I этап олимпиады по математике (школьный)

8 класс

1. У Миши есть 24 рубля, а у его троих братьев – по 12 рублей. Сколько рублей Мише нужно дать каждому из своих братьев, чтобы у всех четырёх мальчиков денег стало поровну.

Решение.

1) $24 + 3 \cdot 12 = 60$ (рублей) – всего у братьев;
2) $60 : 4 = 15$ (рублей) – у каждого брата, если разделить поровну;
3) $15-12=3$ (рубля) – надо дать каждому.

Ответ: по 3 рубля.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 7 составили всевозможные шестизначные числа (каждое число содержит все эти цифры). Чему равна разница между наибольшим и наименьшим такими числами?

Ответ:

Наибольшее – 743210, наименьшее – 102347. Разница равна 640863.

3. На прямой отметили несколько точек. После этого между любыми двумя соседними точками поставили по точке. Такую операцию повторили ещё 3 раза. В результате на прямой оказалась 81 точка. Сколько точек было на этой прямой первоначально?

Решение:

Каждый раз на прямую ставится на одну точку меньше, чем было.

$6 + 5 + 10 + 20 + 40 = 81$.

Пусть было x точек, тогда

$x + (x – 1) + (2x – 2) + (4x – 4) + (8x – 8) = 81$;

$x = 6$.

Ответ: 6 точек.

4. Бочка была наполнена доверху водой. Эту воду поровну перелили в три ведра. Оказалось, что в первом ведре вода заняла половину его объёма, во втором ведре - $\frac{2}{3}$ его объёма, а в третьем ведре - $\frac{3}{4}$ его объёма. Бочка и все три ведра вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бочки возможна такая ситуация?

Решение:

Пусть по x литров перелили в каждое из 3 ведер. Тогда

$2x$ – объем 1 ведра, 1,5x – объем 2 ведра, $1\frac{1}{3}x$ - объем 3 ведра.

$2x + 1{,}5x + 1\frac{1}{3}x = \frac{29}{6}x$ – суммарная вместимость 3-х ведер. Учитывая, что бочка и все три ведра вмещают по целому числу литров, наименьшее значение, которое может принимать x – 6.

3х = 18 (л) – вместимость бочки.

Ответ: 18 литров.

5. В трех кучках лежат соответственно 12, 24 и 19 спичек. За ход можно переложить спичку из одной кучки в другую. За какое наименьшее число ходов можно получить три кучки с 8, 21 и 26 спичками?

Решение:

Менее чем 4 ходами не обойтись: чтобы получить кучку из 8 спичек, придется из любой первоначальной кучки убрать как минимум 4 спички. Четырех ходов достаточно: перекладываем из кучки с 12 спичками по 2 спички в кучки с 19 и 24 спичками.

Ответ: 4.

I этап олимпиады по математике (школьный)

8 класс

1. В треугольнике *ABC* известно, что *AB* = 3, *BC* = 4, *CA* = 6. На *BC* взята точка *M* так, что *CM* = 1. Прямая, проходящая через точку *M* перпендикулярно биссектрисе угла *ACB*, пересекает *AC* в точке *N*, а прямая, проходящая через точку *N* перпендикулярно биссектрисе угла *BAC*, пересекает прямую *AB* в точке *K*. Найдите *BK* и *AK*.

Решение. Пусть CD – биссектриса Ð ACB. По условию MN ^ CD. Тогда Δ OMC = Δ ONC (прямоугольные, OC – общая, Ð 1 = Ð 2). Из равенства треугольников следует MC = NC = 1. Тогда AN = 6 – 1 = 5. Пусть AL – биссектриса Ð BAC. Тогда Ð 3 = Ð 4. По условию NK ^ AL.

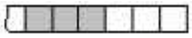
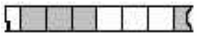
Тогда Δ AKL = Δ ANL (прямоугольные, AL – общая, Ð 3 = Ð 4). Из равенства треугольников следует, что AN = AK = 5. BK = 5 – 3 = 2.

Ответ: AK = 5, BK = 2.

2. Найти все наборы ненулевых цифр *a, b, c,* для которых выполняется равенство $\overline{a,b}\times c = a+b+c$ (здесь $\overline{a,b}$ означает число «a целых и b десятых»).

Решение. Из условия: $ac + 0{,}1bc = a + b + c$ или $0{,}1bc = a + b + c - ac$, а значит, $0{,}1bc$ – целое число. Тогда bc делится на 10, что возможно лишь в тех

случаях, когда одна из этих цифр – 5, а другая – четная (2; 4; 6; 8). Перебрав все 8 случаев, получим два ответа: $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$ или $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$.
Ответ: $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$ или $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$.

3. Имеется прямоугольная полоска 1´ 100 клеток. Три девочки: Катя, Лена и Надя по очереди закрашивают клетки этой полоски. За один ход Катя закрашивает 5 подряд идущих клеток, Лена – 4, Надя – 3. Закрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. Первой ходит Катя, второй – Лена, третьей – Надя. Девочка, которая не может сделать ход, выбывает из игры, а право хода переходит к следующей. Побеждает та, которая сделает последний ход. Доказать, что Надя может выиграть независимо от игры соперниц.
Решение. Доказательство:
Свой первый ход Надя делает, отступив на 3 клетки от края полоски или ранее закрашенной клетки:  или . Очевидно, что пропущенные 3 белые клетки (назовем их резервными) может впоследствии закрасить только Надя. В дальнейшем Надя не должна закрашивать резервные клетки пока есть возможность закрасить какую-либо другую тройку клеток. Когда же такой возможности не будет (а в этом случае и другие девочки тем более не смогут сделать свои ходы), тогда Надя закрашивает резервную тройку клеток. Это будет последний ход в игре.

4. Докажите, что $13+13^2+13^3+13^4+\ldots+13^{2009}+13^{2010}$ делится на 7.
Решение. Проведем цепочку преобразований
$13+13^2+13^3+13^4+\ldots+13^{2009}+13^{2010}=$
$13(1+13)+13^3(1+13)+13^5(1+13)+\ldots 13^{2009}(1+13)=14(13+13^3+13^5+\ldots+13^{2009})$.
Так как 14 делится на 7, то и все число делится на 7.

5. В компьютер попал вирус. Действие вируса заключается в следующем. На жестком диске он создает 9 папок. Далее, случайным образом выбирает несколько из них (количество выбранных папок каждый раз может меняться) и создает в каждой из выбранных папок еще по 9 папок. Остальные папки остаются пустыми. С вновь созданными папками вирус поступает аналогично. Данная процедура повторилась несколько раз, пока вирус не был заблокирован антивирусом. В результате действия вируса на диске было создано 2009 пустых папок. Сколько непустых папок создал вирус?
Решение. Пусть вирус создал x пустых папок. Заметим, что создание в пустой папке девяти новых папок увеличивает общее количество пустых

папок на 8 (1 пустая папка исчезает, и появляются 9 новых). Связь между количеством непустых и пустых папок отобразим в таблице.

Число непустых папок	Число пустых папок
0	9
1	$9+8 = 17$
2	$9+8\cdot 2 = 25$
3	$9+8\cdot 3 = 33$
…	…
X	$9+8x = 2009$

Итак, имеем уравнение: $9+8x = 2009$. Откуда $x = 250$.

Ответ: 250 папок.

I этап олимпиады по математике (школьный)

8 класс

1. Две семьи выехали каждая на машине «Жигули» на прогулку одновременно из одного места. Обе семьи проехали на машинах одинаковые расстояния и вернулись домой в одно и то же время. В пути они отдыхали. Первая семья была в пути вдвое больше времени, чем вторая. Вторая была в пути втрое больше времени. Чем отдыхала первая. Какая из этих семей двигалась на машине быстрее?

Решение. 1-я семья: 2х часов - время на езду, у часов - время на отдых. 2-я семья: 3у часов - время на езду, х часов - время на отдых $2x + y = 3y + x$; $x = 2y$. Вторая семья отдыхала в два раза больше, чем первая следовательно, она ехала быстрее первой.

Ответ: вторая.

2. Токарь за смену должен выточить 20 деталей. За каждую качественно изготовленную деталь он получит 800 рублей, за бракованную – штраф 500 рублей, за деталь, которую он не успел сделать, – 0 рублей. Сколько деталей изготовил токарь (качественных и бракованных), если за эту смену он получил 1300 рублей?

Решение. Пусть х – количество качественно изготовленных деталей, у – бракованных. Тогда $800x-500y=1300$ или $8x-5y = 13$, переписав это уравнение в виде$8(x+y)=13(1+y)$ Видно, что число $(x+y)$ делится на 13. С другой стороны, по условию,$(x+y)$ не больше 20. Поэтому $x+y=13$, если$x=6$, $y=7$.

Ответ: 13 деталей.

3. Дед Мороз решил упаковать подарки по коробкам, чтобы их было удобнее перевозить. Сначала он разложил их по 4 штуки в каждую коробку, потом по 5, затем по 6 и всегда оставался один подарок. Тогда он решил положить в каждую коробку по 7 штук и тогда лишних подарков не осталось. Сколько было подарков, если известно, что их было меньше 400?

Решение. Задача сводится к отысканию натурального числа, кратного семи, не превосходящего 400, которое при делении на 4, 5 и 6 дает остаток 1. Это число имеет вид $60n + 1$, где 60 – наименьшее общее кратное чисел 4. 5, 6, $n \in N$, $n < 7$. Подбором находим $n = 5$. Следовательно, подарков было 301.

Ответ: 301 подарок.

4. Дан параллелограмм ABCD. Биссектриса угла BAC пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса угла DAC пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что биссектриса угла BAD перпендикулярна прямой EF

Решение. Из параллельности прямых DE и AB следует, что $\angle AED = \angle EAB$ (см. рис. 9). Но по условию AE – биссектриса угла BAC, значит, $\angle AEC = \angle CAE$. Отсюда следует, что $CE = CA$. Аналогично, $CF = CA$. Но тогда в равнобедренном треугольнике ECF биссектриса угла при вершине C является высотой, то есть биссектриса угла ECF перпендикулярна прямой EF. Осталось заметить, что биссектрисы равных углов ECF и BAD параллельны, так как они образуют равные углы с параллельными сонаправленными лучами CF и AD.

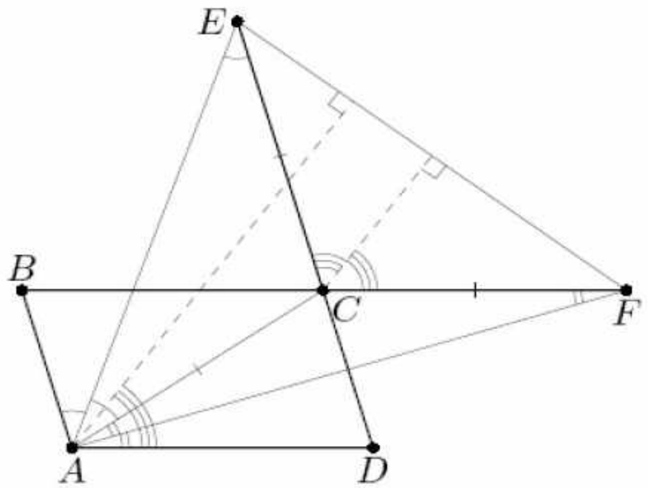


Рис. 9

5. В таблице размера 3×3 расставлены числа следующим образом

0	3	2
6	7	0
4	9	5

Одним ходом разрешается к любым двум числам, стоящим в соседних клетках, прибавить или отнять одно и то же число (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

Можно ли за несколько ходов получить:

а) таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

б) таблицу, в клетках которой стоят нули и одна единица?

Решение.

а) Требуемую таблицу можно получить за 5 ходов, например, следующим образом

0	**3**	**2**
6	7	0
4	9	5

Прибавим –2

0	1	0
6	7	0
4	**9**	5

прибавим –4

0	1	0
6	7	0
0	**5**	**5**

прибавим –5

0	1	0
6	**7**	0
0	0	0

прибавим –6

0	**1**	0
0	**1**	0
0	0	0

прибавим –1

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Пара клеток, к которым применяется операция, выделены жирным контуром. Число, прибавляемое к числам в этих клетках, записано рядом.

б) если к таблице

a	b	c
d	e	f
g	h	k

применить операцию, разрешенную условием задачи, то в выражении

$$S = (a + c + e + g + k) - (b + d + f + h)$$

к уменьшаемому и вычитаемому прибавится одно и то же число, и это выражение не изменится. В данной таблице

$$S = (0 + 2 + 7 + 4 + 5) - (3 + 6 + 0 + 9) = 0.$$

Таблица же, в клетках которой стоят нули и одна единица, имеет сумму S, равную 1 или –1, а не нулю. Следовательно, эта таблица не может быть получена из данной.

Ответ: а) можно; б) нельзя.

I этап олимпиады по математике (школьный)

8 класс

Задания

1. Петя сказал Васе: «Я задумал двузначное число. Если переставить его цифры, то получится число, которое в сумме с задуманным даст 143. Отгадай задуманное число, если известно, что оно простое». Какое число задумал Петя?

2. Дано сто чисел: 1, 2^2, 3^2,…, 100^2. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 3^2 - 1$, $a_2 = 4^2 - 2^2$, …, $a_{98} = 100^2 - 98^2$. Чему равна сумма всех этих разностей?

3. Дано 300-значное число 22…21…100…0, содержащее 100 двоек, 100 единиц и 100 нулей. Можно ли переставить цифры в этом числе так, чтобы получился квадрат натурального числа?

4. Существует ли равнобедренная трапеция, у которой средняя линия равна диагонали?

5. На доске записано 10 чисел: 1, 2, …, 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $2a + 3b$ и $2b + 3a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 10 одинаковых чисел?

Решения

1. Пусть a, b – цифры задуманного числа. Тогда из условий задачи $10a+b+10b+a=143$, откуда $a + b = 13$. Учитывая, что a, b – цифры, отсюда получаем шесть возможных вариантов задуманного числа: 94, 85, 76, 67, 58, 49. Из этих вариантов только 67 простое число.

2. 19796. $a_1+a_2+...+a_{98}=(\underline{3}^2-1^2)+(\underline{\underline{4}}^2-2^2)+$ $+(5^2-\underline{3}^2)+(6^2-\underline{\underline{4}}^2)...+(99^2-\underset{\sim}{97}^2)+(100^2-\underset{\approx}{98}^2)$. Подчеркнутые члены при подсчете суммы взаимно уничтожаются с соответствующими членами, имеющими противоположный знак. Останутся «неуничтоженные» числа: $100^2+99^2-1^2-2^2=19796$.

3. Нельзя. Сумма цифр данного числа равна $2\cdot100 + 1\cdot100 = 300$. Из признаков делимости на 3 и на 9 следует, что данное число делится на 3, но не делится на 9. При перестановках цифр сумма цифр не меняется, и поэтому после перестановки не получится точный квадрат (т.к. число, возводимое в квадрат, должно делиться на 3, а его квадрат – на 9).

4. Не существует. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD. Опустим из точки C высоту CM на основание. Тогда отрезок AM равен средней линии, т.к. средняя линия равна $\frac{1}{2}(BC+AD)=\frac{1}{2}(BC+BC+2MD)=BC+MD=AM$. В прямоугольном треугольнике ACM гипотенуза AC больше катета AM, и, значит, диагональ всегда больше средней линии равнобедренной трапеции.

5. Не может. Заметим, что число $2a + 3b$ имеет ту же четность, что b, а число, $2b + 3a$ имеет ту же четность, что a. Поэтому после каждой операции на доске должно оставаться 5 четных и 5 нечетных чисел (т.к. вначале было 5 четных и 5 нечетных). Значит все 10 чисел одинаковой четности получиться не могут.