I этап олимпиады по математике (школьный)

7 класс

1. У моего телефона замечательный семизначный номер. Его первые цифры одинаковы, остальные четыре – тоже одинаковы. Более того, сумма всех семи цифр номера равняется числу, первая цифра которого совпадает с первой цифрой номера телефона, а вторая – с последней. Каков же мой номер телефона?

Решение. Пусть первая цифра номера – x, а вторая – y. Тогда, с одной стороны, сумма цифр номера равна $3x+4y$, а с другой – $10x+y$. Следовательно, $3x+4y=10x+y$, т.е. $7x=3y$. Отсюда $x=3$, $y=7$ и мой номер телефона 3337777.

Ответ: 3337777.

2. Анна, Лада и Диана устроили соревнование по бегу на роликовых коньках. Вначале у всех было одинаковое количество конфет, но после каждого забега девочка, прибежавшая последней, отдавала девочке, занявшей первое место – 2 конфеты, а девочке, занявшей 2-ое место – 1 конфету. Не было ни одного забега, в котором первое или второе место заняли бы две девочки. После пяти забегов у Анны стало 18 конфет, у Лады – 8 конфет, у Дианы – 4 конфеты. Сколько раз каждая девочка занимала 1-ое, 2-ое или 3-е место?

Решение. Всего было $18+8+4 = 30$ конфет, или по 10 у каждой из 3-х девочек. Анна не выиграла все забеги, иначе имела бы $10+5\cdot2 = 20$ конфет, и не проиграла ни одного, иначе (если бы был один проигрыш) максимум имела бы $10+4\cdot2-3 = 15$ конфет. Так как за второе место дают одну конфету (число нечетное), а у Анны четное число конфет, значит, вторых мест у нее было четное количество раз, и это число 2 (4 вторых места не подходят, так как конфет не хватает). В итоге у Анны 3 первых и 2 вторых места. На Ладу и Диану остается: 2 первых, 3 вторых и 5 третьих мест. Ни Лада, ни Диана не могли проиграть 4 забега (тем более 5) иначе обанкротились бы. Количество конфет у них также четное, следовательно, кто проиграл 3 забега (- 9 конфет) занял второе место 1 раз (+ 1) (это Диана, у нее конфет меньше), а кто проиграл 2 забега (-6), занял 2 место 2 раза (+ 2). Первые места распределяются автоматически по одному каждой. Теперь распределим поименно: у Лады 1 первое, 2 вторых и 2 третьих (- 2 конфеты); у Дианы 1 первое, 1 второе и 3 третьих мест
(- 6 конфет).

Ответ: Анна 3 первых и 2 вторых места; Лада 1 первое, 2 вторых и 2 третьих; Диана 1 первое, 1 второе и 3 третьих мест.

3. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

Решение. Сразу ясно, что буква О означает цифру 0 (нуль), иначе не будет делимости на 90. Всего использовано 10 различных букв, значит, и зашифрованы все 10 цифр. Так как букве О соответствует цифра 0, то сумма всех цифр, соответствующих остальным девяти буквам, равна 45, т.е. кратна 9. Сумма Д+Е+В+Я+Н+С+Т делится на 9, а также Д+Е+В+Я+Т+К+А делится на 9. Значит, Н+С и К+А делятся на 9. Предположим, что СОТКА делится на 9, тогда С+Т+К+А делится на 9. Но раз К+А делится на 9, то и С+Т делится на 9. Имеем: Н+С и Т+С оба делятся на 9. Значит, Н и Т дают одинаковые остатки при делении на 9. Но из цифр это могут быть только 0 и 9, а 0 занят буквой О. Получили противоречие, значит, сделали неправильное предположение и СОТКА не делится на 9.

Ответ: Не может.

4. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей?

Решение. Две окружности могут пересечься в двух точках. Третья окружность пересечется с каждой из имеющихся окружностей тоже в двух точках, т.е. добавятся еще $2·2 = 4$ точки. Добавление каждой следующей окружности увеличивает число точек на величину, равную удвоенному количеству уже имеющихся окружностей. Итого: $2 + 2·2 + 2·3 + 2·4 +2·5 + 2·6 + 2·7 = 2·(1+2+3+4+5+6+7) = 56$.

Ответ: 56 точек.

5. В одном городе 20% семей, имеющих кошек, имеет также собак, 25% семей, имеющих собак, имеет также и кошек, а 20% всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Какой процент семей в этом городе имеет и кошек, и собак?

Решение: Пусть х семей имеет и кошек, и собак. По условию 20% (или 1/5) всех семей, имеющих кошек, имеет и собак. Значит, кошек имеет 5х семей. Поскольку 25% (или 1/4) семей, имеющих собак, имеет и кошек, то собак имеет 4х семей. Итак, х семей имеет и кошек, и собак, 4х семей – только кошек, 3х семей – только собак. Всего получается х+4х+3х = 8х семей, имеющих животных. По условию они составляют 80% всех семей в этом городе. Значит, всего в городе 8х:80·100 = 10х семей, среди них х семей имеет и кошек, и собак. Они составляют1/10, или 10%.

Ответ: 10% семей.

6. Произведение всех натуральных делителей числа n (включая и само n) оканчивается ровно на 15 нулей. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться число n?

Решение: Заметим, что число 400 оканчивается на 2 нуля, а произведение всех делителей этого числа ($400 = 2^4·5^2$) равно $1·2·4·8·16·5·25·10·50·20·100·40·200·80·400$. В этом произведении множитель 5 встречается ровно 15 раз (в 5, 10, 20, 40 и 80 – по одному разу и в 25, 50, 100, 200 и 400 – по два раза). Поскольку множитель 2 встречается заметно чаще, то все произведение оканчивается ровно на 15 нулей. Покажем, что любое число, оканчивающееся на 3 нуля, будет иметь на конце произведения всех делителей более 15 нулей. Действительно, пусть n= $k\cdot 10^3$, где k – натуральное число. Тогда среди его делителей будут все делители числа 1000, произведение которых равно $2\cdot4\cdot8\cdot5\cdot25\cdot125\cdot10\cdot50\cdot250\cdot20\cdot100\cdot500\cdot40\cdot200\cdot1000 = 10\cdot100\cdot1000\cdot10\cdot1000\cdot10000\cdot100\cdot100000\cdot1000$, и наконец, гораздо больше чем 15 нулей. Итак, наибольшее возможное число нулей на конце числа n равно 2.

Ответ: 2.

I этап олимпиады по математике (школьный)

7 класс

1. Существуют ли действительные числа a, b, c для которых выполняются равенства $a+b+c=5$, $ab+bc+ac=13$?

Ответ: не существуют. Из равенства $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$, следует что $a^2+b^2+c^2=5^2-2\cdot13=-1$, что невозможно.

2. В кинотеатре «Космос» на прошлой неделе показывали три новых фильма. Оказалось, что на каждом из фильмов присутствовало по 100 человек, причем 90 человек приходило только на один фильм, а 60 человек – ровно на два. Сколько человек приходили на все три фильма?

Ответ: 30 человек. Пусть х человек приходит на все три фильма. Те, кто приходил только на один фильм, купили 90 билетов, те кто приходил дважды, купили $2\cdot60=120$ билетов, те же, кто приходил трижды, купили 3х билетов. Так кА всего было продано $3\cdot100=300$ билетов, то составляем уравнение $90+120+3x=300$, $x=30$.

3. Треугольник ABC прямоугольный, AB – его гипотенуза. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы вне её отложены отрезки AK=AC и BM=BC. Найдите угол KCM.

ΔAKC и ΔBCM равнобедренные. По теореме о внешнем угле треугольника получаем: угол ACK равен углу AKC=1/2 угла BAC; Угол BCM равен углу BMC= ½ угла CBA. Тогда угол KCM равен сумме углов $BCA+BCM+ACK=90°+1/2(CBA+BAC)=90°+45°=135°$

4. Можно ли в клетках таблицы 4×4 расставить числа 1 и 2 так, что для любой клетки сумма чисел в ней и всех её соседях будет нечётной? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.

Ответ: Можно

1	2	2	1
2	2	2	2
2	2	2	2
1	2	2	1

5. Выясните, делится ли число $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2002}+2^{2003}$ на 3

Ответ: делится. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2002}+2^{2003}=(1+2)+(2^2+2^3)+\ldots+(2^{2002}+2^{2003})=3+2^2(1+2)+\ldots+2^{2002}(1+2)=3(1+2^2+\ldots 2^{2002}$. Так, как один из множителей 3 то и данное число делится на 3.

I этап олимпиады по математике (школьный)

7 класс

Задания

1. По кругу в некотором порядке записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Каждые три цифры, идущие по часовой стрелке в этой записи, образуют некоторое трехзначное число. Какой получится результат, если все такие трехзначные числа сложить? Ответ обоснуйте.

2. Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись: «ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА». Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву «А». Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш? Ответ обоснуйте.

3. Три пирата делили мешок монет. Первый забрал $^3/_7$ всех монет, второй – 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

4. В марте некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели было 20 число? Ответ обоснуйте.

5. Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича – в 4 раза. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду? Ответ обоснуйте.

Решения

1. ***Решение:*** Каждая из цифр окажется по одному разу в разряде единиц, в разряде десятков и в разряде сотен. Поэтому, результатом сложения будет число $111(1+2+3+4+5+6+7) = 3108$.

Ответ: 3108.

2. ***Решение:*** Назовём *кратностью* буквы то количество раз, в котором эта буква встречается в надписи. После хода Коли, буквы "А" и "О" имеют кратность 3, буквы "Д", "И", "С" и "Я" – кратность 2, а буквы "Г", "К", "Л", "М", "Н", "П", "Р", "Т" и "У" – кратность 1. Для того, чтобы выиграть, Алисе надо сначала стереть любую букву кратности 1, чтобы количество букв каждой кратности стало чётным. Далее Алисе надо играть так, чтобы после каждого её хода количество букв каждой кратности было чётным. Для этого ей следует в ответ на каждый Колин ход стирать такое же количество букв той же кратности. Например, если Коля сотрёт три буквы "А", то Алиса должна стереть три буквы "О", а если Коля сотрёт одну букву "Д", то Алиса может стереть также одну букву "И". Тогда на каждый ход Коли у Алисы будет ответный ход, поэтому именно она сделает последний ход и выиграет. Наглядно эту стратегию можно представить, например, так. Пусть Алиса мысленно упорядочит буквы по-другому: "АААДДИИКЛМНГПРТУССЯЯООО". Тогда первым своим ходом она стирает букву "Г", а далее делает ходы, симметричные ходам Коли относительно середины этого "слова".

3. Решение: Так как второй пират забрал 51% монет, оставшихся после первого, то третьему пирату досталось 49% этого количества. Следовательно, 8 монет составляют 2% монет, оставшихся после первого пирата. Значит, на долю второго и третьего пришлось $8 \cdot 50 = 400$ монет, что составляет $^4/_7$ от их общего количества. Таким образом, в мешке было $400 : {}^4/_7 = 700$ монет.

Ответ: 700 монет.

4. ***Решение:*** В марте 31 день. Это 4 полных недели и еще три дня. Если бы день 1 марта был пятницей, четвергом или средой, то в марте было бы 5 пятниц, а не 4. Если бы день 1 марта был понедельником, субботой или воскресеньем, то в марте было бы 5 понедельников, а не 4. Следовательно, 1 марта – вторник, а 20 марта – воскресенье.

Ответ: Воскресенье.

5. Решение: Пусть Пётр Петрович смотрел в окно x минут, а Иван Иванович – y минут. Тогда $x + 2x + 4x + 8x = y + 4y + 16y + 64y$, то есть $15x = 85y$. Иван Иванович начал разгадывать кроссворд через $5y = {}^{15x}/_{17}$ минут. Это меньше чем x, значит, Пётр Петрович в это время смотрел в окно.

Ответ: Смотрел в окно.