I этап олимпиады по математике (школьный)

10 класс

1. Все пятизначные числа, составленные из цифр от **1** до **5** без повторений, занумерованы в порядке возрастания. Какой номер имеет число 43521?

Решение. Все числа, начинающиеся с цифр 1, 2 или 3, меньше данного числа. Тогда на остальных местах цифры могут стоять в произвольном порядке, то есть их в каждом случае по 4! Значит, чисел, начинающихся с 1, 2 или 3, в точности 3·4! = 72 . Кроме того, меньше данного будут все числа, начинающиеся с 41 или 42. Таких чисел будет 2·3! = 12 . Чисел, начинающихся с 431 или 432, будет 2·2! = 4, и они также меньше данного. И еще одно число, меньшее данного: 43512. Итого 72+12+4+1 = 89 чисел. Следовательно, данное число имеет номер 90.

Ответ: номер 90

2. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности равен трети одной из высот треугольника.

Решение. Пусть длины сторон треугольника *ABC* равны *a, b, c,* причем $a \le b \le c$. Тогда $2b = a+c$ и $2\cdot S_{ABC} = r(a + b + c) = 3rb$, где *r*- радиус вписанной окружности. С другой стороны $2\cdot S_{ABC} = h_b\cdot b$. Поэтому $r = h_b/3$

3. Докажите, что если $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1,$ то $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0.$

Решение. Легко видеть, что $a+b+c \ne 0$.

Умножим данное равенство почленно на $a + b + c$. Получим

$\dfrac{a(a+b+c)}{b+c}+\dfrac{b(a+b+c)}{c+a}+\dfrac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c.$ Преобразуем первую дробь:

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}=\frac{a^2}{b+c}+a.$$

Преобразуем таким же образом два других слагаемых и перенесем все члены в левую часть. После приведения подобных слагаемых получим требуемое равенство.

4. Найти наименьшее значение функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2-8x-12y+52}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}$$

Решение. Преобразуем выражение к виду: $z=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$.

Геометрически эту функцию можно расценивать как расстояние от точки *M(x;y)* до фиксированных точек *A(4; 6)* и *B(-3; 2)*. Сумма расстояний будет наименьшей, если точка *M(x;y)* лежит на отрезке *AB*. В самом деле, пусть *M(x;y)* не лежит на отрезке *AB*, тогда имеем треугольник *ABM*. По неравенству треугольника *AM* + *MB* > *AB*, если же точка *M* принадлежит отрезку *AB*, то *AM* + *MB* = *AB*. Вычислим длину отрезка *AB:* $z=\sqrt{(4+3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$.

Ответ: $z_{\min}=\sqrt{65}$

5. При каких *n* можно расставить целые числа от 1 до *n* по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась нацело на число, следующее за ним по часовой стрелке?

Решение. Рассмотрим не сами числа, а их остатки при делении на 2. Несложно заметить, что на окружности не могут стоять следующие остатки: 1,0,0. Отсюда следует, что если на окружности стоят подряд два нуля, то и предыдущее перед ним ними число равно нулю. Рассуждая таким образом дальше, можно сделать вывод, что все остатки будут равны нулю. Это означает, что все числа будут четными. Но такой вариант невозможен, так как на окружности обязательно должно быть записано одно нечетное число. Пусть теперь по окружности нет двух подряд идущих нулей. Тогда числа (остатки) будут расставлены так: 1, …, 1, 0, 1,…, 1,0, 1, 0,… Тут нули вообще могут отсутствовать. Причем число единиц в нашей группе не меньше двух. Отсюда следует, что количество нечетных чисел превышает количество четных как минимум в два раза. Такое возможно лишь при *n* = 1 и *n* = 3. Для этих решений *n* несложно построить требуемое расположение:

n =1: 1,1,1,…

n= 3: 1,2,3,1,2,3,..

Ответ: при *n* =1: 1,1,1,…

При *n*= 3: 1,2,3,1,2,3,…