I этап олимпиады по математике (школьный)

11 класс

1. Решите уравнение в целых числах:
$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0.$$
Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:
$$5x^2 + (8y - 2)x + 5y^2 + 2y + 2 = 0;$$
$$D = (8y - 2)^2 - 4 \cdot 5(5y^2 + 2y + 2) =$$
$$= 64y^2 - 32y + 4 - 100y^2 - 40y - 40 =$$
$$= -36(y^2 + 2y + 1 = -36(y + 1)^2).$$
Для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы $D = 0$.Это возможно при $y = -1$,тогда $x = 1$.
Ответ:$(1; -1)$.

2. Докажите, что $\sin^6 x + \cos^6 x \geq 0{,}25$.
Решение.
Воспользуемся формулой суммы кубов:
$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= 1 \cdot ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$
Так как $\sin^2 2x \leq 1$, то $-\frac{3}{4}\sin^2 2x \geq -\frac{3}{4}$, а значит, $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \geq 1 - \frac{3}{4}$, $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \geq 0{,}25$.
Ответ: доказано.

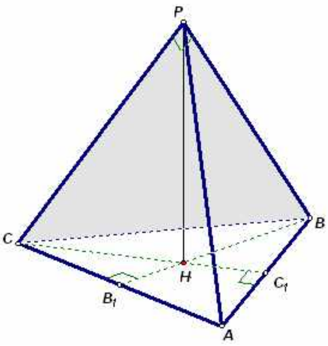
3. Из 45 монет 20 настоящих и 25 фальшивых, причем каждая фальшивая весит на один грамм меньше каждой настоящей. Взяли одну монету. Можно ли за одно взвешивание на точных весах (с двумя чашками и стрелкой) определить, является ли эта монета настоящей?
Решение.
Разобьем оставшиеся 44 монеты на две кучки по 22, и сравним их вес. Если веса кучек различаются на нечетное число грамм, то среди них – нечетное число фальшивых, так что взятая монета - настоящая (и наоборот).
Ответ: можно.

4. В тетраэдре *PABC* высота, опущенная из вершины *P*, проходит через точку пересечения высот треугольника *ABC*. Найдите отношение площадей граней *PAB* и *PAC*, если $PC = 6 - \sqrt{2}$; $PB = 6 + \sqrt{2}$;
$BC = 2\sqrt{19}$.

Решение.

Пусть $PABC$ – данный тетраэдр, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC, H – ортоцентр этого треугольника. Заметим, что

$PB^2 + PC^2 = \left(6+\sqrt{2}\right)^2 + \left(6-\sqrt{2}\right)^2 = 76 = BC^2$, то есть $\Delta\ PBC$ – прямоугольный ($\angle BPC = 90°$(ÐBPC = 90° по теореме, обратной теореме Пифагора.



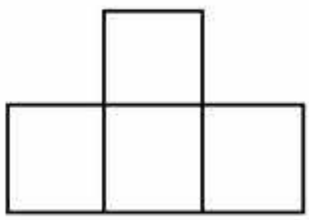
Так как прямая CC_1 является ортогональной проекцией прямой PC на плоскость ABC и $CC_1 \perp AB$, то $PC \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, по доказанному $PC \perp PB$, поэтому $PC \perp (APB)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), следовательно, $PC \perp PA$. Аналогично доказывается, что $PA \perp PB$.

Таким образом, треугольники PAB и PAC – прямоугольные (с прямыми углами при вершине P), тогда $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{PB}{PC}$,

$\frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{\left(6+\sqrt{2}\right)^2}{34} = \frac{38+12\sqrt{2}}{34} = \frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

Ответ: $\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$.

5. Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурами, указанными на рисунке (квадраты доски и фигуры одинаковы).



Доказательство. Используем шахматную раскраску доски. Всего получилось по 50 белых и черных квадратов. Одна фигурка, как бы не располагалась на доске, покрывает три квадрата одного цвета и один другого. Пусть 50 черных квадратов мы покрываем n раз по 3, и m по одному. То есть,$50 = 3 \cdot n + 1 \cdot m$. Но при этомодновременно будут покрываться и белые квадраты, и для них соответственно придется написать $50 = 1 \cdot n + 3 \cdot m$. Если теперь решить систему $\begin{cases} 50 = 3 \cdot n + 1 \cdot m, \\ 50 = 1 \cdot n + 3 \cdot m, \end{cases}$ то получим, что $n = 12{,}5$ и $m = 12$. Так что целыми фигурками замостить доску 10×10 не удается.

Ответ: доказано.

I этап олимпиады по математике (школьный)

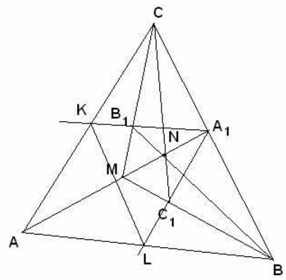
11 класс

1. Решите уравнение

$$(\sin x - (\sin x + \cos x)^{1/2})^{1/2} = \cos x$$

Решение. Заметим, что cos x $\geq$ 0 и sin x $\geq$(sin x + cos x)$^{1/2}$, но учитывая, что sin x $\leq$(sin x)$^{1/2}$, а значит и sin x $\leq$(sin x + cos x)$^{1/2}$ получим, sin x =(sin x + cos x)$^{1/2}$, откуда cos x = 0 и sin x = 1, следовательно x=(p /2)+2p n, n$\in$Z.
Ответ. x=(p /2)+2p n, n$\in$Z.

2. В треугольнике ABCM-середина медианы AA_1 , N-середина отрезка MA_1 , прямые CN и BN пересекают прямые MB и MC соответственно в точках C_1 и B_1. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.
Решение. К треугольнику MCA_1 и точкам B_1, N, B применим теорему Менелая:
$\frac{MB_1}{B_1C} \times \frac{CB}{A_1B} \times \frac{MN}{NA_1} = 1$, откуда учитывая , то что A_1-середина BC и N-середина MA_1 получаем, что $\frac{MB_1}{B_1C} = \frac{1}{2}$, т.е. точка B_1 делит медиану CM треугольника ACA_1 в отношении 2:1. Следовательно B_1 -точка пересечения медиан треугольника ACA_1 и поэтому A_1B_1- медиана треугольника ACA_1 и пересекает сторону AC в ее середине K, но тогда A_1K -средняя линия треугольника ABC и поэтому она параллельна прямой AB и следовательно прямая A_1B_1 параллельна прямой AB, аналогично получаем, что прямая A_1C_1 параллельна прямой BC. Далее, если L- середина стороны AB, то рассмотрев треугольник A_1KL получим, что $\frac{A_1B_1}{B_1K} = \frac{A_1C_1}{C_1L} = 2$, поэтому прямые B_1C_1 и KL параллельны, но прямая KL,как средняя линия треугольника ABC параллельна прямой BC и поэтому прямые B_1C_1 и BC параллельны. Итак, у треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC соответствующие стороны параллельны и поэтому они подобны.



3. Может ли сумма 1000 последовательных нечётных чисел быть седьмой степенью натурального числа?
Решение. Пусть (n-999), (n-997), ..., (n-1), (n+1), ..., (n+999) - тысяча последовательных нечётных чисел. Тогда их сумма S=(n-999)+(n-997)+...+(n-1)+(n+1)+...+(n+999)=1000n. Если n=10^4, то S=1000n=10^7, то есть седьмой степени натурального числа.
Ответ. Да.

4. Для положительных чисел x, y, z выполнено равенство

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{y^2}{x}.$$

Докажите, что хотя бы два из чисел x, y, z равны между собой.

Решение. Освободившись от знаменателя, приведём наше равенство к виду $x^3z-x^3y+z^3y-z^3x+y^3x-y^3z=0$.

Разложив левую часть на множители, получим $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)=0$. Заметим, что при положительных x, y, z последняя скобка положительна. Таким образом, если все числа различны, то все множители не равны нулю. Противоречие.

5. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

Решение. Первую точку можно выбрать десятью способами. Каждую из следующих восьми точек можно выбрать двумя способами, так как она должна быть соседней с одной из ранее выбранных точек (иначе получится самопересекающаяся ломаная). Поскольку начало и конец при таком подсчёте не различаются, результат нужно разделить на 2. Следовательно, всего имеется $10\cdot 2^8/2 = 1280$ ломаных.

I этап олимпиады по математике (школьный)

11 класс

1. Решите уравнение $(1+x)(1+2x)(1+3x)=4(4+x)(4+2x)(4+3x)$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$(1+3x)(1+3x+2x^2)=4(3+1+3x)(16+12x+2x^2)$

Сделаем замену $u=1+3x;\, v=2x^2$. Получим $u_1=-4,\, u_2=\frac{-2v-24}{10}$.

Возвращаясь к замене, получим: $x_1=-\frac{5}{3};\, x_{2,3}=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{4}$

Ответ: $x_1=-\frac{5}{3};\, x_{2,3}=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{4}$

2. В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла BAD. K – точка пересечения биссектрисы с диагональю DB, M – точка пересечения

биссектрисы со стороной ВС. Во сколько раз площадь параллелограмма ABCD больше площади треугольника BKM, если AB:AD=1:3?
Ответ: 24.

3. На координатной плоскости Oxy нарисована парабола $y = \frac{1}{2}x^2$. Прямая, проходящая через точку (0;2), пересекает параболу в точках А и В. Найдите величину угла АОВ.

Решение. Точки А и В удовлетворяют системе $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = kx + 2 \end{cases}$.
Значит, абсциссы точек А и В являются корнями уравнения $x^2 - 2kx - 4 = 0$
$OA^2 = (k^2 + 1)x_1^2 + 4kx_1 + 4$; $OB^2 = (k^2 + 1)x_2^2 + 4kx_2 + 4$
$AB^2 = (k^2 + 1)(x_2 - x_1)^2$
По теореме косинусов для треугольника АОВ косинус угла АОВ равен 0, значит, искомый угол равен 90°.
Ответ: 90°.

4. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству $x^3 + y^3 = 27 - 9xy$. Найдите все возможные значения суммы $x+y$.
Решение. Обозначим $x + y = a; y = a - x$.
По условию 0=$x^3 + y^3 - 27 + 9xy = x^3 + (a - x)^3 + 9x(a - x) - 27 =$
$= x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 + 9ax - 9x^2 - 27 =$
=$(a - 3)(3x^2 - 3ax + a^2 + 3a + 9)$
Поэтому возможны два случая:
1) a-3=0, a=x+y=3
2) $3x^2 - 3ax + a^2 + 3a + 9 = 0$
$D = -3(a + 6)^2 \geq 0; a = -6$
Ответ: 3;-6.

5. Решите неравенство $\sqrt{sin^4x + 1} + \sqrt{cos^4x + 1} \leq 5$
Решение. Введем в рассмотрение три вектора $\vec{a}(sin^2x; 1), \vec{b}(cos^2x; 1), \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{sin^4x + 1}, |\vec{b}| = \sqrt{cos^4x + 1}, |\vec{c}| = \sqrt{(sin^2x + cos^2x)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{5}$
По неравенству треугольника $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{c}|$т. е. $\sqrt{sin^4x + 1} + \sqrt{cos^4x + 1} \geq \sqrt{5}$. Отсюда получаем равенство $\sqrt{sin^4x + 1} + \sqrt{cos^4x + 1} = \sqrt{5}$, из которого

следует, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарные. Следовательно, имеем $\frac{sin^2x}{cos^2x} = 1; tgx = \pm 1, x = \frac{\pi}{4}(23k + 1), k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(23k + 1), k \in Z.$

I этап олимпиады по математике (школьный)

11 класс

Задания

1. Решите уравнение $\cos^2(\sqrt{2}x) - \sin^2 2x = 1$.

2. Найдите все значения параметра a, такие, что уравнение $x^2 - 4ax + 5a = 0$ имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 6.

3. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Найдите область определения функции $f(f(x))$.

4. На боковых ребрах AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию ABC. Точка D_1 лежит в основании ABC. Докажите, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ не превосходит $\frac{4}{27}V$, где V – объем тетраэдра $ABCD$.

5. Докажите, что уравнение $y^2 - x^4 = 2013x^5$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

Решения

1. $x = 0$. Левая часть уравнения не превосходит единицы, причем она может равняться единице лишь при условии одновременного выполнения двух равенств: $\cos^2(\sqrt{2}x) = 1$ и $\sin 2x = 0$. Отсюда $\sqrt{2}x = \pi n$ и $2x = \pi k$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\frac{\pi n}{\sqrt{2}} = \frac{\pi k}{2}$, т.е. $2n = \sqrt{2}k$ при некоторых целых n, k. Поскольку $\sqrt{2}$ – иррациональное число, то из последнего равенства следует, что k обязано равняться нулю. Значит, $k = n = 0$.и $x = 0$.

2. $a = -\frac{3}{8}$. Из условий задачи следует, что должно выполняться условие $D = 4(4a^2 - 5a) > 0$ и равенство $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 1`0a = 6$ (здесь мы использовали теорему Виета). Решая последнее уравнение относительно a, получим $a = \frac{5 \pm 11}{16}$. Корень $a_2 = -\frac{3}{8}$ этого уравнения удовлетворяет неравенству $4a^2 - 5a > 0$, а корень $a_1=1$ – нет.

3. $x \in (-\infty, -\sqrt{5} + 1] \cup \{0\} \cup \{2\} \cup [1 + \sqrt{5}, +\infty)$. Обозначим $u = \sqrt{x^2 - 2x}$. Имеем: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ или $x \geq 2$. Для функции $f(f(x)) = f(u)$ область определения должна удовлетворять совокупности неравенств $u \leq 0$ или $u \geq 2$, т.е. $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$ или $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 2$. Первое из этих неравенств может выполняться лишь в случае нулевого подкоренного выражения, т.е. при $x = 0$ или $x = 2$. Решим второе неравенство: $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{5}$, или $x \geq 1 + \sqrt{5}$.

4. Обозначим через x коэффициент подобия тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$. Тогда площади оснований тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ относятся как x^2, а высоты – как $(1 - x)$. Получаем задачу на максимум для функции $y = x^2(1 - x)$. Решая эту задачу с помощью производной $y' = 2x - 3x^2$, находим критическую точку $x_0 = \frac{2}{3}$, в которой достигается максимум $y(x_0) = \frac{4}{27}$.

5. Перепишем уравнение в виде $y^2 = x^4(2013x + 1)$. Разрешимость этого уравнения в натуральных числах равносильна тому, что скобка $2013x + 1$ представляет собой точный квадрат:

$$2013x + 1 = t^2 \Leftrightarrow (t-1)(t+1) = 2013x.$$

В качестве t достаточно взять числа вида $t = 2013k + 1$, где k – любое натуральное число. Тогда $2013k(2013k + 2) = 2013x \Leftrightarrow x = k(2013k + 2)$. Отсюда $y = x^2t = k^2(2013k + 2)^2(2013k + 1)$. Поскольку k – любое натуральное число, утверждение доказано.