8.5. Друзья решили наполнить два бассейна. Для этого они использовали 4 шланга: 2 шланга типа A с одним напором, и 2 шланга типа B – с другим. Ровно в 10 часов они опустили шланги типа A в первый бассейн, а шланги типа B – во второй и включили воду. Через некоторое время они заметили, что в первом бассейне в полтора раза больше воды, чем во втором, и перенесли один шланг из первого бассейна во второй. В 13 часов один из друзей обратил внимание, что теперь во втором бассейне в полтора раза больше воды, чем в первом.

В какое время друзья переносили шланг во второй бассейн?

Ответ: в 11 часов.

Решение. Обозначим через a и b мощности шлангов типа A и типа B, т. е. эти шланги наполняют бассейн за $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ часов соответственно. Пусть шланг перенесли из первого бассейна во второй через t часов после включения. Через t часов в первом бассейне было $2at$ воды, а во втором – $2bt$. По условию верно равенство $2at = 1{,}5 \cdot 2bt$, откуда $a = 1{,}5b$. После переноса шланга до 13 часов осталось $3 - t$ часа. Значит, к 13 часам в первом бассейне набралось

$$2at + a(3 - t) = 3bt + 1{,}5b(3 - t) = 1{,}5bt + 4{,}5b$$

воды, а во втором –

$$2bt + (3 - t)(2b + a) = 2bt + (3 - t) \cdot 3{,}5b = 10{,}5b - 1{,}5bt.$$

Согласно условию верно равенство

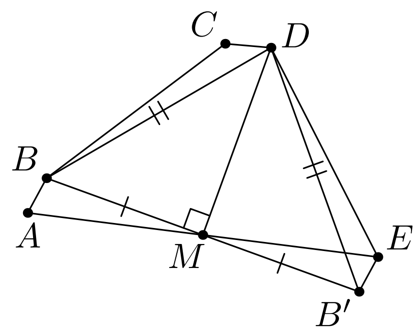
$$1{,}5 \cdot (1{,}5bt + 4{,}5b) = 10{,}5b - 1{,}5bt.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, находим, что $3{,}75bt = 3{,}75b$, следовательно, $t = 1$. Таким образом, шланг из первого бассейна перенесли во второй через час после начала, т. е. в 11 часов.

8.6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ угол при вершине C равен сумме углов при вершинах A и E, $AB = CD$ и $BC = DE$. Точка M – середина стороны AE.

Докажите, что угол BMD прямой.

Решение. Отметим точку B', симметричную точке B относительно точки M. Диагонали четырёхугольника $ABEB'$ делятся их точкой пересечения пополам, поэтому этот четырёхугольник – параллелограмм. В частности, $B'E = AB = CD$. Кроме того,



$$\angle DEB' = \angle DEA + \angle AEB' = \\ = \angle DEA + \angle EAB = \angle BCD.$$

Следовательно, треугольники BCD и DEB' равны по первому признаку равенства треугольников. Значит, $BD = DB'$ и треугольник DBB' является равнобедренным. Отрезок DM – его медиана, проведённая к основанию. По свойству равнобедренного треугольника, она является и его высотой, откуда $\angle BMD = 90°$, что и требовалось доказать.

8.7. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть a – наименьший делитель числа n, больший 1, а b – наибольший делитель числа n, меньший n. Известно что число $a^3 - a$ делится на b.

Найдите все возможные значения n.

Ответ: 6, 12 и числа вида p и p^2, где p – произвольное простое число.

Решение. Число a простое как наименьший делитель, больший единицы. Рассмотрим разложение

$$a^3 - a = a(a-1)(a+1).$$

Так как a – наименьший простой делитель числа n, то число $a-1$ взаимно просто с n и, в частности, с b. Если $a \neq 2$, то и число $a+1$ взаимно просто с n, иначе у n был бы делитель $\frac{a+1}{2}$, меньший a. Значит, a делится на $b = \frac{n}{a}$. Но число a простое, поэтому $\frac{n}{a}$ равно 1 или a. Эти два варианта дают ответы $n = a$ и $n = a^2$ соответственно.

Пусть теперь $a = 2$. Тогда число $b = \frac{n}{2}$ делит $a^3 - a = 6$. Случаи $b = 1$ и $b = 2$ дают ответы $n = 2$ и $n = 4$, случай $b = 3$ даёт ответ $n = 6$, а случай $b = 6$ даёт ответ $n = 12$.

Нетрудно видеть, что все найденные значения удовлетворяют условию задачи.

8.8. В каждую вершину куба записали некоторое натуральное число так, что есть ровно M рёбер, у которых суммы чисел, записанных в их концах, кратны трём.

Можно ли утверждать, что обязательно найдётся грань, у которой сумма чисел, записанных в вершинах, кратна трём, если

а) $M = 6$? **б)** $M = 7$?

Ответ: а) нет; **б)** да.

Решение пункта а) Рассмотрим куб в котором в двух противоположных вершинах: P и Q записаны двойки, а в остальных вершинах – единицы. Каждая из вершин P и Q является концевой в трёх рёбрах, причём эти тройки не пересекаются. Значит, ровно у шести рёбер сумма чисел, записанных в её концах будет равна $2 + 1 = 3$, а у шести других рёбер эта мусса будет равна $1+1 = 2$. Таким образом, у этого куба $M = 6$. При этом, у каждой грани ровно одна вершина совпадает с P или Q, поэтому, сумма чисел, записанных в вершинах, равна $1 + 1 + 1 + 2 = 5$ и не кратна трём.

Решение пункта б) Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разобьём все его 12 рёбер на 6 пар, каждая из которых состоит из двух противоположных рёбер некоторой грани. Например, подойдут пары

$$(AB, CD), (BC, AD), (A_1B_1, C_1D_1),$$
$$(B_1C_1, A_1D_1), (AA_1, B, B_1), (CC_1, DD_1).$$

По принципу Дирихле какие-то два из 7 рёбер, у которых суммы чисел, записанных в их концах, кратны трём, принадлежат одной паре. В грани, для которой эти рёбра противоположны, сумма чисел, записанных в её вершинах, равна сумме двух чисел, соответствующих данным рёбрам, и, следовательно, она кратна трём.

9.5. Набор, состоящий из 27 гирек: по три массы 1 г, три массы 2 г, ..., три массы 9 г, разложили на 9 групп по три гирьки в каждой. При этом оказалось, что суммарные массы гирек в каждой из групп попарно различаются.

Найдите все возможные значения суммарной массы средней (пятой) по величине группы.

Ответ: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Решение. Докажем, что суммарная масса в пятой группе не меньше 11 и не больше 19. Обозначим суммарные массы гирек в группах через $a_1 < a_2 < \ldots < a_9$.

В первых пяти группах находится 15 гирек, поэтому, суммарная масса $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ гирек в этих группах не меньше, чем сумма масс 15 самых лёгких гирек, т. е. $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 45$. Поскольку во всех группах суммарные массы различны, $a_5 \geqslant a_4 + 1$, $a_4 \geqslant a_3 + 1$, $a_3 \geqslant a_2 + 1$ и $a_2 \geqslant a_1 + 1$. Следовательно,

$$5a_5 \geqslant a_5 + (a_4 + 1) + (a_3 + 2) + (a_2 + 3) + (a_1 + 4) = 45 + 10 = 55,$$

откуда получаем, что $a_5 \geqslant 11$.

Аналогично, суммарная масса $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ гирек в пяти последних группах не больше, чем сумма $3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 105$. И так же получается неравенство

$$5a_5 \leqslant a_5 + (a_6 - 1) + (a_7 - 2) + (a_8 - 3) + (a_9 - 4) = 105 - 10 = 95,$$

откуда получаем, что $a_5 \leqslant 19$.

В таблице приведены разбиения гирек, которые показывают, что масса пятой группы может принимать все значения от 11 до 19.

гр. 1	гр. 2	гр. 3	гр. 4	гр. 5	гр. 6	гр. 7	гр. 8	гр. 9	масса 5 гр.
1,1,5	2,2,4	3,3,3	2,4,4	1,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	11
1,1,4	1,2,4	3,3,3	2,4,5	2,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	12
1,2,2	1,1,4	3,3,3	2,5,5	4,4,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	13
1,1,2	1,2,2	3,3,3	4,4,5	4,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	14
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,5	6,6,6	7,7,7	8,8,8	9,9,9	15
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,6	5,6,6	7,7,7	8,8,9	8,9,9	16
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,6,6	5,5,8	7,7,7	6,9,9	8,8,9	17
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,8	5,6,8	7,7,7	6,8,9	6,9,9	18
1,1,1	2,2,2	3,3,3	4,4,4	5,5,9	6,6,8	7,7,7	6,8,8	5,9,9	19

9.6. Найдите все пары (n, k) натуральных чисел, для которых можно провести в окружности n синих и k белых хорд так, чтобы все синие хорды пересекали различные количества белых хорд, а все белые хорды пересекали различные количества синих хорд.

Ответ: все (n, k) с модулем разности не больше 1.

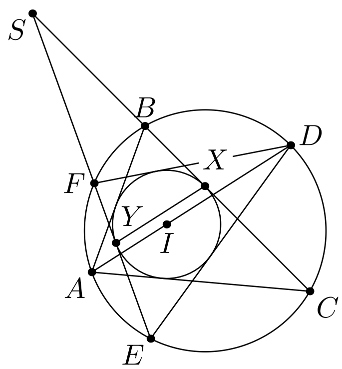
Решение. *Оценка.* Каждый синий отрезок может пересекать от 0 до k белых хорд, всего $k+1$ вариант. По условию у каждой синей хорды это число разное, а значит вариантов $k+1 \geqslant n$. Аналогично $n+1 \geqslant k$, а значит модуль разности n и k не больше единицы.

Пример. Рассмотрим случай $n = k$. Синими сделаем хорды A_iB_i, а красными – C_iD_i. Возьмём на окружности точки A_1, A_2, …, A_{n-1}, A_n, $B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, B_1$ в указанном порядке. Теперь возьмём точки C_n, C_{n-1}, …, C_2, C_1 на дуге B_1A_1 (т.е. C_n ближе остальных к B_1), не содержащей точек A_i, B_i, в указанном порядке и точки D_{n-i} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, лежащие соответственно на дугах B_iB_{i+1}, не содержащих других точек. Наконец отметим точку D_n на дуге A_nB_n, не содержащей других точек. Таким образом, C_i и D_i по разные стороны от хорд $A_1B_1, \ldots, A_iB_i$ и по одну от остальных. Значит C_iD_i пересекает ровно i синих хорд. Заметим, что для синих хорд ситуация симметрична (т.е., начиная построение с C_i и D_i, мы могли бы получить то же расположение). Примеры для $n = k+1$ или $k = n+1$ получаются из этого, если убрать A_1B_1 или C_nD_n соответственно, т.к. A_1B_1 пересекает все белые хорды и для них число пересекаемых синих уменьшится на 1, и аналогично для C_nD_n.

9.7. Треугольники ABC и DEF вписаны в окружность Ω и описаны около окружности ω так, что прямая AD проходит через центр ω.

Докажите, что прямая, проходящая через точки касания окружности ω со сторонами BC и EF, параллельна прямой AD.

Первое решение. Без потери общности, пусть $AC > AB$. Также пусть ω касается BC в точке X, а EF в точке Y. Счётом углов покажем, что прямые XY и AD образуют равные углы с прямой BC, откуда и будет следовать требуемое.



Во-первых, ясно, что

$$\angle(AD, BC) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}). \tag{1}$$

Продлим BC и EF до пересечения в точке S. Ввиду того, что SX и SY – касательные к ω, получаем $SX = SY$, а значит,

$$\angle(XY, BC) = \angle SXY = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XSY. \tag{2}$$

С другой стороны, хорошо известно, что

$$\angle XSY = \angle(BC, EF) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EC} - \overset{\frown}{BF}). \tag{3}$$

Обозначим $\alpha = \overset{\frown}{EC}$, $\beta = \overset{\frown}{BF}$, $\gamma = \overset{\frown}{AF}$ и $\delta = \overset{\frown}{CD}$. Тогда, раз AD проходит через центр ω, то AD – биссектриса угла BAC, посему $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} = \delta$. Аналогично, DA – биссектриса угла FDE, посему $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF} = \gamma$. Из (1),

$$\angle(AD, BC) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta).$$

Из (2) и (3),

$$\angle(XY, BC) = 90^\circ - \frac{1}{4}(\alpha - \beta).$$

Тогда требуемое равенство $\angle(AD, BC) = \angle(XY, BC)$ равносильно

$$360^\circ - \alpha + \beta = 2\beta + 2\gamma + 2\delta \iff$$

$$\iff 360^\circ = \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta,$$

что верно потому что вся окружность 360° сложена из дуг градусных мер $\alpha = \overset{\frown}{CE}$, $\beta = \overset{\frown}{BF}$, $2\gamma = \overset{\frown}{EF}$ и $2\delta = \overset{\frown}{BC}$.

Второе решение. Обозначим точки касания ω с BC и EF через X и Y соответственно. Более того, пусть $S = EF \cap BC$, а I – центр ω. Тогда, поскольку ω вписана в угол XSY, то $XY \perp SI$.

С другой стороны, по лемме о трезубце, D и A есть центры окружностей, описанных около треугольников BIC и EIF соответственно, ибо условие коллинеарности A, I, D явно влечёт, что D и A – середины соответствующих дуг Ω. Тогда, для двух этих окружностей с центрами A и D, а также Ω радикальным центром является точка S, лежащая на двух из трёх радикальных осей. Значит, она должна лежать и на третьей, то есть на радоси двух окружностей с центрами A и D и проходящими через I. Но раз эти окружности касаются в I, $SI \perp AD$.

Объединяя выводы двух абзацев, несложно заключить, что $XY \parallel AD$, что и требовалось.

9.8. Непустое множество S натуральных чисел назовём *особым*, если для любого его элемента a множество S содержит различные числа b и c, отличные от a, такие, что $a = 2023 \cdot \text{НОД}(b, c) + 1$.

Существует ли особое множество, в котором количество элементов

а) конечно; **б)** бесконечно?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) Докажем, что не существует конечного особого множества. Предположим противное. Пусть S – конечное особое множество. Несложно видеть, что каждый элемент множества S представи́м в виде $2023k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Выберем максимальный элемент $a = 2023x + 1$ множества S. Согласно определению особого множества, в S найдутся различные числа $b = 2023y+1$ и $c = 2023z+1$, отличные от a, такие, что

$$a = 2023 \cdot \text{НОД}(b, c) + 1, \quad \text{т. е.} \quad x = \text{НОД}(2023y + 1, 2023z + 1). \qquad (1)$$

Следовательно, $2023y + 1 \,\vdots\, x$ и $2023z + 1 \,\vdots\, x$. Поэтому $2023(z - y) \,\vdots\, x$ и $\text{НОД}(2023, x) = 1$, а значит, $(z - y) \,\vdots\, x$. Так как $x > y$, $x > z$ и $y \neq z$, то $0 < |y - z| < x$ и последняя делимость невозможна – противоречие.

б) Пусть S – множество всех натуральных чисел, представимых в виде $2023k+1$, где натуральное число k взаимно просто с 2023. Докажем, что множество S особое. Выберем произвольное число $a = 2023x + 1 \in S$ и покажем, что множество S содержит различные числа $b = 2023y + 1$ и $c = 2023z + 1$, отличные от a и удовлетворяющие равенствам (1).

Так как x и 2023 взаимно просты, то найдётся такое натуральное число, что $2023t + 1 \,\vdots\, x$. Из китайской теоремы об остатках следует существование такого натурального числа y, что $y \equiv t \pmod{x}$ и $y \equiv 1 \pmod{2023}$. Тогда

$$2023y + 1 \,\vdots\, x \quad \text{и} \quad \text{НОД}(y, 2023) = 1.$$

Рассмотрим элементы множества S, равные $b = 2023y+1$ и $c = 2023z+1$, где $z = 2023x + y$. Для них верны равенства

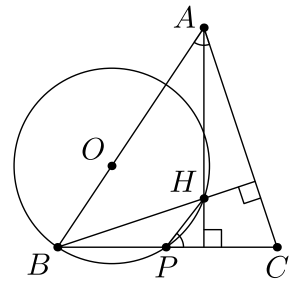
$$\begin{aligned}&\text{НОД}(2023y + 1, 2023z + 1) = \text{НОД}(2023y + 1, 2023(z - y)) =\\ &= \text{НОД}(2023y + 1, 2023^2 x) = \text{НОД}(2023y + 1, x) = x.\end{aligned}$$

Следовательно, указанные числа $b, c \in S$ дают требуемое представление числа $a \in S$.

10.5. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне BC отметили точку P такую, что $\angle HPC = \angle BAC$.

Докажите, что центр описанной окружности треугольника BHP лежит на прямой AB.

Первое решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника BHP. По свойству центра описанной окружности,



$$\begin{aligned}\angle OBP = 90^\circ - \angle BHP = 90^\circ - (\angle HPC - \angle HBC) = \\ = 90^\circ - \angle BAC + (90^\circ - \angle ACB) = \\ = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = \angle ABC.\end{aligned}$$

Из равенства $\angle OBP = \angle ABC$ следует, что точка O лежит на прямой AB.

Второе решение. Отметим точку H', симметричную точке H относительно прямой AB. Хорошо известно, что H' лежит на описанной окружности треугольника ABC. Так как прямые CH и HH' обе перпендикулярны AB, точки C, H и H' лежат на одной прямой. Из вписанности четырёхугольника $AH'BC$ получаем равенства

$$\angle BH'H = \angle BH'C = \angle BAC = \angle HPC.$$

Значит, четырёхугольник $BPHH'$ вписан. Центр его описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку HH' – прямой AB. Осталось заметить, что описанные окружности треугольника BPH и четырёхугольника $BPHH'$ совпадают.

10.6. Найдите все пары (p, q) простых чисел, удовлетворяющих равенству

$$p^{2q+1} = q^p + 2023.$$

Ответ: $(2, 5)$.

Решение. Так как числа p^{2q+1} и q^p отличаются на нечётное число 2023, одно из них чётное, а другое – нечётное. По условию числа p и q простые, поэтому, чётное из них равно 2. Рассмотрим два варианта по отдельности.

Предположим, что $p = 2$. Тогда равенство из условия примет вид

$$2^{2q+1} = q^2 + 2023.$$

Число q нечётно, поэтому, можно применить малую теорему Ферма, из которой следует, что $2^{2q+1} \equiv 2^{2+1} = 8 \pmod{q}$. Значит, $8 \equiv 2023 \pmod{q}$, откуда вытекает, что q является делителем числа $2023 - 8 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Очевидно, что $2^{27} > 13^2 + 2023$ и $2^{63} > 31^2 + 2023$, а непосредственная подстановка показывает, что число $q = 5$ подходит: $2^{11} = 2048 = 5^2+2023$.

Предположим, что $q = 2$. Тогда равенство из условия примет вид

$$p^5 = 2^p + 2023.$$

Число p нечётно, поэтому, можно применить малую теорему Ферма, из которой следует, что $2^p + 2023 \equiv 2 + 2023 = 2025 \pmod{p}$. Значит, p является делителем числа $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Значение $p = 3$ не подходит, так как, очевидно, $3^5 = 243 < 2023$, а значение $p = 5$ не подходит, поскольку $5^5 = 3125 \neq 2055 = 2^5 + 2023$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет только найденная в первом случае пара $(2, 5)$.

10.7. В выпуклом n-угольнике провели несколько диагоналей так, что каждая проведённая диагональ пересекается во внутренних точках не более, чем с одной другой. В результате n-угольник разбился на меньшие многоугольники.

Определите, какое максимальное количество треугольников могло оказаться среди них.

Ответ: $2n-5$ для нечётных n и $2n-4$ для чётных n.

Решение. Обозначим искомое максимальное количество треугольников через $\Delta(n)$. Ясно, что $\Delta(3) = 1$ (в треугольнике нет диагоналей) и $\Delta(4) = 4$ (можно провести обе диагонали). Рассмотрим выпуклый n-угольник, $n \geqslant 5$. Проведём диагональ d, которая разделит его на четырёхугольник и $n-2$-угольник. Проводя диагонали, не пересекающие d, можно получить 4 треугольника в четырёхугольнике, и $\Delta(n-2)$ треугольника в $n-2$-угольнике. Следовательно, $\Delta(n) \geqslant \Delta(n-2)+4$, откуда для нечётных n получается оценка $\Delta(n) \geqslant 4\cdot\frac{n-3}{2}+1 = 2n-5$, а для чётных n получается оценка $\Delta(n) \geqslant 4\cdot\frac{n-4}{2}+4 = 2n-4$.

Покажем при помощи метода математической индукции, что полученные оценки точны.

База индукции: $\Delta(3) = 1 = 2\cdot 3-5$ и $\Delta(4) = 4 = 2\cdot 4-4$.

Предположим, что для всех n от 3 до k верны значения $\Delta(n)$, указанные в ответе. Рассмотрим произвольный $k+1$-угольник M, в котором провели диагонали согласно условию задачи и получили $\Delta(k+1)$ треугольников разбиения. Заметим, что по крайней мере одна проведённая диагональ d не пересекается ни с какой другой проведённой диагональю. Действительно, рассмотрим любую проведённую диагональ AB: если она ни с кем не пересекается, то является искомой, если же она пересекается с диагональю CD, то по крайней мере один из отрезков AC, AD, BC и BD является диагональю и не пересекается ни с какой проведённой диагональю, поэтому этот отрезок – искомая диагональ (она обязана быть проведённой из-за максимальности количества треугольников). Диагональ d разбивает $k+1$-угольник M на a-угольник и $k+3-a$-угольник, значит,

$$\Delta(k+1) \leqslant \Delta(a)+\Delta(k+3-a) \leqslant 2a-4+2(k+3-a)-4 = 2(k+1)-4.$$

Для чётного $k+1$ требуемая оценка уже доказана, а для нечётного $k+1$ заметим, что числа a и $k+3-a$ разной чётности, поэтому, равенство в последнем неравенстве невозможно и $\Delta(k+1) \leqslant 2(k+1)-5$.

10.8. На доске записали три многочлена с действительными коэффициентами:

$$x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 - 2x + 1,$$
$$x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 - 2x + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + a_3x^3 + b_3x^2 - 2x + 1.$$

Оказалось, что $a_1b_2 > a_2b_1$, $a_2b_3 > a_3b_2$ и $a_3b_1 > a_1b_3$.

Докажите, что хотя бы один из записанных на доске многочленов имеет действительный корень.

Решение. Обозначим

$$f_i(x) = x^4 + a_ix^3 + b_ix^2 - 2x + 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Докажем, что среди чисел $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_3(1)$ хотя бы одно неположительное. Предположим противное. Тогда $f_i(1) = a_i + b_i > 0$. Из неравенства $a_ib_{i+1} > a_{i+1}b_i$ следует, что $a_i \cdot \big(f_{i+1}(1) - a_{i+1}\big) > a_{i+1} \cdot \big(f_i(1) - a_i\big)$, т.е. $a_i \cdot f_{i+1}(1) > a_{i+1} \cdot f_i(1)$. Так как $f_1(1) > 0$, $f_2(1) > 0$, $f_3(1) > 0$, то

$$\frac{a_1}{f_1(1)} > \frac{a_2}{f_2(1)} > \frac{a_3}{f_3(1)} > \frac{a_1}{f_1(1)},$$

чего не может быть.

Не ограничивая общности, пусть $f_1(1) < 0$. Многочлен $f_1(x)$, как и любой другой многочлен чётной степени с положительным старшим коэффициентом, принимает положительные значения при всех достаточно больших по модулю значениях переменной x. Зафиксируем произвольное число $b > 1$ такое, что $f(b) > 0$. Поскольку на концах отрезка $[1; b]$ многочлен $f_1(x)$ принимает значения разного знака (неположительное и положительное), на этом отрезке есть точка, в которой он равен нулю, т. е. этот многочлен имеет действительный корень.

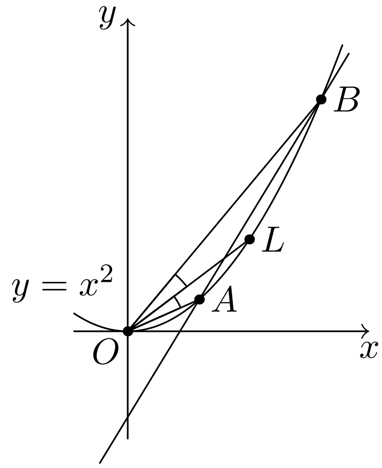
11.5. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$, на правой ветви которой зафиксирована произвольная точка L, отличная от начала координат – точки O. Пары точек A и B выбираются на правой ветви параболы так, что прямая OL является биссектрисой угла AOB, после чего проводится прямая AB.

Докажите, что все получаемые таким образом прямые AB проходят через одну и ту же точку.

Решение. Пусть точки A, B, L имеют координаты $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $L(c, c^2)$. Найдём уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{x - a}{b - a}, \quad \text{т.е.} \quad y = (a + b)x - ab.$$

Через α, β и γ обозначим углы между осью Ox и прямыми OA, OB и OL, соответственно. Тогда верны равенства $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$ и $\operatorname{tg}\gamma = c$. Так как OL – биссектриса угла AOB, то $\gamma = (\alpha + \beta)/2$. Если $\gamma \neq 45°$, то определено значение $\operatorname{tg}(2\gamma)$ и



$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2c}{1 - c^2} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a + b}{1 - ab}. \qquad (2)$$

Подставляя в уравнение прямой AB значение $y = -1$, получаем, что на этой прямой лежит точка с координатами $\left(\dfrac{-1 + ab}{a + b}, -1\right)$. Из равенства (2) видно, что эти координаты равны $\left(\dfrac{c^2 - 1}{2c}, -1\right)$ ии не зависят от выбора точек A и B. Следовательно, все получаемые в задаче прямые AB проходят через найденную фиксированную точку.

Если же $\gamma = 45°$, то $\alpha + \beta = 90°$ и $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = ab = 1$. Поэтому прямая AB проходит через фиксированную точку с координатами $(0, -1)$.

11.6. Дана бумажная полоска 1×2024. Вася и Петя играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За один ход разрешается закрасить любую ещё не закрашенную клетку полоски в любой из двух цветов – красный или синий. Когда все клетки полоски закрашены, её разрезают на минимально возможное количество полосок так, чтобы все клетки каждой полоски были одного цвета.

Какое максимальное количество таких полосок может гарантировать Вася вне зависимости от действий Пети?

Ответ: 1013.

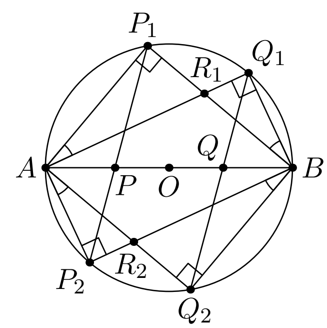
Решение. Приведём стратегию Васи, придерживаясь которой он может гарантировать, что после разрезания получится не менее 1013 полосок. Пусть Вася перед игрой мысленно разобьёт полоску на доминошки (прямоугольники 1×2). На каждом своём ходу Вася будет выбирать доминошку, в которой Петя только что закрасил клетку, и красить непокрашенную клетку этой доминошки в цвет, отличный от использованного Петей. Когда все клетки будут закрашены, найдутся по крайней мере 1012 пар соседних клеток разного цвета (по одной в каждой доминошке), следовательно, будет сделано не меньше 1012 разрезов и образуется хотя бы 1013 полосок.

Покажем, как может действовать Петя, чтобы в результате осталось не больше 1013 полосок. Пусть на первом ходу он закрасит синим цветом самую левую клетку. Далее каждым ходом он будет закрашивать самую левую незакрашенную клетку тем же цветом, что и её сосед слева. Таким образом, на каждом своём ходу, кроме первого, Петя будет создавать хотя бы одну новую пару соседних клеток, окрашенных одним цветом. Изначально есть 2023 пары соседних клеток, а своими ходами Петя сделает одноцветными хотя бы 1011 из них. Следовательно, в конце игры останется не больше 1012 пар соседних клеток разного цвета, т. е. будет сделано не больше 1012 разрезов и образуется не больше 1013 полосок.

11.7. На диаметре AB окружности ω выбраны точки P и Q так, что $0 < AP < AQ < AB$. Через точки P и Q проведены две параллельные прямые ℓ_p и ℓ_q соответственно. Прямая ℓ_p пересекает окружность ω в точках P_1 и P_2, а прямая ℓ_q пересекает окружность ω в точках Q_1 и Q_2, точки P_1 и Q_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Прямые AQ_1 и P_1B пересекаются в точке R_1, а прямые AQ_2 и P_2B пересекаются в точке R_2.

Докажите, что середины отрезков P_1P_2, Q_1Q_2 и R_1R_2 лежат на одной прямой.

Первое решение. Через M_p, M_q и M_r обозначим середины отрезков P_1P_2, Q_1Q_2 и R_1R_2, соответственно. Пусть O – центр окружности ω. Так как прямые OM_p и OM_q – серединные перпендикуляры к параллельным хордам P_1P_2 и Q_1Q_2, соответственно, то точки M_p, M_q и O лежат на одной прямой. Поместим в точках P_1, P_2, Q_1 и Q_2 положительные массы x, x, y и y, соответственно. В точках A и B поместим соответственно



массы $y\left(\dfrac{Q_1R_1}{AR_1}+\dfrac{Q_2R_2}{AR_2}\right)$ и $x\left(\dfrac{P_1R_1}{BR_1}+\dfrac{P_2R_2}{BR_2}\right)$. Выберем x и y такими, чтобы массы точек A и B были равными, т.е.

$$y\left(\frac{Q_1R_1}{AR_1}+\frac{Q_2R_2}{AR_2}\right)=x\left(\frac{P_1R_1}{BR_1}+\frac{P_2R_2}{BR_2}\right). \qquad (1)$$

Массы точек A и B соберём в точке O, массы точек P_1 и P_2 – в точке M_P, наконец, массы точек Q_1 и Q_2 – в точке M_q. Следовательно, центр масс рассматриваемой системы материальных точек лежит на прямой M_pM_q.

Сгруппируем исходные массы точек вторым способом. В точку R_1 переместим массу $x\left(1+\dfrac{P_1R_1}{BR_1}\right)$ из точек P_1 и B, а также массу $y\left(1+\dfrac{Q_1R_1}{AR_1}\right)$ из точек Q_1 и A. Аналогично, в точку R_2 переместим массу $x\left(1+\dfrac{P_2R_2}{BR_2}\right)$ из точек P_2 и B, а также массу $y\left(1+\dfrac{Q_2R_2}{AR_2}\right)$ из точек Q_2 и A. Докажем, что массы точек R_1 и R_2 равны, т.е. M_r – центр масс рассматриваемой системы материальных точек, а значит, точки M_p, M_q и M_r лежат на одной прямой. Необходимо показать, что

$$y\left(\frac{Q_1R_1}{AR_1}-\frac{Q_2R_2}{AR_2}\right)=x\left(\frac{P_2R_2}{BR_2}-\frac{P_1R_1}{BR_1}\right). \tag{2}$$

Равенство (2) будет следовать из (1), если мы покажем, что

$$\frac{Q_2R_2}{AR_2}:\frac{Q_1R_1}{AR_1}=\frac{P_1R_1}{BR_1}:\frac{P_2R_2}{BR_2}. \tag{3}$$

Так как прямые ℓ_p и ℓ_q параллельны, то дуги P_1Q_1 и P_2Q_2 окружности ω, заключённые между ними, равны. Следовательно,

$$\angle P_1AQ_1=\angle P_1BQ_1=\angle P_2AQ_2=\angle P_2BQ_2.$$

Так как AB – диаметр окружности ω, то

$$\angle AP_1B=\angle AQ_1B=\angle AP_2B=\angle AQ_2B=90^\circ.$$

Следовательно, треугольники AP_1R_1, AP_2R_2, BQ_1R_1 и BQ_2R_2 подобны. Поэтому, $\frac{Q_2R_2}{Q_1R_1}=\frac{BR_2}{BR_1}$ и $\frac{AR_1}{AR_2}=\frac{P_1R_1}{P_2R_2}$. Перемножив последние два равенства, получаем равенство (3).

Второе решение. Введём комплексную систему координат, в которой ω – единичная окружность, а прямые ℓ_p и ℓ_q параллельны мнимой оси. Обозначим координаты точек P_1, Q_1 и A через p, q и a соответственно. Тогда координаты точек P_2, Q_2 и B равны $\overline{p}$, $\overline{q}$ и $-a$ соответственно. По формуле пересечения хорд единичной окружности, координаты r_1 и r_2 точек R_1 и R_2 удовлетворяют равенствам

$$\overline{r_1}=\frac{(a+q)-(-a+p)}{aq-(-a)p}=\frac{2a+q-p}{a(q+p)} \quad \text{и}$$
$$\overline{r_2}=\frac{(a+\overline{q})-(-a+\overline{p})}{a\overline{q}-(-a)\overline{p}}=\frac{2a+\overline{q}-\overline{p}}{a(\overline{q}+\overline{p})}=\frac{2apq+p-q}{a(p+q)}.$$

Точка, сопряжённая середине отрезка R_1R_2 имеет координату

$$\frac{\overline{r_1}+\overline{r_2}}{2}=\frac{1+pq}{p+q}.$$

Нетрудно видеть, что это число равно своему сопряжённому, т. е. середина отрезка R_1R_2 лежит на вещественной оси вместе с точками $Re(p)$ и $Re(q)$ – серединами отрезков P_1P_2 и Q_1Q_2.

Замечание: Из второго решения видно, что во-первых, утверждение задачи верно и в том случае, когда точка Q лежит между точками A и P, а во-вторых, что середина отрезка R_1R_2 совпадает с точкой пересечения диагоналей равнобедренной трапеции $P_1P_2Q_2Q_1$.

11.8. Найдите все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для любых действительных чисел x и y верно равенство

$$f(x+y)+f\big(f(x)+f(y)-y\big)=f(x)+f(y).$$

Ответ: $f(x)\equiv\text{const}$.

Первое решение. Пусть $f(a)=f(b)$ для некоторых действительных a и b. Тогда подставляя в исходное равенство вначале $x=a$, а потом $x=b$ и вычитая из одного равенства другое, получим $f(a+y)=f(b+y)$ для всех действительных y. Значит,

$$f(x)=f\big(x+(b-a)\big) \qquad (1)$$

для всех действительных x.

Подставляя $x=0$ в исходное равенство, после вычитания $f(y)$ из обеих частей получим

$$f\big(f(0)+f(y)-y\big)=f(0) \qquad (2).$$

Подставляя $y=0$ в исходное равенство, после вычитания $f(x)$ из обеих частей получим

$$f\big(f(x)+f(0)\big)=f(0). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем $f\big(f(x)+f(0)\big)=f\big(f(x)+f(0)-x\big)$, откуда ввиду (1) выводим, что x – период f для любого действительного x. Значит, $f(x)=\text{const}$. Несложно убедиться, что она подходит.

Второе решение. Обозначим $f(0)=c$ и подставим в исходное равенство $x=0$, получим равенство

$$f\big(c+f(y)-y\big)=c.$$

Подставив в исходное равенство $x=-y$, получим, что

$$c+f\big(f(-y)+f(y)-y\big)=f(-y)+f(y).$$

Так как

$$y=c+f\big(f(-y)+f(y)-y\big)-(f(-y)+f(y)-y),$$

то из первого равенства следует, что $f(y)=c$ при всех $y\in\mathbb{R}$.