом для этого числа, приходим к бесконечному подъёму, который невозможен, так как в нашем распоряжении имеется лишь конечное количество элементов. Полученное противоречие завершает доказательство.

Назовём все тройки вида $b < b+1 < c$ *левыми*, а тройки вида $b < c-1 < c$ *правыми*. Заметим, что в обоих случаях

$$|b+1-(b+c)/2| = |c-1-(b+c)/2| = (c-b)/2-1,$$

поэтому для нас представляет интерес только разность между наибольшим и наименьшим элементами. Докажем, что справедливы следующие две леммы.

Лемма 2. Минимальный элемент любой левой тройки меньше максимального элемента любой правой. Максимальный элемент любой левой тройки больше минимального элемента любой правой.

Доказательство. Предположим, что существуют тройки $a < a+1 < b$ и $x < y-1 < y$, такие что $a > y$. Суммой этих двух троек будет число

$$\frac{b+y-a-x}{2}-2.$$

Заменим эти две тройки на $y-1 < y < b$ и $x < a < a+1$ — данные неравенства следуют из предположений $x < y-1 < y < a < a+1 < b$. Сумма новых троек равна

$$\frac{b+a-y-x}{2}-1 > \frac{b+y-a-x}{2}-2,$$

что противоречит максимальности выбранной суммы. Итак, $a < y$, и предположим, что $b < x$. После замены b и x местами, сумма

$$\frac{b+y-a-x}{2}-2.$$

оказывается заменена на

$$\frac{x+y-a-b}{2}-2 > \frac{b+y-a-x}{2}-2,$$

аналогичное противоречие. То есть, $x < b$, и лемма 2 доказана.

Лемма 3. Минимальный элемент любой правой тройки меньше минимального элемента любой левой. Максимальный элемент любой левой тройки больше максмального элемента любой правой.

Доказательство. Предположим, что существуют тройки $a < a+1 < b$ и $x < y-1 < y$, такие что $x > a$, и пусть мы взяли такие тройки с минимальным возможным значением x и максимальным возможным значением a при данном x. Согласно Лемме 2, все максимальные элементы левых троек больше x, а так как x минимально и a максимально, то $x = a+2$. Заменим $a < a+1 < b$ и $x < y-1 < y$ на тройки $a+1 < a+2 < b$ и $x-2 < y-1 < y$. Тогда общая сумма увеличится на

$$\frac{y-x+2}{2} + \frac{b-a-1}{2} - \frac{y-x}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2},$$

что противоречит её максимальности. Меняя каждое число a на $3n-a$, получаем второе утверждение леммы. Лемма 3 доказана.

Согласно доказанным леммам, числа в тройках расположены следующим образом: существуют $k, l \in \mathbb{N}$ с $k+l=n$ такие, что числа $1, 2, \ldots, k$ являются минимальными в правых тройках, $k+1, k+3, \ldots, k+2l-1$ — минимальными в левых, $k+2l+2, k+2l+4 \ldots, 3k+2l$ — максимальными в правых и $3k+2l+1, 3k+2l+1, \ldots, 3k+3l$ — максимальными в левых. Заметим, что вне зависимости от того, как числа в тройках будут переставлены, если они удовлетворяют выше описанным условиям, то общая сумма равна

$$\frac{(k+2l+2)+(k+2l+4)+\ldots+(3k+2l)-1-2-\ldots-k}{2} - k +$$
$$+ \frac{(3k+2l+1)+(3k+2l+2)+\ldots+(3k+3l)-(k+1)-(k+3)-\ldots}{2}$$
$$\frac{\ldots-(k+2l-1)}{2} - l = \frac{(k+2l)k + 2\cdot\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}}{2} +$$
$$+ \frac{(3k+2l)l + \frac{l(l+1)}{2} - (k-1)l - 2\cdot\frac{l(l+1)}{2}}{2} - k - l =$$
$$= \frac{3k(k-1)+3l(l-1)+8kl}{4} = \frac{3(k+l)^2 - 3(k+l) + 2kl}{4} = \frac{3n^2-3n+2kl}{4}.$$

Минимум выражения $2kl = 2k(n-k)$ достигается при $k = [n/2]$, поэтому искомое максимальное значение равно

$$\frac{3n^2 - 3n + 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}{4}.$$

11.5. На доске записаны 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых трёх из них является полным кубом, а произведение любых семи является седьмой степенью некоторого натурального числа.

Найдите наименьшее возможное произведение всех 20 чисел.

Ответ: $(20!)^{21}$.

Пусть p — произвольный простой делитель произведения всех 20 чисел. Напомним, что степенью вхождения простого числа p в натуральное число n называется максимальное неотрицательное число $v_p(n)$, такое что $n \vdots p^{v_p(n)}$. Выберем любые два записанные на доске числа a и b и добавим к ним любые два из оставшихся: c и d. Так как произведения acd и bcd являются кубами, то обе суммы: $v_p(a) + v_p(c) + v_p(d)$ и $v_p(b) + v_p(c) + v_p(d)$, кратны трём. Значит, показатели $v_p(a)$ и $v_p(b)$ дают одинаковый остаток при делении на 3. Поскольку числа a и b были выбраны произвольным образом, то показатели всех чисел дают один и тот же остаток при делении на 3. Заметим, что, если этот остаток ненулевой, то все числа можно разделить на p и все условия задачи останутся выполнены, а общее произведение уменьшится, поэтому можно считать, что остаток равен нулю.

Таким образом, любое простое число p входит в любое из записанных чисел a в степени $v_p(a)$, кратной 3. Проводя аналогичные для произведения произвольных семи чисел, получим, что $v_p(a)$ делится и 7. Следовательно, $v_p(a) \vdots 21$, а значит, записанные числа являются 21-ми степенями каких-то различных 20 натуральных чисел. Очевидно, что, во-первых, произведение данных чисел не меньше, чем $1^{21} \cdot 2^{21} \cdot \ldots \cdot 20^{21}$, а во-вторых, числа $1^{21}, 2^{21}, \ldots, 20^{21}$ удовлетворяют условию задачи.

11.6. Витя выбрал $n \geqslant 3$ действительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Докажите, что Маша может у некоторых из выбранных чисел поменять знак на противоположный, получив новый набор b_1, b_2, $\ldots$, b_n, так что одновременно будут выполнены неравенства

$$b_1(b_n + b_2) \leqslant 0, \quad b_2(b_1 + b_3) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad b_n(b_{n-1} + b_1) \leqslant 0.$$

Решение. Среди всех наборов размера n, состоящих из ± 1, выберем такой ε_1, ε_2, $\ldots$, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, для которого выражение

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2)^2 + (\varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3)^2 + \ldots + (\varepsilon_n a_n + \varepsilon_1 a_1)^2$$

принимает минимальное значение. Тогда, в частности,

$$F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n) \leqslant F(\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Следовательно,

$$(\varepsilon_{i-1} a_{i-1} + \varepsilon_i a_i)^2 + (\varepsilon_i a_i + \varepsilon_{i+1} a_{i+1})^2 \leqslant (\varepsilon_{i-1} a_{i-1} - \varepsilon_i a_i)^2 + (-\varepsilon_i a_i + \varepsilon_{i+1} a_{i+1})^2,$$

считая, что $a_{-1} = a_n$ и $a_{n+1} = a_1$. Поэтому, $\varepsilon_i a_i(\varepsilon_{i-1} a_{i-1} + \varepsilon_{i+1} a_{i+1}) \leqslant 0$, а значит, Маше достаточно выбрать $b_i = \varepsilon_i a_i$ для всех i от 1 до n.

11.7. Можно ли на сторонах равностороннего треугольника отметить пять отличных от вершин треугольника точек так, чтобы они являлись вершинами выпуклого пятиугольника, у которого все диагонали равны?

Ответ: Нельзя.

Обозначим наш треугольник через ABC. Предположим, что нам удалось отметить пять точек так, как требуется в условии. Очевидно, что на двух сторонах исходного треугольника отмечены по две точки, а на третьей стороне — одна. Не ограничивая общности, пусть на отрезках AB и AC отмечены точки P, Q и R, S соответственно (точка Q лежит между A и P; а точка R лежит между A и S). Тогда по условию $QS = PR = PS$. В треугольнике APS сумма углов при вершинах S и P равна $120°$. Не нарушая общности, пусть $\angle APS \geqslant \angle ASP$, в таком случае $\angle ASP \leqslant 60° = \angle PAS$. По условию $PS = PR$, значит, в равнобедренном треугольнике PRS выполнено равенство $\angle PRS = \angle PSR$, но угол $\angle PSR$ является внешним в треугольнике APR и он превышает внутренний угол $\angle PAS$. Таким образом, $\angle PAS \geqslant \angle ASP = \angle PRS > \angle PAS$ — противоречие.

11.8. На клетчатую доску размера 9×9 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90°, границы уголков идут по линиям сетки).

Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?

Ответ: 14.

Предположим, что возможно выложить не более 13 уголков с соблюдением условия. Пронумеруем строки и столбцы таблицы числами от 1 до 9 снизу вверх и слева направо соответственно. Под клеткой (a, b) будем подразумевать клетку, стоящую на пересечении столбца с номером a и строки с номером b.

Каждый из прямоугольников, образованных двумя верхними строками и двумя нижними строками, разобьём на три квадрата 2×2 и один прямоугольник 2×3. В первых двух столбцах и в последних двух столбцах остаются прямоугольники 5×2, каждый из которых разобьём на квадрат 2×2 и прямоугольник 3×2. В центральном квадрате выделим в левый нижний и правый верхний квадраты 2×2, а также левый верхний квадрат 3×3. Фигуру, которая осталась невыделенной, назовём Ф, она представляет собой квадрат 3×3 без левого верхнего уголка.

Для того, чтобы невозможно было выложить больше ни одного уголка, в каждом из 10 квадратов 2×2 должны быть накрыты по крайней мере две клетки. Нетрудно видеть, что в каждом из 4 прямоугольников 2×3 и 3×2 должны быть накрыты по крайней мере 2 клетки, причём, если их ровно 2, то эти клетки образуют средний столбец (строку). Однако, из-за расположения прямоугольника у границы, уголки не могут покрывать только их. Значит, в каждом прямоугольнике 2×3 и 3×2 накрыты по крайней мере по 3 клетки. Очевидно, что в квадрате 3×3 должны быть накрыты по крайней мере 3 клетки. Простой перебор показывает, что, чтобы в нём были покрыты ровно три клетки, эта тройка должна состоять из трёх последовательных клеток, одна из которых — центр квадрата. Но это невозможно, поскольку на доску выкладываются уголки. Значит, в квадрате 3×3 накрыты по крайней мере 4 клетки.

Выделим в фигуре Ф клетку $(6, 4)$. Предположим, что эта клетка не покрыта уголками. Тогда по крайней мере одна из клеток $(5, 4)$ и $(6, 5)$ накрыта уголком, не ограничивая общности, пусть накрыта $(5, 4)$. В каждой из пар клеток $(6, 5)$ и $(7, 5)$, $(7, 4)$ и $(7, 3)$, $(6, 3)$ и $(5, 3)$, покрыта по хотя бы одна клетка. Значит, в фигуре Ф покрыты по крайней мере 4 клетки. А во всём квадрате 9×9 покрыты не менее $2 \cdot 10 + 3 \cdot 4 + 4 + 4 = 40$ клеток, что невозможно, поскольку выложены не более 13 уголков.

Следовательно, клетка $(6, 4)$ обязательно покрыта уголком. Аналогичными рассуждениями получаем, что и клетки $(6, 6)$, $(4, 6)$, $(4, 4)$ покрыты уголками. Заметим, что уголки, покрывающие указанные четыре клетки, различны и не выходят за пределы центрального квадрата 5×5. Значит, в этом квадрате накрыты хотя бы 12 клеток. А в оставшейся рамке ширины 2 накрыты ещё хотя бы $2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 28$ клеток. Снова получаем, что уголки должны накрывать не менее 40 клеток, что невозможно.

Приведём пример, показывающий, что 14 уголков можно разместить так, чтобы больше ни одного нельзя было выложить.

Разместим три уголка вида  с угловыми клетками $(4, 2)$, $(6, 2)$ и $(8, 2)$; три уголка вида  с угловыми клетками $(2, 8)$, $(4, 8)$ и $(6, 8)$; три уголка вида  с угловыми клетками $(2, 2)$, $(2, 4)$ и $(2, 6)$; и пять уголков вида  с угловыми клетками $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(8, 4)$, $(8, 6)$ и $(8, 8)$.