8.1. Для каждого натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех его натуральных делителей, включая 1 и само число n.

Найдите все натуральные числа n такие, что $d(n) = d(n+72) = 3$.

Ответ: 49 и 289.

Решение. Найдём все натуральные числа a, для которых верно равенство $d(a) = 3$. Если у a есть хотя бы 2 различных простых делителя, скажем p и q, то 1, p, q, pq – различные делители числа a, а значит, $d(a) \geqslant 4$. Поэтому искомые числа a являются степенями простых чисел. Пусть $a = p^u$ для некоторого простого числа p. Тогда $1, p, p^2, \ldots, p^u$ – все возможные делители числа a. Таким образом $u = 2$, т. е. $a = p^2$.

Следовательно, в задаче требуется найти такие натуральные числа n, что $n = p^2$ и $n + 72 = q^2$, где p, q – простые числа. Вычитая из второго равенства первое, получаем $q^2 - p^2 = 72$, т. е. $(q-p)(q+p) = 72$. Заметим, что $q - p < q + p$, а ещё, что эти числа одной чётности. Рассмотрим все представления числа 72 в виде произведения двух натуральных чисел одной чётности (чётных, т.к. 72 чётно) – это $2 \cdot 36$, $4 \cdot 18$ и $6 \cdot 12$. В каждом из трёх случаев решим соответствующую систему линейных уравнений:

1. $\begin{cases} q - p = 2, \\ q + p = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} 2q = 38, \\ q + p = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 19, \\ q + p = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 19, \\ p = 17; \end{cases}$

2. $\begin{cases} q - p = 4, \\ q + p = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} 2q = 22, \\ q + p = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 11, \\ q + p = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 11, \\ p = 7; \end{cases}$

3. $\begin{cases} q - p = 6, \\ q + p = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 2q = 18, \\ q + p = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 9, \\ q + p = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 9, \\ p = 3; \end{cases}$

Только в первом и во втором случаях решения являются простыми числами, а значит, возможные значения n – это $17^2 = 289$ и $7^2 = 49$.

8.2. Существуют ли положительные действительные числа a, b и c такие, что каждое из чисел $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{2bc}$, $\sqrt{2ca}$ больше, чем $\dfrac{a+b+c}{2}$?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Предположим, такие действительные числа существуют. Поскольку условие симметрично относительно трёх переменных, без потери общности можно положить $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда ввиду предположения из условия

$$\sqrt{2bc} > \frac{a+b+c}{2}.$$

Поскольку $a \geqslant b$, то $\dfrac{a+b+c}{2} \geqslant \dfrac{2b+c}{2} = b+\dfrac{c}{2}$. Таким образом, получаем, что

$$\sqrt{2bc} > \frac{a+b+c}{2} \geqslant b + \frac{c}{2},$$

откуда $\sqrt{2bc} > b+\dfrac{c}{2}$. Поскольку обе части данного неравенства больше 0, умножим его на себя (знак неравенства при этом сохранится). Получим

$$2bc > \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} + bc.$$

Отнимая $2bc$ их обеих частей, получим

$$0 > b^2 + \frac{c^2}{4} - bc = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2.$$

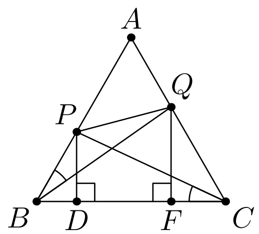
Но квадрат действительного числа не может быть меньше 0. Получено противоречие. Значит, исходное предположение неверно и таких чисел a, b, c не существует.

8.3. Площадь равностороннего треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки P и Q так, что выполняется равенство $\angle ABQ = \angle BCP$.

Найдите расстояние от середины отрезка PQ до прямой BC.

Ответ: $3/2$.

Решение. Согласно формуле площади равностороннего треугольника получаем, что $\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = 3\sqrt{3}$. Следовательно, $BC = 2\sqrt{3}$. Согласно



условию задачи $\angle ABQ = \angle BCP$, а значит, треугольники ABQ и BCP равны по второму признаку равенства треугольников. Пусть D и F — основания перпендикуляров, опущенных на сторону BC из точек P и Q соответственно. Так как $PDFQ$ — прямоугольная трапеция, то расстояние от середины её боковой стороны PQ до прямой DF равно длине средней линии, т. е. $(PD + QF)/2$. Запишем равенство площадей:

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = S_{BCP} + S_{BQC} = \frac{BC \cdot PD + BC \cdot QF}{2}.$$

Значит, искомое расстояние равно $(PD + QF)/2 = S/BC = 3/2$.

8.4. По кругу выписаны n различных действительных чисел. Для каждого записанного числа x нашли количество чисел между x и ближайшим к нему по ходу часовой стрелки числом, не превосходящим x (так, например, для наименьшего выписанного числа найденное число равно $n-1$, а для максимального числа – нулю).

Чему равно максимально возможное значение суммы всех найденных чисел?

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Первое решение. Пронумеруем выписанные числа по ходу часовой стрелки, начиная с наименьшего. Пусть m_i – найденное число для числа с номером i. Тогда $m_n = 0$, $m_{n-1} \leqslant 1$, …, $m_2 \leqslant n-2$, $m_1 = n-1$. Следовательно,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n \leqslant 0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Легко видеть, что если исходные числа расставлены в порядке возрастания (по ходу часовой стрелки, начиная с наименьшего), то сумма найденных значений действительно равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Второе решение. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – записанные по кругу числа, упорядоченные по возрастанию. Для произвольной расстановки C чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по кругу через $h_C(x_i)$ обозначим количество чисел, стоящих в расстановке C между x_i и ближайшим к нему по ходу часовой стрелки числом, не бóльшим x_i.

Рассмотрим все возможные расстановки чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и выберем такую расстановку C', для которой сумма

$$h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \ldots + h_{C'}(x_n)$$

максимальная. Докажем, что в расстановке C' числа упорядочены по возрастанию. Предположим противное. Без нарушения общности будем считать, что в расстановке C' числа расположены так, как показано на рисунке 1, т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ стоят в порядке возрастания,

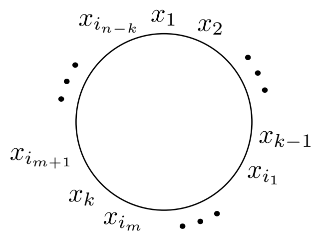


Рис. 1

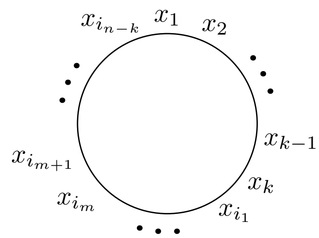


Рис. 2

а следующее за x_{k-1} число x_{i_1} больше чем x_k. Рассмотрим новую расстановку C'' (см. рис. 2), которая получена из C' лишь перестановкой числа x_k на место между x_{k-1} и x_{i_1}. Несложно видеть, что

$$\begin{gathered} h_{C''}(x_1) = h_{C'}(x_1), \quad \ldots, \quad h_{C''}(x_{k-1}) = h_{C'}(x_{k-1}), \\ h_{C''}(x_{i_1}) \geqslant h_{C'}(x_{i_1}), \quad \ldots, \quad h_{C''}(x_{i_m}) \geqslant h_{C'}(x_{i_m}), \\ h_{C''}(x_{i_{m+1}}) = h_{C'}(x_{i_{m+1}}), \quad \ldots, \quad h_{C''}(x_{i_{n-k}}) = h_{C'}(x_{i_{n-k}}) \end{gathered}$$

и $h_{C''}(x_k) = h_{C'}(x_k) + m$. Поэтому,

$$h_{C''}(x_1) + h_{C''}(x_2) + \ldots + h_{C''}(x_n) > h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \ldots + h_{C'}(x_n)$$

Получено противоречие. Таким образом, в расстановке C' числа упорядочены по возрастанию, а значит, $h_{C'}(x_i) = n - i$. Значит,

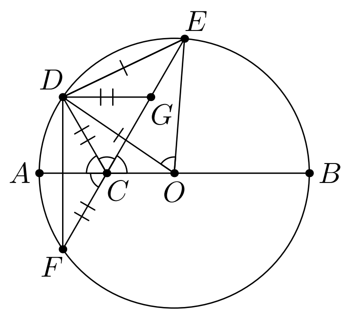
$$h_{C'}(x_1) + h_{C'}(x_2) + \ldots + h_{C'}(x_n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

9.1. На диаметре AB окружности ω отмечена точка C. На окружности ω выбраны точки D и E, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB так, что $\angle ACD = \angle BCE = 60^\circ$, $CD = 3$ и $CE = 4$.

Найдите расстояние от точки C до центра окружности ω.

Ответ: 1.

Решение. Через O обозначим центр окружности ω, а через F – точку



пересечения прямой CE с окружностью ω, отличную от точки E. Так как

$$\angle ACF = \angle BCE = \angle ACD,$$

то точки D и F симметричны относительно диаметра AB. Следовательно, $CD = CF$, а значит,

$$\angle CDF = \angle CFD = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ.$$

Так как $\angle DOE = 2\angle CFD = 60^\circ$ и $OD = OE$, то треугольник ODE правильный и в нём $DE = OD$ и $\angle ODE = 60^\circ$.

На отрезке CE отметим точку G такую, что $CG = CD$. Так как $\angle DCG = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$, то треугольник CDG правильный, а значит, $CD = DG$ и $\angle CDG = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle CDO = 60^\circ - \angle ODG = \angle EDG.$$

Поэтому треугольники ODC и EDG равны по первому признаку равенства треугольников, откуда находим $CO = EG = CE - CD = 1$.

9.2. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots$ натуральных чисел такая, что все её элементы попарно различны и для каждого натурального числа n верно равенство

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{a_{2n+1}}?$$

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такая последовательность (a_n) существует. Вычитая из равенства

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+2}}+\ldots+\frac{1}{a_{2n+3}}$$

равенство

$$\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{a_{2n+1}},$$

получаем, что $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{2n+2}}+\dfrac{1}{a_{2n+3}}$. Заметим, что, поскольку все числа последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ различны, то из последнего равенства следует, что $\min(a_{2n+2},a_{2n+3})<a_{n+1}<\max(a_{2n+2},a_{2n+3})$. В частности, это означает, что для каждого члена последовательности, начиная со второго, есть меньший его член последовательности с бóльшим номером. Но тогда у последовательности $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел есть бесконечная убывающая подпоследовательность, что, очевидно, невозможно.

9.3. Найдите все тройки (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, для которых числа $ab+3$, $bc+3$ и $ca+3$ можно расставить в один ряд слева направо так, что первое число будет делиться на второе, а второе – на третье.

Ответ: $(1, 9, 21)$ и все её перестановки.

Решение. Заметим, что если тройка (a, b, c) удовлетворяет условию задачи, то и все её перестановки также удовлетворяют ему. Поэтому, без потери общности считаем, что $a < b < c$. Тогда $bc + 3 > ac + 3 > ab + 3$. Значит, числа должны быть записаны именно в таком порядке. Так как первое число делится на второе, то их разность $c(b-a)$ делится на второе число $ac+3$; аналогично, $a(c-b)$ делится на $ab+3$. Поскольку наибольший общий делитель чисел c и 3 не превосходит 3, наибольший общий делитель чисел $ac + 3$ и c не больше 3. Значит, $3(b - a)$ делится на $ac + 3$ и $3(c - b)$ делится на $ab + 3$.

Так как числа a, b и c попарно различны, все их попарные разности ненулевые, а потому $3(b - a) \geqslant ac + 3$ и $3(c - b) \geqslant ab + 3$. Складывая эти два неравенства, получаем

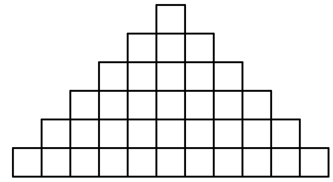
$$3c > 3(c - a) \geqslant ac + ab + 6 > ac,$$

откуда $a \leqslant 2$. Рассмотрим два возможных значения a по отдельности.

Предположим, что $a = 1$. Тогда $b + 3 \mid c + 3 \mid bc + 3$. Следовательно, на $b + 3$ делится и разность $b(c + 3) - (bc + 3) = 3b - 3$, и разность $3(b+3) - (3b-3) = 12$. Значит, $b+3$ – делитель 12 и, так как $b > 1$, то b равно 3 или 9. Если $b = 3$, то неравенство $3(b - a) \geqslant ac + 3$ равносильно $c \leqslant 3$, что невозможно, поскольку $c > b$. Если же $b = 9$, то неравенство $3(b - a) \geqslant ac + 3$ равносильно $c \leqslant 21$. Так как $c > 9$ и $12 = b + 3 \mid c + 3$, то $c = 21$, что даёт нам искомую тройку $(1, 9, 21)$.

Предположим, что $a = 2$. Тогда $2b + 3 \mid 2c + 3 \mid bc + 3$. Следовательно, на $2b + 3$ делится и разность $b(2c + 3) - 2(bc + 3) = 3b - 6$, и разность $3(2b + 3) - 2(3b - 6) = 21$. Значит, $2b + 3$ – делитель 21, причём $b > 2$, что возможно только при $b = 9$. Заметим, что число $2c + 3$ также делит разность $b(2c + 3) - 2(bc + 3) = 3b - 6 = 21$, т. е. $c \leqslant 9$, что противоречит неравенству $b < c$. Таким образом, этот случай невозможен.

9.4. В каждую клетку фигуры, изображённой на рисунке, необходимо записать 0 либо 1.



а) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была нечётной, а в каждом горизонтальном – чётной.

б) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была чётной, а в каждом горизонтальном – нечётной.

Ответ: **а)** 0; **б)** 2^{20}.

Решение. Горизонтальный ряд клеток будем называть строкой, а вертикальный ряд клеток – столбцом. В рассматриваемой фигуре 6 строк и 11 столбцов.

а) Если сумма чисел в каждом столбце нечётная, то и сумма чисел во всех клетках фигуры нечётная, так как количество столбцов нечётно. С другой стороны, если сумма чисел в каждой строке чётная, то и сумма всех чисел чётная. Следовательно, нельзя расставить числа требуемым способов.

б) Занумеруем строки снизу вверх числами от 1 до 6, а также занумеруем столбцы слева направо числами от 1 до 11. Расставим произвольным образом 0 либо 1 во все клетки фигуры за исключением клеток первой строки и шестого столбца. Количество способов заполнить эти 20 клеток равно 2^{20}. Так как сумма чисел в каждой строке должна быть нечётной, то пустые клетки, расположенные в строках с номерами от 2 до 6, заполняются однозначно. Так как сумма чисел в каждом столбце должна быть чётной, то клетки первой строки заполняются однозначно. Мы расставили числа 0 либо 1 в каждой клетки рассматриваемой фигуры так, что сумма чисел в каждом столбце чётная, а сумма чисел в каждой строке, кроме быть может первой, нечётная. Наконец, так как сумма все чисел, посчитанная по столбцам, чётная, то и в первой строке сумма чисел нечётная.

10.1. Для произвольного натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех натуральных делителей числа n, включая 1 и само число n, а через $s(n)$ – сумму $d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$.

Найдите количество нечётных чисел среди $s(1)$, $s(2)$, ... , $s(100)$.

Ответ: 55.

Решение. Числа $s(n-1)$ и $s(n)$ разной чётности тогда и только тогда, когда число $\tau(n)$ нечётно. Разложим число n на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\, p_m^{\alpha_m}$. Тогда $\tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_m)$. Поэтому $\tau(n)$ – нечётное число, если и только если все α_i чётны, т.е. n – квадрат натурального числа.

Выпишем все квадраты от 1 до 100: 1, 4, 9, 16, 25, 36 49, 64, 81, 100. Так как $s(1) = 1$ нечётно, то $s(n)$ нечётно, если и только если

$$n \in [1,4) \cup [9,16) \cup [25,36) \cup [49,64) \cup [81,100).$$

Поэтому количество нечётных чисел в последовательности $s(1)$, $s(2)$, ..., $s(100)$ равно $(4-1) + (16-9) + (36-25) + (64-49) + (100-81) = 55$.

10.2. Действительные числа x и y удовлетворяют равенству

$$x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{3}{4}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}+xy$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

Решение. Обозначим искомую величину $\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}+xy$ за a и рассмотрим два равенства:

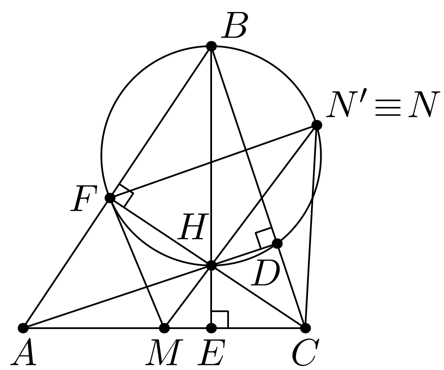
$$(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=a+\frac{3}{4} \text{ и } (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+1}-y)=a-\frac{3}{4}.$$

Заметим, что произведение левых частей этих равенств равно единице. Поэтому $\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)=1$, откуда находим $a^2=\frac{25}{16}$, или $a=\pm\frac{5}{4}$. Учитывая, что $\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}+xy>|xy|+xy\geqslant 0$, то число a положительно, значит, единственный возможный ответ: $a=\frac{5}{4}$. Подставляя в исходное равенство $y=0$, находим решение $x=\frac{3}{4}$. Для этих чисел a равно $\frac{5}{4}$, т. е. это значение достигается.

10.3. В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, а H – точка пересечения высот. Окружность с диаметром BH повторно пересекается в точке N с окружностью, которая проходит через H и касается прямой AC в точке C.

Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Первое решение. Пусть ω – окружность с диаметром BH, отрезки AD, BE и CF — высоты треугольника ABC и $MH \cap \omega = N' \neq H$. Нетрудно видеть, что точки F и D лежат на ω. Докажем, что описанная окружность треугольника CHN' касается прямой AC. Это будет означать, что точки N и N' совпадают. Так как $\angle FN'M = \angle FN'H = \angle FBH = \angle HCE = \angle FCM$, то четырёхугольник $FN'CM$ вписанный.



Из касания в точке C следует равенство $\angle CN'H = \angle HCM$, а из вписанности четырёхугольника $FN'CM$ – равенство $\angle CN'M = \angle CFM$. Поскольку M – середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника AFC, верно равенство $\angle CFM = \angle FCM$. Значит, $\angle CN'H = \angle CN'M$, откуда следует коллинеарность точек N, H и M.

10.4. На координатной плоскости xOy отмечено множество P точек (a, b), для которых a, b – целые неотрицательные числа, не бо́льшие 2023. Элементы множества P разбили на пары и в каждой паре точки соединили отрезком так, что никакие два построенных отрезка не пересекаются. Назовём отрезок *мелким*, если его длина равна 1.

Найдите минимальное возможное количество мелких отрезков.

Ответ: 2.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим отрезки с концами в точках вида $(0, y)$: $s_0, s_1, \ldots, s_{2023}$ ($(0, i)$ – конец s_i). Пусть ни один из них не имеет длину 1. Тогда среди них нет вертикальных и коэффициент наклона прямой, содержащей s_{2023}, меньше 0. Индукцией по k покажем, что коэффициент наклона прямой, содержащей s_k, меньше 0 для всех $k \leqslant 2023$.

База $k = 2023$ проверена. Теперь пусть утверждение доказано всех $\ell > k$. Пусть коэффициент наклона прямой, содержащей s_k, больше нуля (он не 0, так как иначе найден отрезок длины 1). Так как коэффициент наклона прямой s_{k+1} меньше 0, то отрезок s_{k+1} должен иметь общую точку с прямой $y = k$, скажем A. Тогда второй конец отрезка s_k, отличный от $(0, k)$, должен иметь ординату больше k (раз коэффициент наклона больше 0) и при этом лежать строго внутри треугольника с вершинами $(0, k)$, $(0, k+1)$ и A (так как отрезки s_k и s_{k+1} не пересекаются). Но строго внутри этого треугольника вообще нет целочисленных точек. Противоречие. Значит, коэффициент наклона прямой s_k меньше 0.

Следовательно, для $k = 0$ получаем, что коэффициент наклона прямой, содержащей s_0, меньше 0, что невозможно, так как все отрезки находятся в первой координатной четверти. Значит, среди отрезков, содержащих граничные точки (в данном случае с абсциссой 0), найдётся мелкий отрезок. Аналогично для точек с абсциссой 2023. Ясно, что два найденных мелких отрезка не могут совпадать, так как длина любого мелкого отрезка равна $1 < 2023$. Поэтому мелких отрезков хотя бы 2.

Пример. Индукцией по k покажем, что можно соединить точки требуемым образом в целочисленном квадрате $4k \times 4k$, причём так, чтобы два мелких отрезках были параллельны и одним из концов содержали угол квадрата. База $k = 1$ приведена на рисунке 1.

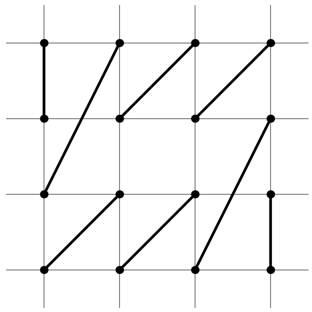


Рис. 1

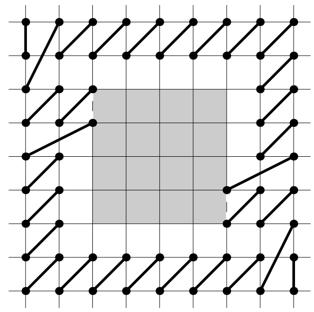


Рис. 2

Шаг индукции проиллюстрирован на рисунке 2 (серым цветом обозначен пример для меньшего k, а пунктиром – отрезки, которые надо убрать из этого примера).

11.1. Среди чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ есть ровно 1013 единиц и 1012 двоек. Может ли многочлен

$$P(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

иметь целый корень?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть z – целый корень уравнения $P(z) = 0$, тогда

$$a_{2024}z^{2024} + a_{2023}z^{2023} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0. \tag{$*$}$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то $z \neq 0$. Все слагаемые в левой части равенства $(*)$, кроме последнего, кратны z и правая часть кратна z, поэтому, a_0 тоже кратно z. Но по условию a_0 равно 1 или 2. Значит, $z \in \{1, 2, -1, -2\}$. Так как все коэффициенты многочлена P положительны, то все его действительные корни отрицательны, в частности, $z \in \{-1, -2\}$.

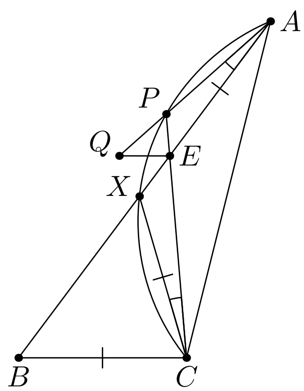
Пусть $z = -1$. Тогда, число $P(z)$ есть сумма или разность целых чисел, среди которых ровно 1013 нечётных. Значит, $P(z)$ нечётно, и следовательно, не равно 0. Поэтому -1 не является корнем многочлена P.

Если $z = -2$, то $a_0 = 2$. Разделим левую и правую части равенства $(*)$ на 2. Все слагаемые до a_1z останутся чётными, а сумма $a_1z + a_0$ преобразуется в сумму $-a_1+1$. Значит, $a_1 = 1$ и тогда $a_1z+a_0 = 0$, поэтому можно просто откинуть два последних слагаемых в левой части равенства $(*)$ и разделить полученное выражение в левой части на z^2. Проделав так 1012 раз, получим, что $a_{2024}(-2)^{2024} = 0$, что неверно. Значит, многочлен P не может иметь целых корней.

11.2. На стороне AB треугольника ABC $(AB > BC)$ выбрана точка E такая, что $AE = BC$. На продолжении луча CE за точку E нашлась точка P, для которой $\angle APC + \angle ABC = 180°$. Точка Q лежит на луче AP так, что $AQ = CE$.

Докажите, что прямые EQ и BC параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть описанная окружность треугольника ACP повторно пересекает прямую AB в точке X. Рассмотрим случай, когда точка X лежит на отрезке AB, а не на его продолжении (второй случай рассматривается по аналогии). Тогда



$$\angle CXB = 180° - \angle CXA = 180° - \angle CPA = \angle CBA.$$

Значит, $CX = CB = AE$. Кроме того, по условию $AQ = CE$, а из вписанности четырёхугольника $APXC$ имеем $\angle XAP = \angle XCP$. Значит, треугольники XCE и EAQ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,

$$\angle BEQ = 180° - \angle AEQ = 180° - \angle CXE = 180° - \angle CPA = \angle ABC,$$

откуда $BC \parallel EQ$ из-за равенства накрест лежащих углов.

11.3. Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел такие, что

$$14 \cdot 2^x + 5^y = 3^z.$$

Ответ: $(x, y, z) = (2, 2, 4)$.

Решение. Так как $14 \cdot 2^x + 5^y \equiv 1 \pmod 4$, то и $3^z \equiv 1 \pmod 4$, откуда заключаем, что z – чётное число, пусть $z = 2p$. Рассматривая остатки по модулю 7, находим, что число $3^z = 9^p$ может давать только остатки 1, 2 и 4, а число 5^y даёт такие остатки только при $y \equiv 0, 2, 4 \pmod 6$, т. е. y тоже чётно, положим $y = 2q$.

Перенесём 5^{2q} в правую часть исходного равенства и разложим её на множители:

$$14 \cdot 2^x = (3^p + 5^q)(3^p - 5^q).$$

Числа $3^p + 5^q$ и $3^p - 5^q$ одной чётности, поэтому, либо: $3^p + 5^q = 2^r \cdot 7$ и $3^p - 5^q = 2^s$, либо $3^p + 5^q = 2^r$ и $3^p - 5^q = 2^s \cdot 7$, при некоторых натуральных r и s. Более того, числа $3^p + 5^q$, $3^p - 5^q$ не могут быть кратны 4 одновременно. Поэтому возможны 4 случая.

Случай 1) $3^p + 5^q = 14$ и $3^p - 5^q = 2^s$. Из первого равенства простым перебором находим единственное решение $(p, q) = (2, 1)$.

Случай 2) $3^p + 5^q = 2^r \cdot 7$ и $3^p - 5^q = 2$. Заметим, что $2^{r-1} \cdot 7 = \dfrac{3^p + 5^q}{3^p - 5^q} = 1 + \dfrac{2 \cdot 5^q}{3^p - 5^q} = 1 + 5^q$. Если $r > 2$, то левая часть делится на 4, в то время как правая часть даёт остаток 2 при делении на 4. Если $r = 1$ или $r = 2$, то несложно проверить, что натуральных решений нет.

Случай 3) $3^p + 5^q = 2$ и $3^p - 5^q = 2^s \cdot 7$. Так как p и q – натуральные числа, то первое равенство невозможно.

Случай 4) $3^p + 5^q = 2^r$ и $3^p - 5^q = 14$. Из этих равенств находим, что $3^p = 2^{r-1} + 7$. Если $r \geqslant 4$, то правая часть даёт остаток 7 по модулю 8, а левая часть может давать лишь остатки 1 или 3 по этому модулю. Значит, $r \leqslant 3$. Несложной проверкой убеждаемся, что $p = r = 2$. Но тогда, $5^q < 0$, что невозможно.

Значит, уравнение имеет единственное решение $(x, y, z) = (2, 2, 4)$.

11.4. Каждая клетка таблицы $n \times n$ окрашена в один из двух цветов – чёрный или белый, причём левая верхняя и правая нижняя клетки белые. Таблицу назовём *хорошей*, если в ней существует путь, начинающийся в левой верхней клетке, идущий по белым клеточкам и заканчивающийся в правой нижней клетке, причём в этом пути каждая следующая клетка находится правее или ниже предыдущей и имеет с ней общую сторону.

Для каждого $n \geqslant 2$ определите чётность количества хороших таблиц.

Ответ: количество хороших таблиц нечётно при $n = 2$ и $n = 3$ и чётно при всех $n \geqslant 4$.

Решение. Занумеруем числами от 1 до n строки таблицы сверху вниз, а столбцы – слева направо. Под клеткой (i, j) будем понимать клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. В частности, нас интересуют пути из клетки $(1, 1)$ в клетку (n, n). Заметим, что таблицы, симметричные относительно главной диагонали, соединяющей $(1, 1)$ с (n, n), являются или не являются хорошими одновременно. Поэтому достаточно найти чётность количества хороших таблиц, которые симметричны себе.

Каждой хорошей симметричной таблице, у которой клетка $(1, n)$ чёрная, поставим в соответствие симметричную таблицу, которая отличается от этой только тем, что в ней клетки $(1, n)$ и $(n, 1)$ белые. Хорошие симметричные таблицы, оставшиеся без пар (назовём их *сложными*) — это такие таблицы, у которых клетки $(1, n)$ и $(n, 1)$ белые, но при их перекраске в чёрный цвет таблица перестанет быть хорошей. В такой таблице существуют ровно два требуемых пути: $(1, 1) \to (1, 2) \to \ldots \to (1, n) \to$ $\to (2, n) \to \ldots \to (n, n)$ и симметричный ему. При $n = 2$ и $n = 3$ такая таблица, как нетрудно видеть, единственна, значит, общее количество хороших таблиц нечётно.

Пусть теперь $n > 4$. Заметим, что в сложной таблице нет пути по белым клеткам, соединяющего $(1, 1)$ и $(n - 2, n - 1)$, так как его можно продолжить $(n - 2, n - 1) \to (n - 2, n) \to (n - 1, n) \to (n, n)$ до пути в (n, n), что противоречит сложности таблицы. Аналогично, нет пути из $(1, 1)$ в $(n - 1, n - 2)$. Рассмотрим произвольную сложную таблицу, выберем в ней клетку $(n - 1, n - 1)$ и перекрасим в противоположный цвет. Поскольку эта клетка не лежит ни на одном из двух указанных путей, то, при её перекраске из белого цвета в чёрный, таблица останется сложной. Если же клетка $(n - 1, n - 1)$ была чёрной, то при её перекраске в белый цвет нового пути не появится, поскольку в $(n - 1, n - 1)$ можно перейти только из $(n-2, n-1)$ и $(n-1, n-2)$, в которые пути нет. Следовательно, сложные таблицы разбиваются на пары отличающихся друг от друга только цветом $(n-1, n-1)$-й клетки. Таким образом, при каждом $n > 4$ построено разбиение всех хороших таблиц на пары, что означает, что общее количество хороших таблиц чётно.