Очень кратко о замеченных «неточностях в условиях:

8 класс

В Задаче 8.6. в ней САМОЕ ВАЖНОЕ и СРОЧНОЕ (!!!): в условии задачи в числе **20023** лишний нуль, соответствующее выражение следует читать:

$$«2023p^2 - 99124»$$

и далее по тексту. (*В решении здесь все в порядке.*)

9 класс

в задаче 9.7. САМОЕ ВАЖНОЕ и СРОЧНОЕ (!!): в условии исправить второе предложение:

«Пусть точка F – точка пересечения отрезков BD и CE.»

и далее по тексту (т.е. здесь второй отрезок – **это** CE, *а не отрезок* CF, *как стоит в условии*).

В решении нормально!

11 класс

В задаче 11.7.

Некритично, но важно подчеркнуть в начале, что в этой задаче **предложение о внешнем касании окружностей относится именно к описанным четырем касаниям. Вот как мы переформулировали эту фразу:**

«Все указанные четыре попарных касания являются внешними касаниями соответствующих окружностей».

В решениях – нормально, хотя мы и обновим решения, добавив дополнительные комментарии.

11 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

11.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$64a^3 + 343b^3 + 729c^3 \geq 48a^2(7bc)^{1/2} + 294b^2(ac)^{1/2} + 162c^2(7ab)^{1/2}.$$

Решение. Как известно, $(a-b)^2 \geq 0$. Отсюда получаем два очевидных неравенства:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (*)$$

и

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab. \qquad (**)$$

Применим эти неравенства к доказательству предложенного, но для удобства сделаем следующие замены:

$$4a = x^2, \quad 7b = y^2, \quad 9c = z^2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно $x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$.
Теперь, используя (**), имеем

$$x^6 + y^6 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) \geq \left(x^2 + y^2\right)x^2y^2.$$

Аналогично

$$x^6 + z^6 = \left(x^2 + z^2\right)\left(x^4 - x^2z^2 + z^4\right) \geq \left(x^2 + z^2\right)x^2z^2$$

и

$$y^6 + z^6 = \left(y^2 + z^2\right)\left(y^4 - y^2z^2 + z^4\right) \geq \left(y^2 + z^2\right)y^2z^2.$$

Складывая последние три неравенства и используя (*), получаем

$$2\left(x^6 + y^6 + z^6\right) \geq x^4\left(y^2 + z^2\right) + y^4\left(x^2 + z^2\right) + z^4\left(x^2 + y^2\right) \geq$$

$$\geq x^4 \cdot 2yz + y^4 \cdot 2xz + z^4 \cdot 2xy.$$

Отсюда

$$x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

11.6. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 – действительные числа, которые удовлетворяют соотношению $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$. Докажите, что уравнение

$$x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (a_1a_2 + b_1 + b_2)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = 0$$

имеет по крайней мере один действительный корень.

Решение основано на разложении:

$$x^4+(a_1+a_2)x^3+(a_1a_2+b_1+b_2)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2=$$

$$=(x^2+a_1x+b_1)\cdot(x^2+a_2x+b_2).$$

Пусть $D_1=a_1^2-4b_1$ и $D_2=a_2^2-4b_2$ – дискрименанты данных двух квадратных трёхчленов. Тогда их сумма равна

$$D_1+D_2=a_1^2-4b_1+a_2^2-4b_2=a_1^2+a_2^2-4(b_1+b_2)=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2=(a_1-a_2)^2\geq 0.$$

Откуда и следует, что по крайней мере один из дискриминантов неотрицателен и у соответствующего квадратного уравнения есть действительные корни.

11.7. Четыре окружности B_1, B_2, B_3, B_4 расположены в одной плоскости так, что окружность B_2 касается окружности B_1, окружность B_3 касается окружности B_2, окружность B_4 касается окружности B_3, окружность B_1 касается окружности B_4. Все окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что все четыре точки касания лежат на одной окружности.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры соответствующих окружностей. Обозначим точки касания окружностей B_1 и B_2, B_2 и B_3, B_3 и B_4, B_4 и B_1 через K, L, M, N соответственно. Необходимо доказать, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

Первое решение. Проведем через точки K, L, M и N касательные, общие к соответствующим парам окружностей, – k, l, m, n (рис. 1).

Треугольник O_1KN равнобедренный ($\angle O_1KN=\angle O_1NK$), поэтому углы, образованные отрезком KN с прямыми k и n, равны между собой. Обозначим их величину через α. Аналогично обозначим величины углов, которые образуют отрезки KL, LM и MN с соответствующими касательными, через β, γ и δ (рис. 1).

Для того чтобы четырехугольник был вписанным в окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противолежащих углов его были равны между собой (и равны 180°). А это условие, очевидно, выполняется для четырехугольника $KLMN$, ибо

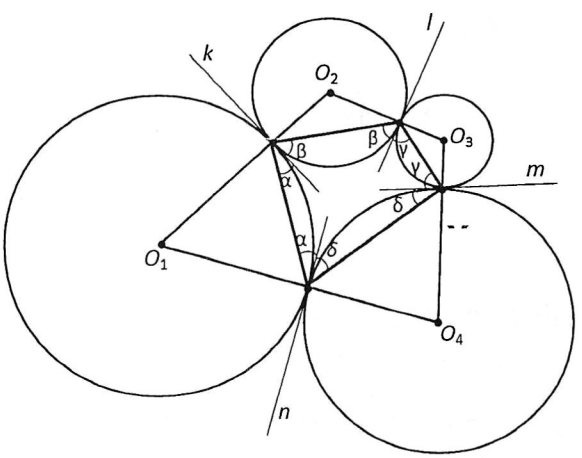

Рис. 1

$$\angle NKL+\angle LMN=\angle KLM+\angle MNK=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Второе решение. Четырехугольник $KLMN$ вписанный, если (и только если) серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке. Однако серединные перпендикуляры к сторонам KN, KL, LM и MN являются биссектрисами углов NO_1K, KO_2L, LO_3M и MO_4N соответственно (рис. 2).

Осталось заметить, что так как $O_1O_2 + O_3O_4 = O_2O_3 + O_4O_1 = = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ (R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы окружностей B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно), то четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ является описанным, и поэтому его биссектрисы пересекаются в одной точке.

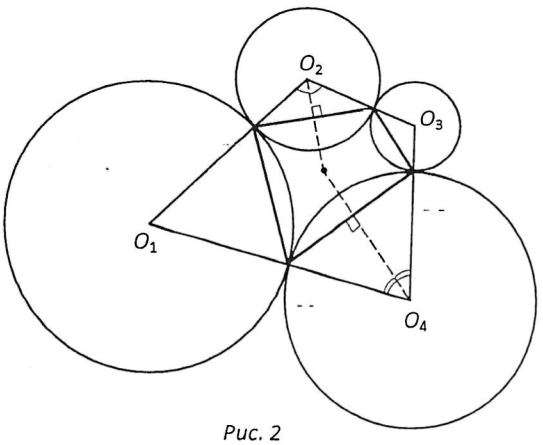

Рис. 2

11.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с n другими членами высшего совета;

2) для любых n членов высшего совета найдется (n+1)-й, который дружит с каждым из этих n.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: n+1.

Решение. n+1 быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым.

Покажем, что в совете не может быть (n+2)–го мага. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее (n+2)–х магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем n членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, …, X_{n-1} X_n. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что у Y нашлись (n+1) друг среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, …, X_{n-1} X_n и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется (n+2) магов.

10 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

10.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$a^3 + 64b^3 + 729c^3 \geq 6a^2(bc)^{1/2} + 48b^2(ac)^{1/2} + 162c^2(ab)^{1/2}.$$

Решение. Как известно, $(a-b)^2 \geq 0$. Отсюда получаем два очевидных неравенства:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \qquad (*)$$

и

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab. \qquad (**)$$

Применим эти неравенства к доказательству предложенного, но для удобства сделаем следующие замены:

$$a = x^2, \quad 4b = y^2, \quad 9c = z^2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно $x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$.
Теперь, используя (**), имеем

$$x^6 + y^6 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^4 - x^2y^2 + y^4\right) \geq \left(x^2 + y^2\right)x^2y^2.$$

Аналогично

$$x^6 + z^6 = \left(x^2 + z^2\right)\left(x^4 - x^2z^2 + z^4\right) \geq \left(x^2 + z^2\right)x^2z^2$$

и

$$y^6 + z^6 = \left(y^2 + z^2\right)\left(y^4 - y^2z^2 + z^4\right) \geq \left(y^2 + z^2\right)y^2z^2.$$

Складывая последние три неравенства и используя (*), получаем

$$2\left(x^6 + y^6 + z^6\right) \geq x^4\left(y^2 + z^2\right) + y^4\left(x^2 + z^2\right) + z^4\left(x^2 + y^2\right) \geq$$

$$\geq x^4 \cdot 2yz + y^4 \cdot 2xz + z^4 \cdot 2xy.$$

Отсюда

$$x^6 + y^6 + z^6 \geq xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

10.6. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = p$, где a, b, c и d – различные целые числа, p – простое число, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

Решение. Рассмотрим сначала многочлен, равный $P(x) - p$ с целыми коэффициентами, который имеет различные целые корни a, b, c и d. Тогда $P(x) - \mathrm{p} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Для того чтобы показать, что у многочлена $Q(x)$ целые коэффициенты участникам достаточно проанализировать последовательное деление «столбиком» многочлена $P(x) - p$ на приведенные линейные двучлены $(x - a)$, $(x - b)$ и т.д.

Допустим теперь, что многочлен $P(x)$ имеет целый корень y. Тогда $P(y) = 0$, а $-p = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d)Q(y)$. Заметим, что хотя бы четыре из пяти **множителей** в правой части различные: $(y-a)$, $(y-b)$, $(y-c)$ и $(y-d)$. Но в этом случае (даже если некоторые из этих множителей могут равняться «1», «–1» и «p») равенство невозможно. Значит многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

10.7. Пусть на плоскости даны 2023 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее 44 точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти 44 точки не обязательно входят в число заданных).

Схема решения. Поскольку даже с учетом «концевых точек» отрезок должен содержать 44 точки с целыми координатами, то всего на отрезке будет 7 «целочисленных» точек. При делении на 44 возможны 44 остатка – 0, 1, 2, 3, ..., 43. При делении абсцисс точек на 44 возможны 44 остатка, при делении ординат точек на 44 так же возможны 44 остатка, значит, различных пар остатков, которые можно полученных при делении обеих координат точек на 44 будет всего 44×44 = 1936. Поэтому если точек будет 2023, то среди них найдется по крайней мере две точки, обе координаты которых при делении на 44 дают равные остатки, т.е. имеют вид: $M_1(44l_1 + r_1; 44l_2 + r_2)$, $M_2(44m_1 + r_1; 44m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на 44 равные части, будут иметь целые координаты.

10.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с 2022 другими членами высшего совета;

2) для любых 2022 членов высшего совета найдется 2023-й, который дружит с каждым из этих 2022.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: 2023.

Решение. 2023 быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым. Покажем, что не может быть 2023. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 2023 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем 2022 членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, …, X_{2021}, X_{2022}. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 2023 друга среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, …, X_{2021}, X_{2022} и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 2023 магов.

9 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

9.5. Положительные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{x_1^2}{2x_1+3x_2}+\frac{x_2^2}{2x_2+3x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{2x_n+3x_1}>\frac{1}{12}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a^2}{2a+3b}>\frac{2a-b}{12}$ для любых положительных a и b. Действительно,

$$\frac{a^2}{2a+3b}-\frac{2a-b}{12}=\frac{12a^2-4a^2-4ab+3b^2}{12(2a+3b)}=$$

$$=\frac{8a^2-4ab+3b^2}{12(2a+3b)}=\frac{(2a-b)^2+4a^2+2b^2}{12(2a+3b)}>0.$$

Поэтому

$$\frac{x_1^2}{2x_1+3x_2}+\frac{x_2^2}{2x_2+3x_3}+\ldots+\frac{x_n^2}{2x_n+3x_1}>$$

$$>\frac{2x_1-x_2}{12}+\frac{2x_2-x_3}{12}+\ldots+\frac{2x_n-x_1}{12}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{12}=\frac{1}{12},$$

что и требовалось доказать.

9.6. Пусть на плоскости даны 50 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее семи точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти семь точек не обязательно входят в число заданных).

Схема решения. Поскольку с учетом «концевых точек» отрезок должен содержать еще пять точек с целыми координатами, то всего на отрезке будет 7 «целочисленных» точек. При делении на семь возможны семь остатков – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. При делении абсцисс точек на 7 возможны семь остатков, при делении ординат точек на 7 так же возможны семь остатков, значит, различных пар остатков, которые можно полученных при делении обеих координат точек на 7 будет всего 7×7=49. Поэтому если точек будет 50, то среди этих 50 точек найдется по крайней мере две точки, обе координаты которых при делении на 7 дают равные

остатки, т.е. имеют вид: $M_1(7l_1 + r_1;\ 7l_2 + r_2)$, $M_2(7m_1 + r_1;\ 7m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на семь равных частей, будут иметь целые координаты.

9.7. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $AD:DC = BE:EA = 1:2$. Пусть F - точка пересечения отрезков BD и CF. Докажите, что прямые AF и CE пересекаются под прямым углом.

Решение. По условию задачи точки E и D на сторонах правильного треугольника ABC выбраны так, что $BE = AD = \frac{1}{2}AE$.

Повернем треугольник ABC вокруг точки A на угол 120°. В результате получим еще один правильный треугольник AB_1C_1 (через B_1, C_1 и E_1 мы обозначаем образы точек B, C и E при указанном преобразовании, рис.

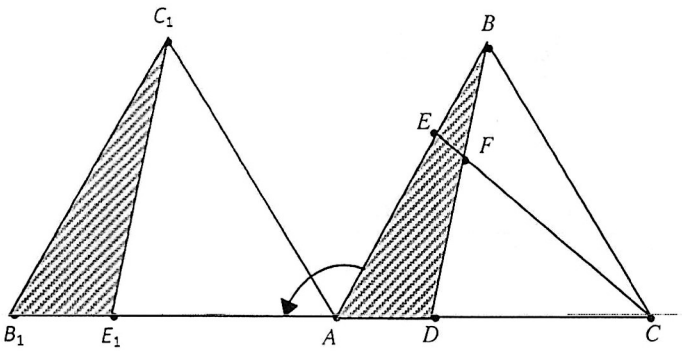

Рис. 1

1). Очевидно, отрезки B_1A и AC будут лежать на одной прямой.

Заметим, что $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A$. Отсюда $BD = C_1E_1$ и $BD \parallel C_1E_1$. Но отрезок C_1E_1 получен из отрезка CE в результате поворота на угол 120°, поэтому угол между отрезками BD и CE в исходном треугольнике ABC также равен 120°. Отсюда следует, что вокруг четырехугольника $AEFD$ можно описать окружность.

Пусть $AB = a$, тогда $AD = \frac{1}{3}a$, $AE = \frac{2}{3}a$. Применив к треугольнику AED последовательно теорему косинусов (это позволяет выразить через a длину отрезка ED) и теорему, обратную теореме Пифагора, приходим к заключению, что $ED \perp AC$.

Следовательно, в окружности, описанной вокруг четырехугольника $AEFD$, AE – диаметр. Но тогда $\angle AFE = 90^\circ$ как вписанный и опирающийся на диаметр, т. е. $AF \perp CE$.

9.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с десятью другими членами высшего совета;

2) для любых десяти членов высшего совета найдется 11-тый, который дружит с каждым из этих десяти.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: 11.

Решение. Одиннадцать быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым.

Покажем, что не может быть 12. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 12 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем десять членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 11 друзей среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10} и Z. Получили противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 12 магов.

8 класс

2-й вариант

2-й тур = 2-й день

8.5. Пусть на плоскости даны 26 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее пяти точек с целыми координатами (может быть, отличных от заданных точек).

Схематическое решение. При делении на пять возможны пять остатков – 0, 1, 2, 3, 4. При делении абсцисс точек на 5 возможны пять остатков, при делении ординат точек на 5 так же возможны пять остатков, значит, различных пар остатков, полученных при делении обеих координат точек на 5 будет всего 5·5=25. Поэтому среди 26 данных точек найдется по крайней мере 2 точки, обе координаты которых при делении на 5 дают равные остатки, т.е. имеют вид: $M_1(5l_1 + r_1; 5l_2 + r_2); M_2(5m_1 + +r_1; 5m_2 + r_2)$. Точки, делящие отрезок M_1M_2 на пять равных частей, будут иметь целые координаты.

8.6. Демонологу для призыва демона требуется найти такое наибольшее простое число p, что простым окажется и число $2023p^2 - 99124$. Помогите ему это сделать.

Ответ: 7.

Решение. Так как $p = 3$ не подходит, ибо тогда значение выражения $2023p^2 - 99124 < 0$ и не может быть простым числом, то p не делится на 3. Значит, при делении на 3 число p^2 дает в остатке 1, число $2023p^2$ также дает в остатке 1, а число $2023p^2 - 99124$ дает в остатке 0. Значит, простым число $2023p^2 - 99124$ может быть только, если $2023p^2 - 99124 = 3$. Тогда $2023p^2 = 99127$, $p^2 = 49$, $p = 7$.

8.7. а) $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). M – середина стороны AB. Обозначим площадь треугольника AMD через S_1, а площадь четырехугольника $MBCD$ – через S_2. Докажите, что $1 < \frac{S_2}{S_1} < 3$.

б) $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). M – точка на луче BA такая, что $AB:AM = n$ Обозначим площадь треугольника AMD через S_1, а площадь четырехугольника $MBCD$ – через S_2. Определите все возможные значения, которые может принимать отношение площадей $S_2 : S_1$.

Ответ. б) при $1 < n \leq 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n-1) \cup (n+1; 2n+1)$;

при $n > 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n+1)$.

Решение. а) Пусть $BC = a$, $AD = xa$, где $x > 1$, высота MK, опущенная из вершины M треугольника AMD – h. Тогда высота трапеции $ABCD$ – $BH = 2h$, поскольку MK – средняя линия треугольника ABH. Отсюда $S_1 = \frac{xah}{2}, S_{ABCD} = \frac{a+xa}{2} \cdot 2h = a \cdot (x+1), S_2 = S_{ABCD} - S_1 = a \cdot (x+1) - \frac{xah}{2} = \frac{ah}{2}(x+2)$. Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}.$$

Но $x > 0$, т.е. $\frac{S_2}{S_1} > 1$. Далее, поскольку $x > 1$, то $\frac{2}{x} < 2$ *и.* $\frac{S_2}{S_1} < 3$.

б) Пусть $BC = a$, $AD = xa$, где $x > 1$ M на стороне AB, высота MK, опущенная из вершины M треугольника AMD – h. Тогда высота трапеции $ABCD$ – $BH = nh$. Отсюда $S_1 = \frac{xah}{2}, S_{ABCD} = \frac{a+xa}{2} \cdot nh = ah(x+1)\frac{n}{2}, S_2 = S_{ABCD} - S_1 = \frac{anh}{2}(x+1) - \frac{xah}{2} = \frac{ah}{2}\big((x+1)n + n\big)$. Тогда

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x(n-1)+n}{x} = n - 1 + \frac{n}{x}.$$

Но $x > 0$, т.е. $\frac{S_2}{S_1} > n - 1$. Далее, поскольку $x > 1$, то $\frac{n}{x} < n$ и. $\frac{S_2}{S_1} < 2n - 1$.

Покажем, что для любого $k \in (n-1; 2n-1)$ уравнение $\frac{S_2}{S_1} = k$ имеет решение.

$$\frac{x(n-1)+n}{x} = k \leftrightarrow x(n-1) + n = xk \leftrightarrow x(k-n+1) = n \leftrightarrow$$

$$x = \frac{n}{k-n+1} = \frac{k-1}{k-n+1} - 1 > 0, \text{т.к.}\, k > n - 1.$$

Это показывает, что все значения отношений площадей из указанного интервала достижимы.

Пусть теперь M на продолжении стороны BA за точку A. Проводя все те же выкладки, что и выше, получим $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x(n+1)+n}{x} = n + 1 + \frac{n}{x}$. Значит,

$$n + 1 < \frac{S_2}{S_1} < 2n + 1.$$

Как и выше показывается, что все указанные значения достижимы.

Отсюда получаем

Ответ: при $1 < n \leq 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n-1) \cup (n+1; 2n+1)$;

при $n > 2$ $\frac{S_2}{S_1} \in (n-1; 2n+1)$.

8.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с девятью другими членами высшего совета;

2) для любых девяти членов высшего совета найдется десятый, который дружит с каждым из этих девяти.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?

Ответ: 10.

Решение. Десять быть может, если каждый член высшего совета дружит с каждым.

Покажем, что не может быть 11. Допустим противное, и в высшем совете имеется не менее 11 магов. Тогда среди них найдется двое X_1 и X_2, не дружащих друг с другом. Выберем девять членов высшего совета магов X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. Согласно факту 2 найдется член высшего совета Y, который дружит с X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. И точно также найдется член высшего совета Z, который дружит с X_1, Y, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9. Заметим, что Z не может быть X_2, так как X_2 не дружит с X_1. Получили, что Y нашлось 10 друзей среди членов высшего совета – это X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9 и Z. Противоречие первому факту, значит, предположение неверно и в высшем совете не имеется 11 магов.