I этап олимпиады по математике (школьный)

9 класс

1. Восстановленный фруктовый сок готовят из концентрата, разводя его водой в отношении 1 : 7 соответственно. Литровая банка заполнена концентратом наполовину. Какую часть этого концентрата нужно использовать, чтобы приготовить 2 л восстановленного сока?

Решение.

Для сока необходимо взять 1 часть концентрата и 7 частей воды. Обозначим одну часть x. Тогда $7x + x = 2$; $x = \frac{1}{4}$. Значит, для приготовления сока нужно взять $\frac{1}{4}$ л концентрата. Найдём отношение: $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Найти значение выражения $\frac{x^4+6x^2+9-y^4}{2xy-3-(x+y)^2}$ при $x = 2023$, $y = 2022$.

Решение.

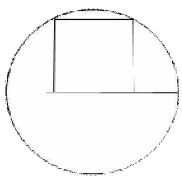
$$\frac{x^4 + 6x^2 + 9 - y^4}{2xy - 3 - (x + y)^2} = \frac{(x^2 + 3)^2 - (y^2)^2}{2xy - 3 - x^2 - y^2 - 2xy} =$$
$$= \frac{(x^2 + 3 - y^2)(x^2 + 3 + y^2)}{-(x^2 + 3 + y^2)} = y^2 - x^2 - 3 =$$
$$= (y - x)(y + x) - 3;$$

при $x = 2022$, $y = 2023$ имеем:

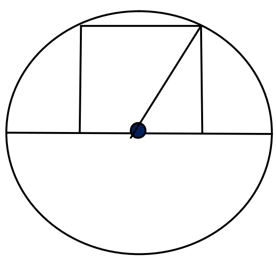
$$(2023 - 2022)(2023 + 2022) - 3 = 4045 - 3 = 4042.$$

Ответ: 4042.

3. Вершины квадрата находятся на дуге и диаметре полукруга с радиусом 1 см (как на рисунке). Найти площадь квадрата.



Решение.



Пусть сторона квадрата $\boldsymbol{a}$. Соединим центр окружности с вершиной квадрата, лежащей на окружности. Тогда по теореме Пифагора

$$\boldsymbol{a^2} + \frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{1};$$

$$\frac{5}{4}a^2 = 1;$$

$$a^2 = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, площадь квадрата равна $\frac{4}{5}$ $см^2$.

Ответ:$\frac{4}{5}$ $см^2$.

4. Найдите все пары действительных чисел a и b, удовлетворяющих равенствам: $a^2 + b^2 = 20$ и $ab + 6b = 32$.

Решение.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20, \\ ab + 6b = 32; \end{cases}$$

вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$a^2 - ab + b^2 - 6b + 12 = 0;$$

решим его как квадратное относительно a:

$$D = b^2 - 4(b^2 - 6b + 12) = -3(b - 4)^2;$$

чтобы квадратное уравнение имело корни, необходимо, чтобы $D > 0$, а $-3(b - 4)^2 \geq 0$, только если $b = 4$, тогда $a = 2$.

Ответ: $a = 2$, $b = 4$.

5. Решить уравнение: $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$.

Решение. Сгруппируем скобки:

$$\big((x + 2)(x + 12)\big)\big((x + 3)(x + 8)\big) = 4x^2;$$

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2;$$

вынесем из каждой пары скобок множитель x:

$$x\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right)x\left(x + 11 + \frac{24}{x}\right) = 4x^2;$$

Сократим левую и правую часть уравнения на множитель $x^2 \neq 0$ (0 не является корнем данного уравнения, в чём можно убедиться с помощью подстановки).

$$\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right)\left(x + 11 + \frac{24}{x}\right) = 4;$$

введём замену $x + \frac{24}{x} = t$, получим:

$$(t + 14)(t + 11) = 4;$$
$$t^2 + 25t + 150 = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} t = -15, \\ t = -10; \end{array}\right.$$

выполняем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{24}{x} = -15, \\ x + \dfrac{24}{x} = -15; \end{array}\right.$$

решив данную совокупность, находим корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = -4, \\ x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-6;\ -4;\ \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

I этап олимпиады по математике (школьный)

9 класс

1.Найдите наименьше натуральное число, третья степень которого кратна числу 588.

Решение. Пусть искомое число равно *а*. По условию $a^3 = k\cdot 588$. Поскольку $588 = 2^2\cdot 3\cdot 7^2$, то $a^3 = k\cdot 2^2\cdot 3\cdot 7^2$. Так как ищем *а* наименьшее, то $k = 2\cdot 3^2\cdot 7$. Тогда $a^3 = 2^3\cdot 3^3\cdot 7^3$ и $a = 2\cdot 3\cdot 7 = 42$.

Ответ: 42

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times K\times\frac{65}{66}<\frac{1}{10}$$

Решение: смотри учебное пособие «Математика 8» авторов Л.А.Латотина, Б.Д. Чеботаревского в пункте 12 пример 4.

3. Диагональ разделяет трапецию на два треугольника, площади которых относятся как 3 **:** 7. Найдите отношения площадей четырехугольников, на которые данную трапецию разделяет ее средняя линия.

Решение. Пусть ABCD – трапеция и ADï ï BC, MN – средняя линия.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, высота трапеции равна h. Тогда $S_1=\frac{1}{2}bh$; $S_2=\frac{1}{2}ah$;

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b}{a}=\frac{3}{7}$, $b=\frac{3}{7}a$, MN= $\frac{a+b}{2}=\frac{a+\frac{3}{7}a}{2}=\frac{10a}{7\times 2}=\frac{5}{7}a$.

$$S_{MBCN}=\frac{MN+BC}{2}\times\frac{h}{2}=\frac{\frac{5}{7}a+\frac{3}{7}a}{2}\times\frac{h}{2}=\frac{8a}{7\times 2}\times\frac{h}{2}=\frac{4a}{7}\times\frac{h}{2};$$

$$S_{AMND}=\frac{AD+MN}{2}\times\frac{h}{2}=\frac{a+\frac{5}{7}a}{2}\times\frac{h}{2}=\frac{12a}{7\times 2}\times\frac{h}{2}=\frac{6a}{7}\times\frac{h}{2};$$

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}=\frac{\frac{4}{7}a\times\frac{h}{2}}{\frac{6}{7}a\times\frac{h}{2}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: 2:3

4.Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из выражений $\boldsymbol{3x^2+x}$ и $\boldsymbol{3x}$ выражение, тождественно равное $\boldsymbol{x}$?

Решение. Предположим, что составить выражение, тождественно равное x, можно, то есть для всех x выполняется равенство $f(3x^2+x; 3x)=x$. Но при $x = 2/3$ $3x^2+x=3x=2$, следовательно, левая часть равенства принимает целое значения, а правая— дробное (равна 2/3).

Ответ: **нет, нельзя**

5.Может ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 2007?

Решение. Допустим, что квадратное уравнение $a^2+bx+c=0$, где a, b, c- целые числа, причем a ¹ 0, имеет дискриминант, равный 2007:

$b^2- 4ac=2007.$

Заметим, что 2007 = 2025 - 18 = 45^2 – 18.

Имеем: $b^2-4ac=45^2-18;$ $b^2-45^2=4ac-18;$

$(b-45)(b+45)=4ac-16-2;$

$(b-45)(b+45)=4(ac-4)-2;$ (1)

Если b- четное, то числа $b-45$ и $b+45$ - нечетные. Тогда левая часть (1) нечетная, а правая – четная и равенство невозможно.

Если b - нечетное, то числа $b - 45$ и $b + 45$ - четные. Тогда левая часть (1) четная и при этом делится на 4, а правая часть не делится на 4. Равенство в этом случае также невозможно.

Ответ: не может

I этап олимпиады по математике (школьный)

9 класс

Задания

1. Дано сто чисел: 1, 2^2, 3^2,…, 100^2. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 3^2 - 1$, $a_2 = 4^2 - 2^2$, …, $a_{98} = 100^2 - 98^2$. Чему равна сумма всех этих разностей?

2. Существует ли равнобедренная трапеция, у которой средняя линия равна диагонали?

3. Даны положительные числа $a > b$. Можно ли утверждать, что $\sqrt{a + \sqrt[4]{b}} > \sqrt{b + \sqrt[4]{a}}$?

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $C_1A_1 \parallel AC$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$.

5. На доске записано 10 чисел: 1, 2, …, 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $a^3 + 6b$ и $b^3 + 6a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны **а**) все 10 одинаковых чисел? **б**) хотя бы три одинаковых числа?

Решения

1. 19796. $a_1 + a_2 + ... + a_{98} = (\underline{3}^2 - 1^2) + (\underline{\underline{4}}^2 - 2^2) +$
$+ (5^2 - \underline{3}^2) + (6^2 - \underline{\underline{4}}^2) ... + (99^2 - \underset{\sim}{97}^2) + (100^2 - \underset{\approx}{98}^2)$. Подчеркнутые члены при подсчете суммы взаимно уничтожаются с соответствующими членами, имеющими противоположный знак. Останутся «неуничтоженные» числа: $100^2 + 99^2 - 1^2 - 2^2 = 19796$.

2 Не существует. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD. Опустим из точки C высоту CM на основание. Тогда отрезок AM равен средней линии, т.к. средняя линия равна $\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(BC + BC + 2MD) = BC + MD = AM$. В прямоугольном треугольнике ACM гипотенуза AC больше катета AM, и, значит, диагональ всегда больше средней линии равнобедренной трапеции.

3. Нельзя. После возведения в квадрат получим равносильное неравенство: $a - b > \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \Leftrightarrow \quad (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) > \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$. Поскольку $a > b$, то данное неравенство равносильно следующему: $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 1$. Для малых a, b (например, при $a = 10^{-4}$, $b = 10^{-8}$) последнее неравенство, очевидно, неверно.

4. Из условия $C_1A_1 \parallel AC$ следует, что треугольники BC_1A_1 и BAC подобны. Пусть $x = C_1A_1 / AC$ – коэффициент подобия. Тогда высота в треугольнике BC_1A_1, опущенная из точки B на C_1A_1, равна xh, где h – высота треугольника BCA из точки B. Значит, высота в треугольнике $B_1C_1A_1$ из точки B_1 на C_1A_1 равна $h - xh = (1 - x)h$. Таким образом, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}(x \cdot AC) \cdot (1 - x)h = x(1 - x)S_{\Delta ABC}$. Максимум квадратичной функции $y(x) = x(1 - x)$ достигается в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ (абсциссе вершины параболы) и равен $\frac{1}{4}$, откуда следует результат.

5. **а**) не может, **б**) не может. **а**) Результат пункта а) (так же, как в задачах 7.4 и 8.5) следует из того факта, что после каждой операции получаются числа той же четности. **б**) Заметим более сильный факт, а именно, то, что после каждой операции числа дают те же остатки при делении на 6, что и до операции. Действительно, $a^3 + 6b - a = (a - 1)a(a + 1) + 6b$, и произведение трех последовательных целых чисел $(a - 1)a(a + 1)$ делится как на 3, так и на 2, т.е. делится на 6. Значит, в результате всех операций должен получиться тот же набор остатков (при делении на 6), что и вначале. Но вначале было не более двух чисел для каждого из остатков 0, 1, 2, 3, 4, 5 (точнее, по одному числу с остатком 0 и 5 – это числа 6 и 5 –, и по два числа с остальными остатками). Таким образом, в конце не могли оказаться три числа с одинаковыми остатками.