Третий этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»
2022/2023 учебный год

9 класс

<u>2-й вариант РЕШЕНИЯ</u>

<u>1-й тур = 1-й день</u>

9.1. $\overline{ab}$ двузначное число, составленное из цифр a, b. Найдите всевозможные числа $\overline{ab}$ такие, что $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=a^3+(a+b)^3$.

Ответ: 91. ($\left[91\cdot 19=9^3+(9+1)^3\right]$)

Решение:

$$(10a+b)\cdot(10b+a)=a^3=\left(a+(a+b)\right)\cdot\left(a^2-a(a+b)+(a+b)^2\right)=$$
$=(2a+b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$, то $10a^2+101ab+10b^2$ делится на a^2+ab+b^2, следовательно, $91ab$ делится на a^2+ab+b^2, поскольку
$$\left(10a^2+101ab+10b^2\right)-10\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=91ab.$$

Пусть $d=HOD(a;b)$, $a=dm, b=dn$, тогда $HOD(m;n)=1$.

Т.к. $91(dm)\cdot(dn)$ делится на $(dm)^2\cdot(dm)(dn)+(dn)^2$, то $91mn$ делится на m^2+mn+n^2.

Т.к. $HOD(m;n)=1$, то $HOD\left(mn;m^2+mn+u^2\right)=1$, значит, 91 делится на m^2+mn+n^2, следовательно, $m^2+mn+n^2=7$ или 13 или 91.

Если $m^2+mn+n^2=7$, то $\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$

Если $m^2+mn+n^2=13$, то $\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$

Если $m^2+mn+n^2=91$, то $\begin{cases}m=1\\n=9\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=9\\n=1\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=5\\n=6\end{cases}$ *или* $\begin{cases}m=6\\n=5\end{cases}$

Т.к. $(10a+b)\cdot(10b+a)=a^3+(a+b)^3$, то
$(10dm+dn)(10dn+dm)=(dm)^3+\left(d(m+n)\right)^3$, значит,
$$d=\frac{(10m+n)\cdot(10n+m)}{m^3+(m+n)^3}. \qquad (*)$$

Если $m=1,\ n=2,\ mo\ d=9$, значит, $6=18>9$?!

Если $m=2,\ n=1,\ mo\ d=7{,}2$ - противоречие.

Если $m=1,\ n=3,\ mo\ d=6{,}2$ - противоречие.

Если $m=3,\ n=1,\ mo\ d=\dfrac{31}{7}$ - противоречие.

Если $m=1,\ n=9,\ mo\ d=\dfrac{1729}{1001}$ - противоречие.

Если $m=9,\ n=1,\ mo\ d=1$, значит, $a=9,\ b=1$.

Если $m=5,\ n=6,\ mo\ d=\dfrac{3640}{1456}$ - противоречие.

Если $m=6,\ n=5,\ mo\ d=\dfrac{3640}{1547}$ - противоречие.

9.2. На стороне треугольнике AC треугольника ABC взяты точки X_1, X_2, X_3, X_4, через которые проведены прямые параллельные сторонам СВ и АВ соответственно. Первые 4 из этих прямых пересекают сторону АВ в точках A_1, A_2, A_3, A_4 (при этом получаются отрезки X_1A_1, X_2A_2, X_3A_3, X_4A_4), а остальные пересекают сторону СВ в точках C_1, C_2, C_3, C_4 (при этом получаются отрезки X_1C_1, X_2C_2, X_3C_3, X_4C_4). Найдите площадь треугольника АВС, если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон АВ, ВС и названных отрезков равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

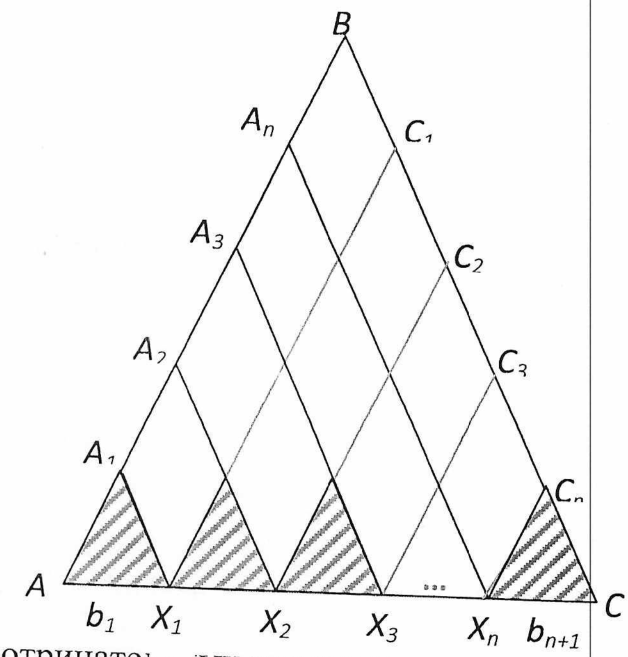
Ответ: $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\ldots+\sqrt{S_5}\right)^2$

Решение: (*приведено для случая произвольного n, ср. аналог в варианте для 10 класса*). Обозначим площадь треугольника ABC через S, длину стороны AC через b, а длины соответствующих сторон «маленьких треугольников» $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, b_{n+1}$ (см. рисунок при n = 4)). Ввиду параллельности соответствующих прямых и равенства соответствующих углов все упомянутые треугольники подобны.

Но тогда: $\dfrac{b_1}{b}=\sqrt{\dfrac{S_1}{S}},\ \dfrac{b_2}{b}=\sqrt{\dfrac{S_2}{S}},\ \dfrac{b_{n+1}}{b}=\sqrt{\dfrac{S_{n+1}}{S}}$, и учитывая, что $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n+1}=B$, и суммируя эти равенства, получаем:

$$\frac{b_1}{b}+\frac{b_2}{b}+\ldots+\frac{b_{n+1}}{b}=1=\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\ldots+\sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}},$$

откуда: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \ldots + \sqrt{S_{n+1}}$.



9.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 2y + 2z + 4t = 20?$$

Ответ: 161.

Решение: t может принимать значения от 0 до 5. Тогда x + $2y$ + $2z$ = 20 – 4t, причем x обязательно четно, т.е. x = 2p, откуда 2p + 2y + 2z = 20 – 4t, или $p + y + z = 10 - 2t$.

Теперь следует выяснить количество способов разложить 10 – 2t шаров по 3 коробкам, причем некоторые могут быть пустыми. Можем обозначить шары цифрой 0, а перегородки между коробками – цифрами 1. Имеем 10 – 2t нулей и 2 единицы. Всего 12 – 2t цифр. Необходимо выяснить, сколько существует способов расставить две 1 на 12 – 2t позиций, т.е. $\frac{(12-2t)\cdot(11-2t)}{2}$ вариантов при t от 0 до 5. Окончательно имеем сумму: 0,5·(12·11 + 10·9 + 8·7 + 6·5 + 4·3 + 2·1) = 66 + 45 + 28 + 15 + 6 + 1 = 161.

9.4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на пять участков. Известно, что длина второго в 8 раз больше длины четвертого. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути, если известно, что она равна скорости движения на нечетных участках, на 4 км меньше скорости движения на втором участке и на 26 км больше половины скорости движения на четвертом участке.

Ответ. x=36 км/ч.

Первое решение (*основано на определении общего времени движения*).
Пусть искомая скорость движения – x км/ч, расстояние АВ= S км. Тогда длина второго участка равна $8y$, четвертого –y, а сумма длин первого, третьего и пятого участков – (S-9y). Время, затраченное велосипедистом на весь путь равно S/x; затраченное на прохождение второго участка – $8y/(x+4)$; четвертого участка – $y/(2x-52)$; первого, третьего и пятого участков вместе – $(S-9y)/x$. Тогда

$$\frac{S}{x}=\frac{8y}{x+4}+\frac{y}{2x-52}+\frac{S-9y}{x},$$

или, после упрощений, $x^2+16x-1872=0$.

Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x=36$.

Второе решение (*основано на определении средней скорости*).

Воспользуемся обозначениями из первого решения. Средняя скорость движения и скорость на втором и четвёртом участках равны:

$x=v_{ср}=\dfrac{AB}{T}=\dfrac{S}{t+t_2+t_4}$, где $T=t+t_2+t_4$ – общее время движения.

$v_2=x+4$, а $t_2=\dfrac{8y}{x+4}$;

$v_4=2x-52$, а $t_4=\dfrac{y}{2x-52}$.

Тогда

$x=v_{ср}=\dfrac{9y+Z}{t+t_2+t_4}=\dfrac{Z}{t}=\dfrac{9y}{t_2+t_4}$, где Z – общая длина нечетных участков. Здесь последнее равенство следует из очевидных соображений: $(9y+Z)t=Z(t+t_2+t_4)$.

Отсюда $x=\dfrac{9y}{\dfrac{8y}{x+4}+\dfrac{y}{2x-52}}$ или, после упрощений $x^2+16x-1872=0$. Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x=36$.

8 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

8.1. Обозначим через $\overline{abc}$ трехзначное число, составленное из цифр a, b, c. Найдите всевозможные числа $\overline{abc}$ такие, что $\overline{abc} = -a + b^c$

Ответ: 127. $\left[127 = -1 + 2^7\right]$

Решение: Т.к. $b^c = \overline{abc} + a$, $100 \le \overline{abc} \le 999$, $1 \le a \le 9$, то $101 \le b^c \le 1008$.
Поэтому, если $b = 2$, то $101 \le 2^c \le 1008$, значит, $c = 7,8,9$;
если $b = 3$, то $c = 5;6$;
если $b = 4$, то $c = 4$;
если $b = 5$, то $c = 3;4$;
если $b = 6$, то $c = 3$;
если $b = 7$, то $c = 3$;
если $b = 8$, то $c = 3$;
если $b = 9$, то $c = 3$.
Т.к. $100a + 10b + c = -a + b^c$, то $b^c - \overline{bc} = 101a$ делится на 101.
Рассматривая вышеуказанные пары чисел b и c получаем, что $b^c - \overline{bc}$ делится на 101 при $\begin{cases} b = 2 \\ c = 7. \end{cases}$
То есть, $101a = b^c - \overline{bc} = 2^7 - 27 = 101$, $a = 1$. Итак, $\overline{abc} = 127$.

8.2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $AO = OC = AB$, $OD = 2 \cdot OB$. Найдите длину стороны CD, если известно, что длина стороны BC равна 1.

Ответ: 1.

Решение. Пусть $ABCD$ - четырехугольник, который удовлетворяет условиям задачи. Тогда треугольник ABO равнобедренный. Проведем AH – биссектрису угла BAO. Она же высота и медиана, т.е. $BH = HO$. Опустим из C перпендикуляр на BD. Треугольники AHO и CEO равны по гипотенузе и острому углу. Откуда следует, что HO = OE. Но так как $OD = 2BO$, то
$ED = OD - OE = 2BO - OE = 4HO - OE = 4OH - OH = 3OH = BE$, т.е. в треугольнике BCD отрезок CE - высота и медиана. Следовательно, треугольник BCD – равнобедренный, и $BC = CD = 1$.

8.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + 2y + 4z = 1000$?

Ответ: 62750.

Решение: z может принимать значения от 0 до 250. Тогда x + 2y = 1000 – 4z, причем x обязательно четно, т.е. x = 2p, откуда 2p + 2y = 1000 – 4z, или p + y = 500 – 2z.

При каждом p от 0 до 500 – 2z неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 250 существует 500 – 2z решений. Осталось просуммировать значения 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0,5(500+2)·250 = 62750.

8.4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на три участка. Известно, что длина первого в 8 раз больше длины второго. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути, если известно, что она равна скорости движения на третьем участке, на 4 км меньше скорости движения на первом участке и на 26 км больше половины скорости движения на втором участке.

Ответ: 36 км/ч.

Первое решение (*основано на определении общего времени движения*).
Решение. Пусть искомая скорость движения – x км/ч, расстояние AB=S км, длина первого участка равна $8y$, второго – y, третьего – $(S\text{-}9y)$. Время, затраченное велосипедистом на весь путь равно $T = S/x$, время, затраченное на прохождение первого участка – $t_1 = 8y/(x+4)$, второго участка – $t_2 = y/(2x\text{-}52)$, третьего участка – $(S\text{-}9y)/x$. Тогда

$$\frac{S}{x} = \frac{8y}{x+4} + \frac{y}{2x-52} + \frac{S-9y}{x}.$$

Преобразовывая и упрощая это выражение, получим квадратное уравнение относительно переменной x, положительным корнем которого является $x = 36$ км/ч.

Второе решение (*основано на определении средней скорости*).

Воспользуемся обозначениями из первого решения. Средняя скорость движения и скорости на первом и втором участках равны:

$$x = v_{ср} = \frac{AB}{T} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3},$$ где $T = t_1 + t_2 + t_3$ – общее время движения.

$v_1 = x + 4$, а $t_1 = \dfrac{8y}{x+4}$;

$v_2 = 2x - 52$, а $t_2 = \dfrac{y}{2x-52}$.

Тогда

$x = v_{ср} = \dfrac{9y + Z}{t_1 + t_2 + t_3} = \dfrac{Z}{t_3} = \dfrac{9y}{t_1 + t_2}$, где Z – длина третьего участка. Здесь последнее равенство следует из очевидных соображений: $(9y + Z)t = Z(t + t_2 + t_4)$.

Отсюда $x = \dfrac{9y}{\dfrac{8y}{x+4} + \dfrac{y}{2x-52}}$ или, после упрощений $x^2 + 16x - 1872 = 0$.

Последнее уравнение имеет два корня: x=36 и x=-52.

Последнее уравнение имеет единственное положительное решение $x = 36$.

11 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

11.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 3y + 3z + 9w = 45?$$

Ответ: 321.

Решение: w может принимать значения от 0 до 5. Тогда $x + 32y + 3z = 45 - 9w$, причем x обязательно кратно 3, т.е. $x = 3p$, откуда $3p + 3y + 3z = 45 - 9w$, или $p + y + z = 15 - 3w$.

Теперь следует выяснить количество способов разложить $15 - 3w$ шаров по 3 коробкам, причем некоторые могут быть пустыми. Можем обозначить шары цифрой 0, а перегородки между коробками – цифрами 1. Имеем $15 - 3w$ нулей и 2 единицы. Всего $17 - 3w$ цифр. Необходимо выяснить, сколько существует способов расставить две 1 на $17 - 3w$ позиции, т.е. $\dfrac{(17-3w)\cdot(16-3w)}{2}$ вариантов при w от 0 до 5. Окончательно имеем сумму: $0{,}5\cdot(17\cdot16 + 14\cdot13 + 11\cdot10 + 8\cdot7 + 5\cdot4 + 2\cdot1) = 136 + 91 + 55 + 28 + 10 + 1 = 321$.

11.2. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x+2) + 2g(4x+7) = x-1, \\ f(x-1) + g(2x+1) = 2x \end{cases}.$$

Ответ. $f(x) = 0{,}5\cdot(7x+12)$, $g(x) = -0{,}25\cdot(3x+7)$.
Решение. Сделаем в первом уравнении системы замену $2x+2 = t$, а во втором замену $x-1 = t$. Из исходной системы получим:

$$\begin{cases} f(t) + 2g(2t+3) = (t-4)/2, \\ f(t) + g(2x+3) = 2t+2 \end{cases}$$

Из последней системы находим: $f(t) = 0{,}5\cdot(7t+12)$, $g(2t+3) = 0{,}5\cdot(-3t-8)$, возвращаясь к переменной x получаем ответ.
Проверка подтверждает, что полученные функции удовлетворяют исходной системе.

11.3. Дан острый угол и точка K внутри него. Постройте прямую, проходящую через точку K и отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

Решение. Пусть дан угол MOL и точка K внутри него. Через точку K проведем прямые, параллельные сторонам угла, и обозначим $OA = a$, $OB = b$ (см. рис.).

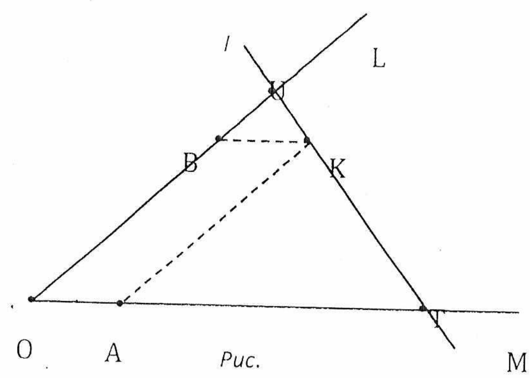


Рис.

Пусть прямая l проходит через точку K и пересекает стороны OM и OL угла в точках T и U соответственно. Тогда площадь треугольника TOU будет равна $\frac{1}{2}TO \cdot OU \cdot \sin\varphi$, где φ – величина угла MOL. Если положить $AT = x$, $BU = y$, то $S_{TOU} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y)\sin\varphi$.

Заметим, что треугольник ATK подобен треугольнику BUK, поэтому $BU/AK = BK/AT$ или $y/b = a/x$. Отсюда находим, что $y = ab/x$, и, следовательно,

$$S_{TOU} = \frac{1}{2}(a+x)\left(b+\frac{ab}{x}\right)\sin\varphi = \frac{b\sin\varphi}{2}(a+x)\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

Так как $(b\sin\varphi)/2 = \text{const}$, то остается исследовать на минимум функцию

$$S(x) = (a+x)\left(1+\frac{a}{x}\right) = 2a + x + \frac{a^2}{x},\ x > 0.$$

Заметим, что $x + a^2/x = a(x/a + a/x) \geq 2a$, причем равенство достигается при $x = a$.

(Или по-другому: имеем $S'(x) = 1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}(x-a)$. Таким образом, $S'(x) = 0$ при $x = a$, и производная при переходе через точку a меняет знак с «–» на «+».)

Следовательно, $x = a$ – точка минимума этой функции.

Построить треугольник наименьшей площади можно следующим образом: на стороне OM угла откладывается отрезок $AT = OA$. Прямая TK – искомая.

11.4. Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав три круга, третий бегун впервые после старта до-гнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз каждые 6 мин?

Ответ: $\frac{1}{2}$ круга в минуту.

Решение. Обозначим v_1, v_2, v_3 – скорости первого, второго и третьего бегунов соответственно; за начало отсчета примем момент старта. Время будем измерять в минутах, а расстояние – в кругах (скорость соответственно – в круг/мин). Условия задачи здесь четко разделены и их можно представить в виде системы (математической модели):

1) $v_3 \cdot t_1 = 3$ (круга) (t_1 – момент, когда третий бегун догонит второго);

2) $v_2 \cdot t_1 = 2{,}5$ (круга);

3) $v_1 \cdot (t_1 + 2{,}5) = v_3 \cdot (t_1 + 2{,}5) + 0{,}5$ (через 2,5 мин первый догонит третьего, т. е. пробежит на полкруга больше);

4) $6v_1 = 6v_2 + 1$ (за каждые 6 мин первый пробегает на круг больше второго).

Необходимо найти v_2.

Из 1) и 2) имеем: $5v_3 = 6v_2$. Выражая t_1 из 1) и подставляя в 3), получаем

$$v_1\left(\frac{3}{v_3} + 2{,}5\right) = 2{,}5v_3 + 3{,}5.$$

После упрощений получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 5v_3 = 6v_2, \\ 6v_1 = 6v_2 + 1, \\ 6v_1 + 5v_1v_3 = 7v_3 + 5v_3^2, \end{cases}$$

которую решаем методом подстановки неизвестных v_3 и v_1 из первых двух уравнений в третье. Таким образом, получаем

$$6v_2 + 1 + 6v_2\left(v_2 + \frac{1}{6}\right) = 7 \cdot \frac{6}{5}v_2 + 5\left(\frac{6}{5}v_2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6v_2^2 + 7v_2 - 5 = 0,$$

откуда имеем два корня: $v_2 = \dfrac{1}{2}$ или $v_2 = -\dfrac{5}{3}$. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи.

Третий этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»
2022/2023 учебный год

10 класс

2-й вариант

1-й тур = 1-й день

10.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + 3y + 9z = 900$?

Ответ: 15150. +101

Решение: z может принимать значения от 0 до 100. Тогда x + 3y = 900 – 9z, причем x обязательно кратно 3, т.е. x = 3p, откуда 3p + 3y = 900 – 9z, или p + y = 300 – 3z.

При каждом p от 0 до 300 – 3z неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 100 существует 300 – 3z решений. Осталось просуммировать значения 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0,5(500+2)·250 = 15150.

4 7 + ... + 298 + 301 = 15251

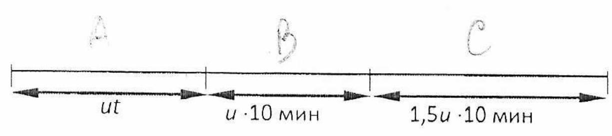
10.2. Человек шел домой вверх по течению ручья со скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость течения. В руках у него были шляпа и палка. Он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти с той же скоростью некоторое время. Вскоре он заметил ошибку, швырнул в ручей палку и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 мин человек встретил плывущую по ручью палку. На сколько минут раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал шляпу с палкой?

Ответ: 37,5 мин.

Решение. Пусть u – скорость течения реки (и соответственно шляпы и палки по воде), тогда скорость человека вверх по течению – $1{,}5u$, вниз по течению – $3u$. Пусть человек, бросившись в погоню за шляпой, сделал зарубку на дереве, а когда догнал ее, то сделал вторую зарубку. Расстояние между зарубками обозначим a. Потерянное время складывается из движения в одну сторону $t = \frac{a}{3u}$ и в другую $\frac{a}{1{,}5u} = \frac{2a}{3u}$, т. е. равно $\frac{a}{u}$ (очевидно, $u \neq 0$). Однако это расстояние a, с одной стороны, равно

$$a = 3ut \quad (t \text{ – время возвращения}),$$

а с другой стороны, складывается из следующих участков движения (рис. 17): A – движение палки по течению за время t возвращения человека за шляпой; B – движение палки навстречу человеку в течение 10 мин; C – движение человека после поворота до встречи с палкой в течение 10 мин, т. е. $a = ut + u \cdot 10\text{ мин} + 1{,}5u \cdot 10\text{ мин}$.



Итак, имеем систему

$$\begin{cases} a = 3ut, \\ a = ut + 25u. \end{cases}$$

Откуда легко получаем: $\frac{a}{u} = 37{,}5$ мин.

10.3. На стороне треугольнике AC треугольника ABC взяты точки $X_1, X_2, \dots, X_n$, через которые проведены прямые параллельные сторонам CB и AB соответственно. Первые n из этих прямых пересекают сторону AB в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (при этом получаются отрезки $X_1A_1, X_2A_2, \dots, X_nA_n$), а остальные пересекают сторону CB в точках $C_1, C_2, \dots, C_n$ (при этом получаются отрезки $X_1C_1, X_2C_2, \dots, X_nC_n$). Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон AB, BC и названных отрезков равны соответственно $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$.

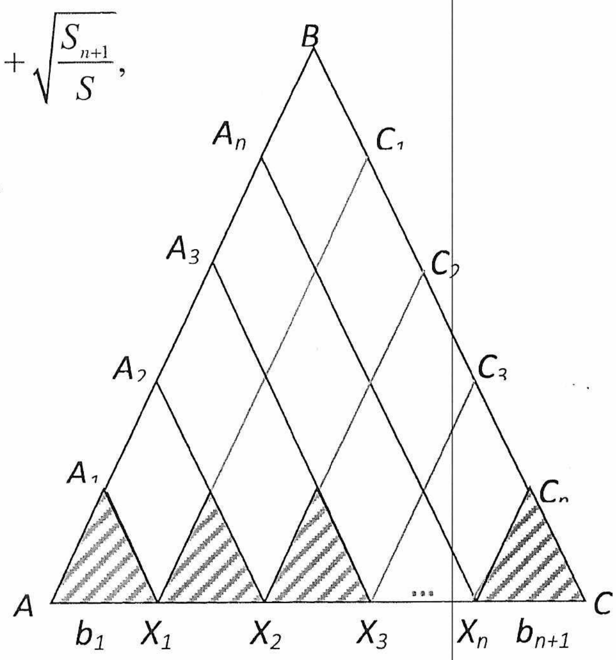
Ответ: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \dots + \sqrt{S_{n+1}}$

Решение. Обозначим площадь треугольника ABC через S, длину стороны AC через b, а длины соответствующих сторон «маленьких треугольников» $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_{n+1}$ (см. рисунок при n = 4)). Ввиду параллельности соответствующих прямых и равенства соответствующих углов все упомянутые треугольники подобны.

Но тогда: $\frac{b_1}{b} = \sqrt{\frac{S_1}{S}},\ \frac{b_2}{b} = \sqrt{\frac{S_2}{S}},\ \frac{b_{n+1}}{b} = \sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}}$, и учитывая, что $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n+1} = B$, и суммируя эти равенства, получаем:

$$\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b} + \dots + \frac{b_{n+1}}{b} = 1 = \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \dots + \sqrt{\frac{S_{n+1}}{S}},$$

откуда: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \dots + \sqrt{S_{n+1}}$.



10.4. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x+1)+2xg(2x+1)=4x, \\ f(\frac{2x+1}{2x-1})+g(\frac{2x+1}{2x-1})=2x-1 \end{cases}.$$

Ответ. $f(x)=\dfrac{2-2x}{x-1}$; $\quad g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Решение. Сделаем в первом уравнении замену $2x+1=t$, а во втором $\dfrac{2x+1}{2x-1}=t$. Тогда исходная система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} f(t)+(t-1)\cdot g(t)=2t-2, \\ f(t)+g(t)=\dfrac{t+1}{t-1}-1 \end{cases}.$$

Решая эту систему получим искомые функции; проверка показывает, что они удовлетворяют системе.

Уважаемые коллеги!

В связи с замеченными опечатками, неточностями, а порой и не совсем удачными оформлениями решений, затрудняющими понимание условий задач (особенно участниками олимпиады) и их решений (для удобства сравнения и оценки работ членами жюри), ***высылаем дополнительные комментарии и более точную запись ответов к некоторым задачам*** 3-го этапа. Все ниже приведенные комментарии носят вспомогательный характер, ибо принципиальных ошибок в решениях, разрушающих основные идеи, логику и последователь изложения на данный нами момент не обнаружено, все комментарии и исправления носят скорее технический характер.

8 класс

В первый день: **Внимание:** к сожалению, в решении задачи 8.3 в бланке для жюри в последней сумме неучтено значение $p = 0$ (хотя тремя строчками выше про это сказано); ниже приводится ответ и решение в окончательной форме, но также для сравнения приведена формулировка решения, вставленная в бланк жюри в текст заданий олимпиады.

8.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + 2y + 4z = 1000$?

Ответ: 63 001.

Решение (*в формулировке как в бланке жюри*): z может принимать значения от 0 до 250. Тогда $x + 2y = 1000 - 4z$, причем x обязательно четно, т.е. $x = 2p$, откуда $2p + 2y = 1000 - 4z$, или $p + y = 500 - 2z$. При каждом p от 0 до $500 - 2z$ неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 250 существует $500 - 2z$ решений. Осталось просуммировать значения $0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0{,}5(500+2)\cdot 250 = 62750$.

Текст, выделенный заливкой, следует читать так:

«при каждом z от 0 до 250 существует $500 - 2z + 1$ решение. Осталось просуммировать значения $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 501 = 0{,}5\cdot(501+1)\cdot 251 = 63\,001$.

9 класс

В первый день: *дополнительных комментариев или замечаний нет*

10 класс

В первый день: **Внимание:** к сожалению, в решении задачи 10.1 в бланке для жюри в последней сумме неучтено значение $p = 0$ (хотя тремя строчками выше про это сказано), а также часть текста из 8 класса; ниже приводится ответ и решение в окончательной форме, но также для сравнения приведена формулировка решения, вставленная в бланк жюри в текст заданий олимпиады.

10.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+3y+9z=900$?

Ответ: 15251.

Решение (*в формулировке как в бланке жюри*)**:** z может принимать значения от 0 до 100. Тогда x + 3y = 900 – 9z, причем x обязательно кратно 3, т.е. x = 3p, откуда 3p + 3y = 900 – 9z, или p + y = 300 – 3z.

При каждом p от 0 до 300 – 3z неизвестная y принимает единственное значение. Таким образом, при каждом z от 0 до 100 существует 300 – 3z решений. Осталось просуммировать значения 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 500 = 0,5(500+2)·250 = 15150.

***Текст, выделенный заливкой, следует читать так*:**
«при каждом z от 0 до 100 существует 300 – 3z + 1 решение. Осталось просуммировать значения 1 + 4 + 7 + ... + 298 + 301 = 0,5·(301+1)·101 = 15251».

10.4. в ответе дополнить: $x \neq 0{,}5$ и 1.

11 класс

В первый день: *дополнительных комментариев или замечаний нет*