

І этап олимпиады по математике (школьный)

6 класс

1. Расшифруйте числовой ребус

$$\text{СЕЛ} \times \text{СЕЛ} = \text{ПОДСЕЛ}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.

Ответ: $625 \times 625 = 390625$

2. К празднику были срезаны розы: белых и розовых – 400 штук, розовых и красных – 300, белых и красных – 440. Сколько роз каждого цвета было срезано?

Решение.

1. $(400 + 300 + 440) : 2 = 570$ (роз) – было всего;
2. $570 - 400 = 170$ (роз) – красных;
3. $440 - 170 = 270$ (роз) – белых;
4. $300 - 170 = 130$ (роз) – розовых.

Ответ: к празднику были срезаны розы: белых – 270, розовых – 130, красных – 170.

3. Из двух городов, расстояние между которыми 320 км, одновременно навстречу друг другу выходят два поезда. Один идёт со скоростью 45 км/час, другой – 35 км/час. Вместе с первым поездом вылетает ласточка со скоростью 50 км/час и летит навстречу второму поезду. Встретив этот поезд, ласточка поворачивает обратно и летит навстречу первому поезду. Встретив этот поезд, она летит опять навстречу второму и так далее. Какое расстояние пролетит ласточка, пока поезда не встретятся?

Решение.

1. $45 + 35 = 80$ (км/ч) – скорость сближения поездов;
2. $320 : 80 = 4$ (ч) – время движения поездов, а также время полета ласточки;
3. $50 \cdot 4 = 200$ (км) – такое расстояние пролетит ласточка за время до встречи поездов.

Ответ: 200 км.

4. Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Чему равен периметр треугольника, если разность наибольшей и наименьшей сторон равна 6 см?

Решение.

1. $4 - 2 = 2$ (части) – разница между большей и меньшей стороной;
2. $6 : 2 = 3$ (см) -1 часть;
3. $2 + 3 + 4 = 9$ (частей) – в периметре;

4. $3 \cdot 9 = 27$ (см) – периметр.

Ответ: 27 см.

5. За весну Винни-Пух сбавил в весе на 25 %, а за лето прибавил 20 %, за осень похудел на 10 %, за зиму прибавил 20 %. Похудел он или поправился за год?

Решение.

$$0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 = 0,972 < 1$$

Ответ: похудел.

I этап олимпиады по математике (школьный)

6 класс

1. Решите ребус: $ABBA + A + B = CDDA$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные. Объясните, как получен ответ.

Решение. Из того, что числа $ABBA$ и $CDDA$ оканчиваются на одинаковую цифру, следует, что $A + B$ оканчивается на 0 т.е. $A + B = 10$, $ABBA + 10 = CDDA$. Заметим теперь, что первые цифры у чисел $ABBA$ и $CDDA$ различны, откуда следует, что был переход через тысячу. Но это возможно только в том случае, когда $B = 9$, откуда получаем $A = 1$, $C = 2$, $D = 0$.

Ответ: $1991 + 1 + 9 = 2001$.

2. Можно ли разложить девять гирек массой от 1 до 9 грамм в три одинаковых коробки так, чтобы в одной коробке было две гирьки, в другой – три, а в третьей – четыре, и при этом масса коробок с гирями была одинаковой?

Решение. Сумма масс девяти данных гирек равна $1+2+3+\dots+9=45$ (г), следовательно, масса гирек в каждой коробке должна быть равна 15 граммам. Все возможные варианты размещения гирек по коробкам показаны в таблице.

Ответ: Да, можно.

I	II	III
9+6	8+5+2	7+4+3+1
9+6	8+4+3	7+5+2+1
9+6	7+5+3	8+4+2+1
8+7	9+5+1	6+4+3+2
8+7	9+4+2	6+5+3+1
8+7	6+5+4	9+3+2+1

3. В некотором городе живут три типа людей: такие, которые всегда говорят правду (правдолюбцы), всегда говорят неправду (лжецы), и шутники, в зависимости от настроения, говорят либо правду, либо неправду. В этом городе кто-то угнал машину у градоначальника. Полиция задержала троих человек: Джона, Джека и Джо. Полиции было известно, что один из них – лжец, один – всегда говорит правду, а про третьего точно неизвестно, говорит ли он правду или ложь. Полиция также знала, что один из них угнал машину, и что этот человек всегда говорит правду. Три человека сказали следующее:

Джон: Я не виновен.

Джек: Он говорит истинную правду.

Джо: Я угнал машину.

Кто угнал машину и кто лжец?

Решение. Джон сказал: «Я не виновен». По условию задачи два человека являются невиновными: лжец и шутник. Джон не может быть лжецом, так как лжец, в данном случае, сказал бы, что он виновен. Джон не может быть и правдолюбцем, так правдолюбец виновен, и он не сможет сказать неправду. Остается, что Джон шутник, при этом он говорит правду, так как он, действительно невиновен. Джек подтверждает невиновность шутника Джона, т.е. Джек говорит правду, поэтому он не лжец, а правдолюбец, Джек и угнал машину. Джо – лжец и как положено лжецу, он всех обманывает, говоря, что он угнал машину.

Ответ: Джек угнал машину. Джо – лжец.

4. Пятеро мальчиков Андрей, Боря, Вася, Гена и Дима провели турнир по настольному теннису, играя пара против пары; причем каждая пара, какую, только можно составить из них, против каждой из остальных возможных пар сыграла ровно один матч. В результате Андрей оказался победителем в общей сложности в 10 играх, а Борис – в 8 играх; Вася потерпел поражение в 9 играх, а Гена – в 7. (Ничьих в теннисе нет). Сколько игр выиграл и сколько проиграл Дима?

Решение. Подсчитаем количество всех игр. Так как в каждой игре не участвует ровно 1 мальчик, то существует ровно 5 различных способов выбрать четверку играющих мальчиков (каждому не играющему мальчику соответствует четверка играющих, и наоборот). Далее, в каждой четверке мальчики могут ровно тремя различными способами разбиться на пары. Поэтому всего состоялось ровно $5 \cdot 3 = 15$ игр. Следовательно, если в каждой встрече мы каждому из двух мальчиков, выигравших встречу, будем присуждать по 1 очку, а проигравшим – 0 очков, то всего будет разыграно $15 \cdot 2 = 30$ очков. Кроме того, поскольку без участия данного мальчика 4 остальных могут провести, как уже отмечено, три игры, то каждый мальчик участвует ровно в 12 играх. Поэтому у каждого из них сумма выигрышей и проигрышей равна 12. Согласно условию задачи Андрей, Боря, Вася и Гена набрали в общей сложности $10 + 8 + (12 - 9) + (12 - 7) = 26$ очков. Поэтому Дима набрал $30 - 26 = 4$ очка, т. е. выиграл 4 игры и, значит, проиграл $12 - 4 = 8$ игр.

Ответ: 4 игры выиграл и 8 игр проиграл.

5. Вася, Петя и Коля делят некоторое количество конфет. Сначала Вася взял себе 20% всех конфет и еще 12 конфет, а затем Петя взял 25% оставшихся конфет и еще 15 конфет, и, наконец, Коля взял 30% оставшихся после этого конфет и еще 21 конфету. В результате такой дележки все конфеты оказались разобранными. Кто из мальчиков взял конфет больше?

Решение.

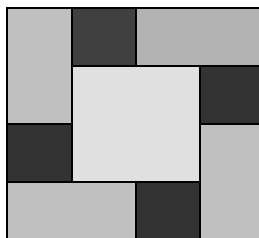
Так как по условию Коля взял 30% оставшихся после взятий Васи и Пети конфет и еще 21 конфету и после этого конфеты оказались разобранными, то 21 конфета составила 70% числа конфет, оставшихся после взятий Васи и Пети. Следовательно, Коля взял $21 : 70 \cdot 100 = 30$ конфет. Эти 30 конфет и те

15, которые взял Петя, составляли согласно условию $100\% - 25\% = 75\%$ конфет, оставшихся после того, как угостился Вася. Это значит, что после Васи осталось $(30 + 15):75 \cdot 100 = 60$ конфет. Из них Петя взял $60 \cdot 25:100 + 15 = 30$ конфет. Далее, 60 конфет, оставшихся после Васи, плюс еще 12 взятых им конфет составляют $100\% - 20\% = 80\%$ от первоначального количества конфет. Поэтому вначале было $72:80 \cdot 100 = 90$ конфет, из которых Вася забрал $20:100 \cdot 90 + 12 = 30$ конфет. Мальчики взяли конфет поровну.

Ответ: мальчики взяли конфет поровну.

6. Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

Решение: например,



I этап олимпиады по математике (школьный)

6 класс

1. Социологи провели опрос «Что Вы предпочитаете пить по утрам: чай или кофе?» 37,5% опрошенных ответили «чай», 56,25% ответили «кофе», а 9 человек не ответили ничего. Сколько человек опросили социологи?

9 человек, которые ничего не ответили, составляют $100 - 37,5 - 56,25 = 6,25\%$, т. е. 16 часть от общего количества опрошенных. Значит, всего было опрошено 144 человека

2. В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми (бездетных семей нет). Известно, что у каждого мальчика есть сестра, и что мальчиков больше чем девочек. Кого больше в этом доме: детей или взрослых?

Поскольку в каждой семье есть дети, и у каждого мальчика есть сестра, то в каждой семье есть хотя бы одна девочка, т. е. количество девочек не меньше, чем количество семей. Мальчиков больше, чем девочек, значит, их количество больше чем количество семей. Так как взрослых в каждой семье двое, то общее количество детей, больше чем общее количество взрослых.

3. Найдите целое число, которое в 7 раз больше цифры его единиц.

Обозначим искомое число $10a+b$. Тогда $10a+b=7b$, отсюда $5a=3b$; значит b делится на 5, но b - ненулевая цифра, т.е. $b=5$, тогда $5a=15$, $a=3$, следовательно, само число 35

4. Винни-Пух съест бочонок меда за 14 дней, а с другом Пятачком скушают тот же бочонок за 10 дней. За сколько дней скушает этот бочонок один Пятачок?

За 35 дней

5. Два мотоциклиста одновременно выехали из Гродно в Скидель. Первый весь путь ехал со скоростью 25 км/ч, а второй первую половину пути ехал со скоростью 30 км/ч, а вторую половину – со скоростью 20 км/ч. Кто из них раньше прибыл в Скидель?

Второй мотоциклист 1 км первой половины пути проезжает за 2 мин, а 1 км второй половины пути – за 3 мин. Значит средняя скорость второго мотоциклиста 2 км за 5 мин, или $\frac{2 \cdot 60}{5} = 24 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$. Таким образом первым придет в Скидель первый мотоциклист.

І этап олимпиады по математике (школьный)

6 класс

Задания

1. Даны 16 чисел: 1, 11, 21, 31 и т.д. (каждое следующее на 10 больше предыдущего). Можно ли расставить их в таблице 4×4 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, не делилась на 4? Ответ обоснуйте.
2. Из книги выпал кусок, первая страница которого имела номер 365, а номер последней страницы записывался теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц занимает повесть, выпавшая из книги? Ответ обоснуйте.
3. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:
 - Смит самый высокий;
 - играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
 - играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
 - когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
 - Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами? Ответ обоснуйте.
4. Сколько семерок встретится в записи всех чисел от 1 до 2019? Ответ обоснуйте.
5. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2 , а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2 . Каковы размеры зала? Ответ обоснуйте.

Решения

1. **Решение:** Обратите внимание: разность чисел в соседних клетках может быть 10, 30, 50 и т.д. и не может быть 20, 40, 60 и т.д. Это сделать можно. Один из вариантов ответа приведен в таблице.

1	11	21	31
51	41	71	61
81	91	101	111
131	121	151	141

Ответ: Можно.

2. **Решение:** Номер последней страницы больше номера первой страницы, поэтому он начинается либо с цифры 5, либо с цифры 6. А так как этот номер должен быть числом четным, то цифра 6 – последняя цифра номера. Следовательно, номер на последней странице – 536, а сама повесть занимает $536 - 364 = 182$ страницы.

Ответ. 182 страницы.

3. **Решение:** Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Так как музыкантов трое, инструментов шесть, и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют.

Из условия 4 следует, что Смит не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Браун не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Брауна – альт и кларнет. Занесем это в таблицу, а оставшиеся клетки столбцов "альт" и "кларнет" заполним нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит			0	0		0
Вессон			0	0		

Из таблицы видно, что на трубе может играть только Вессон. Из условий 1 и 2 следует, что Смит не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Браун, ни Смит, то скрипачом является Вессон. Оба инструмента, на которых играет Вессон, теперь определены, поэтому остальные клетки строки "Вессон" можно заполнить нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0		0	0		0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Из таблицы видно, что играть на флейте и на гобое может только Смит.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Ответ: Браун играет на альте и кларнете, Смит – на флейте и гобое, Вессон – на скрипке и трубе.

4. **Решение:** Подсчеты лучше вести по разрядам единиц, десятков и сотен в отдельности. В разряде единиц в каждом полном и неполном десятке есть одна семерка. Значит, в разряде единиц встретится 202 семерки. В разряде сотен встретится 200 семерок и в разряде тысяч еще 200 семерок.

Ответ. 602.

5. **Решение:** В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м^2 (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (рис. справа). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна $14 : 2 = 7$ (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра.