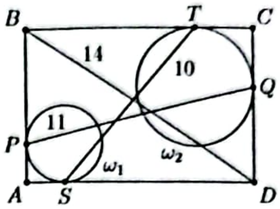
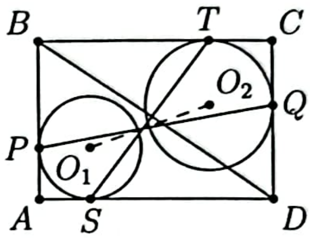
8.1. Внутри прямоугольника $ABCD$ нарисовали две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 так, что окружность ω_1 касается сторон AB и AD в точках P и S соответственно, а окружность ω_2 касается сторон CB и CD в точках T и Q соответственно (см. рис.). Известны длины трёх отрезков: $PQ = 11$, $ST = 10$ и $BD = 14$.



Найдите расстояния между центрами окружностей ω_1 и ω_2.

Ответ: 5.

Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Пусть $AB = a$, $BC = b$, а через t обозначим сумму радиусов окружностей ω_1 и ω_2. Из теоремы Пифагора следует, что



$$PQ^2 = b^2 + (a-t)^2, \quad ST^2 = a^2 + (b-t)^2,$$
$$BD^2 = a^2 + b^2, \quad O_1O_2^2 = (a-t)^2 + (b-t)^2.$$

Поэтому $O_1O_2^2 = TS^2 + PQ^2 - BD^2 = 10^2 + 11^2 - 14^2 = 25$, т.е. $O_1O_2 = 5$.

Сканировано с CamScanner

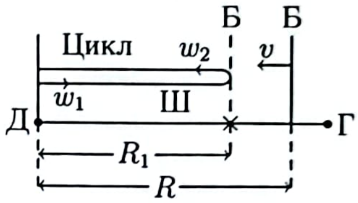
8.2. Город и загородный дом бизнесмена Бори находятся на расстоянии 2 километра. Однажды бизнесмен Боря вышел из города и пошёл к своему дому со скоростью 4 км/ч. Одновременно с ним из дома выбежал пёс Шарик, который носится между Борей и домом: он, добежав до Бори, разворачивается и бежит к дому, а добежав до дома разворачивается и бежит к Боре; причём от дома к Боре Шарик бежит со скоростью 12 км/ч, а от Бори к дому — со скоростью 8 км/ч.

Сколько километров пробежит Шарик, пока Боря не придёт в свой загородный дом?

Ответ: 48 километров.

Решим задачу в общем виде. Пусть S (км) – расстояние между городом и загородным домом Бори по дороге, их соединяющей, v (км/ч) – скорость Бори, w_1 – скорость, с которой Шарик бежит к Боре, w_2 (км/ч)– скорость, с которой Шарик бежит к дому.

Назовём *циклом* промежуток времени, при котором Шарик бежит от дома к Боре и, добежав до Бори, разворачивается и бежит обратно к дому. Процесс движения представляет собой последовательность циклов, при этом конец одного цикла является началом следующего.



Первое решение. Докажем, что средняя скорость $w_{ср.}$ Шарика на каждом цикле одна и та же.

Рассмотрим какой-либо цикл. Пусть R – расстояние между Борей и домом в начале цикла (см. рис.) Пусть Шарик во время цикла пробежал до встречи с Борей R_1 км (явное представление величины R_1 через известные параметры движения нам не понадобится). Эти R_1 км Шарик пробежал со скоростью w_1. Эти же R_1 км Шарик со скоростью w_2 пробежит обратно, двигаясь к дому. Итак, Шарик за цикл пробежал R_1 километров дважды, сначала со скоростью w_1, а затем со скоростью w_2. Значит, средняя скорость $w_{ср.}$ Шарика за цикл равна

$$w_{ср.} = \frac{2R_1}{\dfrac{R_1}{w_1} + \dfrac{R_1}{w_2}} = \frac{2w_1w_2}{w_1 + w_2}$$

(понятно, что получили хорошо известную формулу для средней скорости тела, которое прошло одно и тоже расстояние дважды, сначала со скоростью w_1, а затем со скоростью w_2; хотя это для решения не нужно, отметим, что полученная величина называется в математике *средним гармоническим* чисел w_1 и w_2).

Таким образом, весь промежуток T времени между выходом Бори из города до прихода его домой разбивается на последовательные участки-циклы, и на каждом таком временно́м участке средняя скорость $w_{\text{ср.}}$ Шарика одна и та же, а значит, он пробежит расстояние, равное $w_{\text{ср.}}T$. Так как время T до возвращения Бори домой равно

$$T = \frac{S}{v}(\text{ч}),$$

то Шарик пробежит путь, равный

$$T \cdot w_{\text{ср.}} = \frac{S}{v} \cdot \frac{2w_1w_2}{w_1 + w_2} = \frac{2Sw_1w_2}{v(w_1 + w_2)}.$$

Подставляя числовые данные задачи, получаем, что путь, который пробежал Шарик, составляет

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 8}{4 \cdot (12 + 8)} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 8}{4} = 4 \cdot 12 = 19,2\,(\text{км}).$$

Второе решение. Докажем, что за цикл отношение времени, в течение которого Шарик бежит к Боре, ко времени, в течение которого Шарик бежит домой, равно $\dfrac{w_2}{w_1}$ и, в частности, не зависит от расстояния между Борей и его домом в начале цикла.

Пусть Шарик за цикл до встречи с Борей пробежал R_1 км, эти R_1 км он пробежал со скоростью w_1, а значит, затратил на них $t_1 = \dfrac{R_1}{w_1}$ часов. Эти же R_1 км со скоростью w_2 Шарик пробежал обратно, а значит, затратил на них $t_2 = \dfrac{R_1}{w_2}$ часов. Итак, Шарик бежал к Боре в $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{w_2}{w_1}$ раз дольше, чем к дому.

Таким образом, весь промежуток T времени между выходом Бори из города до возвращения его домой разбивается на участки-циклы, и на каждом таком временно́м участке отношение времени, в течение которого Шарик бежит к Боре, ко времени, в течение которого Шарик бежит домой, равно w_2/w_1. Следовательно, промежуток T разбивается на две

Сканировано с CamScanner

части: $T_{\text{Б}}$ – время, в течение которого Шарик бежал к Боре, и $T_{\text{Д}}$ – время, в течение которого Шарик бежал домой; при этом,

$$\frac{T_{\text{Б}}}{T_{\text{Д}}} = \frac{w_2}{w_1}.$$

Так как $T = \dfrac{S}{v}$, то для того чтобы узнать, сколько из этого времени T Шарик двигался к Боре, а сколько к дому, это время T нужно разделить в отношении $\dfrac{w_2}{w_1}$, т.е. к Боре он двигался $T \cdot \dfrac{w_2}{w_1 + w_2}$, а к дому $T \cdot \dfrac{w_1}{w_1 + w_2}$. Поэтому Шарик пробежал путь, равный

$$T \cdot \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot w_1 + T \cdot \frac{w_1}{w_1 + w_2} \cdot w_2 = \frac{S}{v} \cdot \frac{2w_1 w_2}{w_1 + w_2} = \frac{2Sw_1 w_2}{v(w_1 + w_2)}.$$

Получили то же выражение, что и в Первом решении, для расстояния, которое пробежит Шарик.

Сканировано с CamScanner

8.3. На доске написано трёхзначное натуральное число. Каждую секунду число n, записанное на доске, стирают и вместо него записывают число $n + n/p$, где p – наибольший простой делитель числа n.

Докажите, что либо ровно после 999 секунд, либо ровно после 1000 секунд на доске будет записана степень двойки.

Решение. Для произвольного целого числа $a > 1$ через $f(a)$ обозначим частное a/p, где p – наибольший простой делитель числа a, а так же обозначим n за a_0 и за a_k обозначим число на доске, записанное через k секунд. Если $a_n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, то $a_{n+1} = a_n + f(a_n) = 3 \cdot 2^{k-1}$, а значит, $a_{n+2} = a_{n+1} + f(a_{n+1}) = 2^{k+1}$. Следовательно, если в последовательности (a_n) встретится степень двойки, то с этого момента каждый второй элемент последовательности будет степенью двойки.

Для произвольного натурального числа $a = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$, где p_1, p_2, …, p_m – различные простые числа, а α_0, α_1, … , α_m – целые неотрицательные числа, через $g(a)$ обозначим число $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_m p_m$. Число a является степенью двойки тогда и только тогда, когда $g(a) = 0$. Для любых целых чисел $p \geqslant 2$ и $\alpha \geqslant 0$ выполнено неравенство $p^\alpha \geqslant \alpha p$, которое доказывается методом математической индукции по α. Так как для любых целых чисел x, $y \geqslant 2$ выполнено неравенство $xy \geqslant x + y$, то $g(a) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_m p_m \leqslant p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$. В частности, $g(a_0) \leqslant a_0 \leqslant 999$.

Если $g(a) > 0$, то

$$a + f(a) = 2^{\alpha_0+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m - 1} \left(\frac{p_m + 1}{2}\right) = 2^{\beta_0} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_m^{\beta_m},$$

где $\beta_0 \geqslant \alpha_0 + 1$, $\beta_1 \geqslant \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \alpha_2$, …, $\beta_{m-1} \geqslant \alpha_{m-1}$ и $\beta_m = \alpha_m - 1$. Следовательно,

$$g\big(a + f(a)\big) - g(a) = (\beta_1 - \alpha_1)p_1 + (\beta_2 - \alpha_2)p_2 + \ldots +$$
$$+(\beta_{m-1} - \alpha_{m-1})p_{m-1} - p_m \leqslant p_1^{\beta_1 - \alpha_1} p_2^{\beta_2 - \alpha_2} \ldots p_{m-1}^{\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}} - p_m \leqslant$$
$$\leqslant \frac{p_m + 1}{2} - p_m = \frac{1 - p_m}{2} \leqslant -1.$$

Если среди чисел a_0, a_1, …, a_{998} есть степень двойки, то, как отмечено выше, либо a_{999}, либо a_{1000} является степенью двойки. Предположим, что среди чисел a_0, a_1, …, a_{998} нет степени двойки, тогда $g(a_0) \leqslant 999$, $g(a_1) \leqslant 998$, …, $g(a_{999}) \leqslant 0$, т. е. a_{999} – степень двойки.

Сканировано с CamScanner

8.4. По кругу записано 101 число. Возле первого числа написали утверждение «Это число больше следующего.»; возле второго – «Это число больше каждого из двух следующих.»; возле третьего – «Это число больше каждого из трёх следующих.»; и т.д.; наконец, возле сотого – «Это число больше каждого из ста следующих.».

Какое наибольшее количество верных утверждений может быть среди 100 написанных?

Ответ: 50.

Решение. Пусть наибольшее из чисел (любое из наибольших, если их несколько) имеет номер i. Если $i = 100$, то верными не могут быть утверждения возле чисел с номерами $50, 51, \ldots, 99$ (всего 50 чисел), а если $i = 1$ или $i = 101$ – возле чисел с номерами $51, 52, \ldots, 100$ (всего 50 чисел). Теперь рассмотрим остальные значения i. Утверждения возле чисел под номерами $\lceil\frac{i}{2}\rceil, \lceil\frac{i}{2}\rceil+1, \ldots, i-1$ не могут быть верными, иначе соответствующее число было бы больше максимального. Также утверждения возле чисел под номерами $\lceil\frac{i+101}{2}\rceil, \lceil\frac{i+101}{2}\rceil + 1, \ldots, 100$ не могут быть верными. Ясно, что $i - 1 < \lceil\frac{i+101}{2}\rceil$ и эти два множества номеров не пересекаются. Тогда неверных утверждений не менее

$$\left(i - 1 - \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 1\right) + \left(100 - \left\lceil\frac{i+101}{2}\right\rceil + 1\right) =$$
$$= i - \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 101 - 51 - \left\lceil\frac{i-1}{2}\right\rceil = 50.$$

Получаем, что в любом случае верных утверждений не более 50.

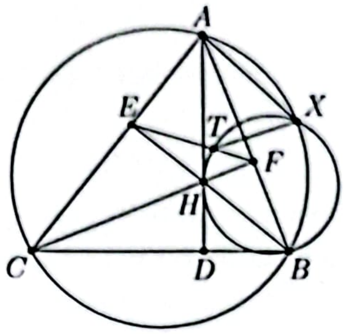
С другой стороны, если по кругу будут записаны числа $101, 100, \ldots, 2, 1$ в указанном порядке, то верными будут первые 50 утверждений.

Сканировано с CamScanner

9.1. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H. Из точки H опущен перпендикуляр HT на прямую EF. Описанные окружности треугольников ABC и BHT пересекаются в точках B и X.

Докажите, что $\angle TXA = \angle BAC$.

Решение. Опустим высоту AD. Четырёхугольник $CEFB$ вписан в окружность, поскольку $\angle CEB = \angle CFB$, тогда $\angle EFC = \angle EBC$. Рассмотрим треугольники HTF и HDB, они подобны по двум углам, а значит $\angle THF = \angle DHB$, откуда получаем равенство $\angle DHF = \angle BHT$



Теперь рассмотрим четырёхугольник $DHFB$, он очевидно вписан в окружность, а значит $\angle DHF = 180° - \angle B$. Рассмотрев вписанный четырёхугольник $BHTX$ получим, что $\angle BXT = 180° - \angle BHT = \angle B$. Последним шагом рассмотрим вписанный четырёхугольник $AXBC$, откуда получаем, что $\angle AXT = 180° - \angle BXT - \angle C = 180° - \angle B - \angle C = \angle A$

Сканировано с CamScanner

9.2. Белоснежка и семь гномов живут в своём домике в лесу. В течение нескольких дней некоторые гномы работали в алмазной шахте, в то время как остальные собирали грибы. Каждый гном выполнял только один вид работы в течение всего дня. Известно, что какие бы два подряд идущих дня ни выбрать, найдутся ровно три гнома, которые в эти два дня выполняли оба вида работы. Кроме того, для любых двух дней найдётся гном, выполнявший оба вида работы в эти дни.

Какое наибольшее количество дней могла продолжаться описанная ситуация?

Ответ: 128 дней.

Решение. Пронумеруем гномов числами от 1 до $n = 7$ и поставим в соответствие каждому дню последовательность длины n, в которой на позиции k стоит 1, если в этот день гном с номером k работал в алмазной шахте, и 0, если он собирал грибы. Тогда в условии задачи требуется найти наибольшее число последовательностей длины $n = 7$, составленных из нулей и единиц, которое можно выписать в ряд так, чтобы каждые две соседние последовательности отличались ровно в трёх позициях и все последовательности были различны (такой ряд назовём *сказочным*). Докажем методом математической индукции, что для каждого $n \geqslant 4$ существует сказочный ряд из всех 2^n различных последовательностей.

База индукции. Для $n = 4$ приведём сказочный ряд длины 16 в явном виде: $0,0,0,0 \to 0,1,1,1 \to 1,0,0,1 \to 1,1,1,0 \to 0,0,1,1 \to 1,1,0,1 \to$ $\to 0,1,1,0 \to 1,0,1,1 \to 0,1,0,1 \to 1,0,0,0 \to 1,1,1,1 \to 0,1,0,0 \to$ $\to 1,0,1,0 \to 0,0,0,1 \to 1,1,0,0 \to 0,0,1,0$.

Шаг индукции. Предположим, что для некоторого n существует сказочный ряд длины 2^n и обозначим такой ряд через E. Заметим, что:

1) Если к каждой последовательности из E дописать в конце 0, получится сказочный ряд E_0 из 2^n последовательностей длины $n + 1$. Аналогично, определим сказочный ряд E_1.

2) Если в сказочном ряду выбрать произвольные несколько позиций и заменить в каждой последовательности ряда на этих позициях все нули единицами, а единицы – нулями, в результате получится сказочный ряд.

По второму замечанию преобразуем ряд E_1 (не выбирая последнюю позицию) так, чтобы его первая последовательность ровно в двух позициях отличалась от последней последовательности ряда E_0. Если полученный ряд дописать после E_0, получится сказочный ряд длины 2^{n+1}.

Сканировано с CamScanner

9.3. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – последовательность всех составных чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ задана при всех натуральных i равенством

$$b_i = ia_1^2 + (i-1)a_2^2 + \ldots + 2a_{i-1}^2 + a_i^2.$$

Какое наибольшее число подряд идущих элементов последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$ делится на 3?

Ответ: 3.

Решение. Для начала докажем, что в последовательности (b_i) не может быть 4 подряд идущих элементов, каждый из которых делится на 3. Предположим такие элементы нашлись и имеют номера $k-1, k, k+1, k+2$. Тогда на 3 делится также разность

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k =& (k+1)a_1^2 + ka_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2 - ka_1^2 - (k-1)a_2^2 - \ldots - a_k^2 = \\ =& a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Аналогично, на 3 делится разность $b_k - b_{k-1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, а значит, и разность

$$(b_{k+1} - b_k) - (b_k - b_{k-1}) = (a_1^2 + \ldots + a_{k+1}^2) - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) = a_{k+1}^2.$$

Увеличив все индексы на 1 и проведя аналогичные рассуждения, получаем, что на 3 делится и разность

$$(b_{k+2} - b_{k+1}) - (b_{k+1} - b_k) = a_{k+2}^2.$$

Значит, на три делятся числа a_{k+1} и a_{k+2}. Рассмотрим числа $a_{k+1} + 1$ и $a_{k+1} + 2$, каждое из них не меньше 4. Кроме того, хотя бы одно из них чётное, вследствие чего оно составное и $a_{k+2} - a_{k+1} \leqslant 2$. Но тогда числа a_{k+1} и a_{k+2} не могут одновременно делиться на 3 – противоречие. Значит в последовательности (b_i) нет 4 подряд идущих элементов, кратных трём.

Приведём пример трёх подряд идущих элементов последовательности, каждый из которых делится на 3:

$$\begin{aligned} b_4 &= 4a_1^2 + 3a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 = 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 + 9^2 \equiv \\ &\equiv 4 + 0 + 2 + 0 \equiv 0 \pmod 3; \\ b_5 &= 5a_1^2 + 4a_2^2 + 3a_3^2 + 2a_4^2 + a_5^2 = 5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 9^2 + 10^2 \equiv \\ &\equiv 5 + 0 + 0 + 0 + 1 \equiv 0 \pmod 3; \\ b_6 &= 6a_1^2 + 5a_2^2 + 4a_3^2 + 3a_4^2 + 2a_5^2 + a_6^2 = \\ &= 6 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 9^2 + 2 \cdot 10^2 + 12^2 \equiv \\ &\equiv 0 + 0 + 4 + 0 + 2 + 0 \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

Сканировано с CamScanner

9.4. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 3$, для которых существует множество S, состоящее из рациональных чисел, такое, что одновременно выполнены следующие два условия:

1) любое рациональное число представимо в виде суммы не более чем n элементов множества S;

2) существует рациональное число, не представимое в виде суммы не более чем $n-1$ элемента множества S.

(При составлении суммы элементы множества S могут повторяться.)

Ответ: Все натуральные числа $n \geqslant 3$.

Первое решение. Пусть $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ – дробная часть числа x.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant \{x\} < \frac{1}{n}\}$, покажем, что оно удовлетворяет условия задачи.

Действительно, с одной стороны, любое рациональное число r представимо в виде суммы

$$r = \left(\lfloor r \rfloor + \frac{\{r\}}{n}\right) + \frac{\{r\}}{n} + \ldots + \frac{\{r\}}{n},$$

состоящей из n слагаемых, каждое из которых принадлежат множеству S, так как его дробная часть равна $\frac{\{r\}}{n} < \frac{1}{n}$.

С другой стороны, число $1-n^{-1}$ не представимо в виде суммы не более чем $n-1$ элемента множества S. Если предположить противное:

$$1 - n^{-1} = r_1 + r_2 + \ldots + r_k,$$

где все $r_i \in S$, $i = \overline{1,k}$, и $k < n$, то

$$1 - n^{-1} = \{r_1 + r_2 + \ldots + r_k\} \leqslant \{r_1\} + \ldots + \{r_k\} < \frac{k}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} = 1 - n^{-1}.$$

Второе решение. Зафиксируем произвольное простое число $p > n^2$ и разделим p на n с остатком: $p = un + v$, где $1 < v < n \leqslant u$. Тогда неполное частное от деления p на u равно n.

Каждое рациональное число $q \neq 0$ запишем в виде $p^{k_q} \cdot \frac{m_q}{n_q}$, где m_q – целое, а n_q – натуральное чи́сла, причём числа m_q и n_q взаимно просты с p и между собой. Поскольку m_q и n_q взаимно просты с p, существует единственное число $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, для которого

$$m_q \equiv n_q r \pmod{p}.$$

Сканировано с CamScanner

Такое число r будем называть *p-весом* числа q.

В качестве множества S рассмотрим все числа, $p-$веса которых принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots, u\}$.

Покажем, что p-вес суммы $a + b$ не превосходит суммы p-весов чисел a и b, причём равенство достигается, если и только если показатели k_a и k_b одинаковы. Не теряя общности, пусть $k_a \geqslant k_b$, тогда

$$a + b = p^{k_a} \cdot \frac{m_a}{n_a} + p^{k_b} \cdot \frac{m_b}{n_b} = p^{k_b} \cdot \left(\frac{m_a}{n_a} \cdot p^{k_a - k_b} + \frac{m_b}{n_b}\right) =$$
$$= p^{k_b} \cdot \left(\frac{m_a n_b p^{k_a - k_b} + m_b n_a}{n_a n_b}\right).$$

Если $k_a > k_b$, то числитель сравним с $m_b n_a$, которое взаимно просто с p. Тогда $p-$вес $a + b$ равен $p-$весу числа $\frac{m_b n_a}{n_a n_b} = \frac{m_b}{n_b}$, то есть $p-$весу числа b. Если $k_a = k_b$, то числитель равен $m_a n_b + m_b n_a$ и для r_a, r_b таких, что

$$m_a \equiv n_a r_a \pmod p; \qquad m_b \equiv n_b r_b \pmod p)$$

выполняется сравнение

$$m_a n_b + m_b n_a \equiv n_a r_a n_b + n_b r_b n_a = n_a n_b (r_a + r_b) \pmod p,$$

То есть сумме $p-$весов a и b, возможно, уменьшенной на p.

Из приведённых рассуждений следует, что, чтобы получить число с весом $p - 1$ в виде суммы элементов S, потребуется хотя бы $n + 1$ таких чисел. Покажем, что в виде суммы $n+1$ элементов S любое рациональное число $q = p^{k_q} \cdot \frac{m_q}{n_q}$ представимо. Заметим, что для r такого, что $m_q \equiv$ $\equiv n_q r \pmod p$, верно неравенство $r \leqslant p - 1 = un + v - 1$. Любое такое r представимо в виде суммы $n + 1$ чисел, не превосходящих u. Возьмём в качестве n элементов S некоторые n из этих чисел, делённые на n_q и умноженные на p^{k_q}. Тогда, поскольку все показатели равны последнее число, которое дополняет сумму n элементов S до q будет иметь такой же $p-$вес, как и неиспользованное число из представления r. Таким образом, мы получили пример для числа $n + 1$.

Сканировано с CamScanner

10.1. Гардероб в кинотеатре работает с перерывами в течении дня. Общее время работы гардероба в день – 8 часов. График работы гардероба позволяет показать в период с девяти утра до девяти вечера любой фильм, продолжительностью не более 12 часов, так, что гардероб будет открыт в течение часа до и после сеанса (фильмы показываются без антракта).

Найдите наименьшее возможное количество перерывов в работе гардероба в течение дня.

Ответ: 2.

Решение. Если бы гардероб работал без перерыва, то наибольшая продолжительность фильма, который мог бы быть показан в кинотеатре, равна $8-2=6$ часов.

Предположим, что гардероб работает ровно с одним перерывом. Через $[a,b]$ и $[c,d]$, где $0 \leqslant a \leqslant b < c \leqslant d \leqslant 24$, обозначим периоды работы гардероба. Согласно условию задачи $b-a+d-c=8$. Если $b-a<1$, то любой фильм обязан начинаться и заканчиваться в промежутке $[c,d]$, чего не может быть. Поэтому $b-a \geqslant 1$. Аналогично, $d-c \geqslant 1$. Без нарушения общности будем считать, что $d-c \geqslant b-a$. Тогда $d-c \in [4,7]$. Если фильм продолжительностью T может быть показан в кинотеатре согласно условию задачи, то $T \in [0, d-c-2] \cup [c-b, d-a-2]$, а значит,

$$12 \leqslant d-c-2+(d-a-2)-(c-b) = 2(d-c)+(b-a)-4 =$$
$$= 8-4+(d-c) \leqslant 4+7 = 11 < 12.$$

Непосредственная проверка показывает, что график работы гардероба с двумя перерывами: 8:00 – 9:00, 11:00 – 12:00, 16:00 – 22:00, удовлетворяет условию задачи.

Сканировано с CamScanner

10.2. Пусть n – натуральное число, а $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $\ldots$, $P(n) = n$.

Докажите, что число $P(0)$ делится на $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) - x$. Так как $Q(1) = Q(2) = \ldots = Q(n) = 0$, то, из теоремы Безу следует, что

$$Q(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n)R(x),$$

где $R(x)$ – многочлен с рациональными коэффициентами. Более того, поскольку при нахождении частного $R(x)$ каждый раз происходило деление на линейный двучлен со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты многочлена $R(x)$ целые.

Следовательно, число

$$P(0) = Q(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \ldots \cdot (-n) \cdot R(0)$$

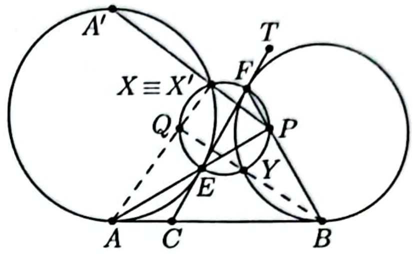
делится на $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Сканировано с CamScanner

10.3. Даны два смежных угла ACT и TCB. В первый из них вписана окружность α, а во второй – β, причём α касается AB и CT в точках A и E, а β касается AB и CT в точках B и $F \neq E$ соответственно. Прямые AE и BF пересекаются в точке P. Описанная окружность ω треугольника PEF повторно пересекает α и β в точках X и Y соответственно.

Докажите, что прямые AX и BY пересекаются на ω.

Решение. Пусть точки Q и A' диаметрально противоположны точкам P и A на окружностях ω и α соответственно. Тогда $\angle A'EP = \angle QEP$ как опирающиеся на диаметры, поэтому точки A', Q и E лежат на одной прямой, перпендикулярной AP. В равнобедренных треугольниках ACE и BCF находим:



$$\angle AEC + \angle CFB = \frac{180^\circ - \angle ACE}{2} + \frac{180^\circ - \angle FCB}{2} = 90^\circ.$$

Поэтому, $\angle EPF = 180^\circ - (\angle AEC + \angle CFB) = 90^\circ$. Следовательно, EF – диаметр окружности ω, вследствие чего, четырёхугольник $QEPF$ является прямоугольником. Значит, верны равенства

$$\angle QPE = \angle FEP = \angle AEC = \angle CAE,$$

из которых вытекает, что $PQ \parallel AC$ и, следовательно, $PQ \perp AA'$.

Так как $A'Q \perp AP$ и $PQ \perp AA'$, то точка Q является точкой пересечения высот треугольника $AA'P$. Обозначим через X' основание высоты AX' этого треугольника. Поскольку $\angle AX'A' = \angle QX'P = 90^\circ$, точка X' лежит на окружностях α и ω с диаметрами AA' и PQ. Значит, точка X' совпадает с точкой X, т.е. прямая AX проходит через точку, лежащую на ω диаметрально противоположно точке P. Аналогично показывается, что через эту точку проходит и прямая BY.

Сканировано с CamScanner

10.4. Можно ли в каждую целочисленную точку (x, y) координатной плоскости вписать по натуральному числу $a_{x,y}$ так, чтобы для любых целых чисел i и j выполнялось равенство

$$a_{i,j} = \text{НОД}(a_{i-1,j}, a_{i+1,j}) + \text{НОД}(a_{i,j-1}, a_{i,j+1})?$$

Ответ: Да, можно.

Решение. В точки, координаты которых представимы в виде $(3k, 3\ell)$ для некоторых целых k и ℓ, впишем число 6. В точки, координаты которых представимы в виде $(3k \pm 1, 3\ell \pm 1)$ или $(3k \pm 1, 3\ell \mp 1)$ для некоторых целых k и ℓ, впишем число 2. Оставшиеся точки образуют пары стоящих рядом. В одну точку из пары впишем число 3, а в другую – число 5 с соблюдением следующего условия: в четырёх точках, соседних с той, в которую вписано 6, вписаны либо четыре числа 3, либо три числа 5 и одно число 3. Тогда равенства из условия выполнятся в силу тождеств:

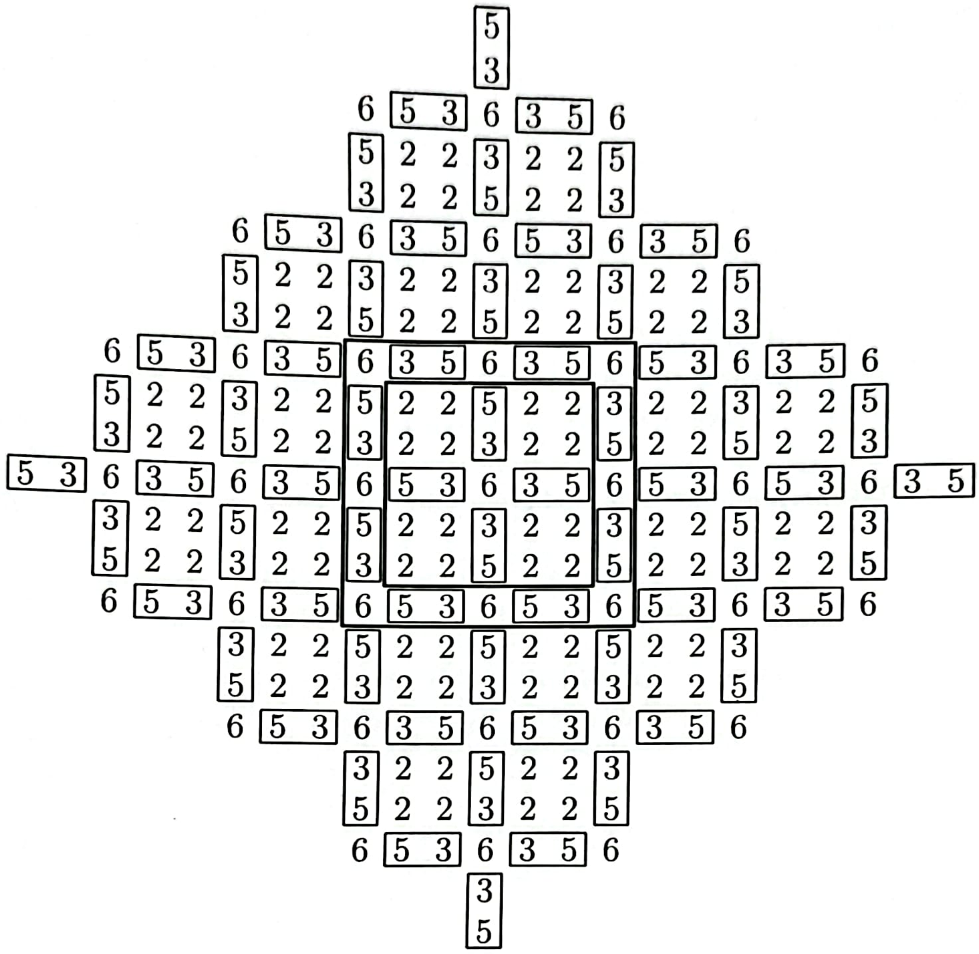
$$2 = \text{НОД}(2, x) + \text{НОД}(2, y) \quad (x, y \in \{3, 5\}),$$

$$3 = \text{НОД}(5, 6) + \text{НОД}(2, 2), \qquad 5 = \text{НОД}(3, 6) + \text{НОД}(2, 2),$$

$$6 = \text{НОД}(3, 3) + \text{НОД}(3, 3), \qquad 6 = \text{НОД}(5, 5) + \text{НОД}(5, 3).$$

Покажем, что возможно выбрать расположение для 3 и 5 так, чтобы условие выполнялось. В точки, которые находятся на расстоянии 1 от точек с координатами $(3k, 3\ell)$ для некоторых целых k и ℓ таких, что $k + \ell \vdots 3$, впишем число 3, а на расстоянии 2 – число 5. Рядом с точками, координаты которых имеют вид $(0, \pm 3 \cdot (3k - 1)), (\pm 3 \cdot (3k - 1), 0)$ (в них вписано число 6), в соседнюю по направлению к $(0, 0)$ точку впишем число 3, а в точку на расстоянии 2 в направлении начала координат – число 5. Среди точек, в которые вписано число 6, нерассмотренными остались точки, координаты которых имеют вид $(3k, 3\ell)$, где $k + \ell$ не делится на 3 и не может одновременно одно из чисел быть равно 0, а второе – давать остаток 2 при делении на 3.

Сканировано с CamScanner



Такие точки можно разбить на циклы, в которых соседние точки находятся на расстоянии 3. Теперь для каждой из этих точек в соседнюю по стороне точку в направлении обхода цикла впишем число 3, а в соседнюю в противоположную обходу сторону – число 5. Таким образом, рядом с точками координаты которых имеют вид $(3k, 3\ell)$ для k и ℓ, сумма которых делится на 3, вписаны четыре числа 3, а для k и ℓ, сумма которых не делится на 3, три числа 5 и одно число 3.

Сканировано с CamScanner

11.1. По кругу записаны числа $1, 2, \ldots, 2025$ в порядке возрастания. Для каждых трёх подряд записанных чисел i, j, k построили многочлен $(x-i)(x-j)(x-k)$. Пусть $s(x)$ – сумма всех таких 2025 многочленов.

Докажите, что у многочлена $s(x)$ есть целый корень.

Решение. Если i, j, k – подряд записанные по кругу числа, то числа $2026-k$, $2026-j$, $2026-i$ также записаны подряд. Поставим каждому многочлену $p(x)=(x-i)(x-j)(x-k)$ в соответствие многочлен $q(x)=(x-2026+k)(x-2026+j)(x-2026+i)$. При этом соответствии все построенные многочлены разобьются на пары, за исключением многочлена $(x-1012)(x-1013)(x-1014)$, который соответствует сам себе.

Заметим, что каждая пара $\{p(x), q(x)\}$ удовлетворяет равенству

$$p(1013)+q(1013)=(1013-i)(1013-j)(1013-k)+$$
$$+(-1013+k)(-1013+j)(-1013+i)=0,$$

а многочлен $(x-1012)(x-1013)(x-1014)$ имеет корень 1013. Следовательно, многочлен $s(x)$ имеет целый корень 1013.

Сканировано с CamScanner

11.2. На доске $2n \times 2n$ стоит красная фишка. За один ход фишка либо передвигается ходом шахматного коня и не изменяет свой цвет, либо передвигается ходом шахматного слона и изменяет свой цвет с красного на синий или с синего на красный. Через некоторое время оказалось, что фишка побывала на всех клетках доски ровно дважды.

Докажите, что число клеток, на каждой из которых фишка побывала и синей, и красной, чётное.

Решение. Пусть каждый ход совершается мгновенно, а также между любыми двумя соседними ходами есть перерыв в 1 секунду. Назовём *позицией* момент времени длиной в 1 секунду, когда фишка стоит на определённой клетке и имеет определенный цвет.

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке в красный и синий так, чтобы изначально фишка была на красной клетке. Позицию назовём *хорошей*, если в ней фишка стоит на клетке того же цвета, что и она сама. Иначе, назовём позицию *плохой*. Несложно заметить, что после каждого хода хорошая позиция становится плохой, и наоборот. Всего в задаче мы рассматриваем $2 \cdot (2n)^2 = 8n^2$ позиций. Из них хороших ровно половина, т. е. $4n^2$, причём фишка побывала на синих клетках ровно столько же, сколько и на красных, – $4n^2$.

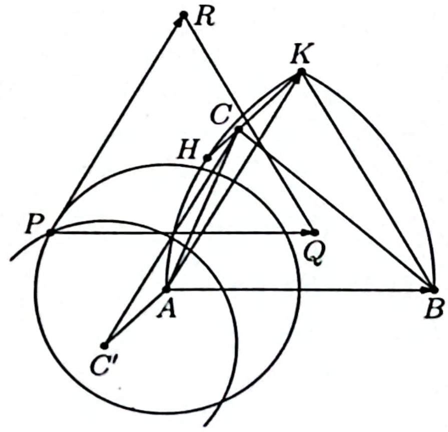
Пусть на синих клетках s хороших позиций. Тогда, на красных клетках $4n^2 - s$ хороших позиций, а значит, s плохих позиций. Поэтому суммарно фишка была синей на $s + s = 2s$ позициях, то есть всего фишка была синей чётное число позиций. Но тогда, раз клетки, в которых фишка дважды была синей, не меняют чётность числа синих позиций, то клеток, где фишка побывала и синей, и красной, чётное число.

Сканировано с CamScanner

11.3. Дан произвольный треугольник ABC. При помощи циркуля и линейки постройте три попарно касающиеся окружности ω_A, ω_B и ω_C равного радиуса так, чтобы точка A лежала на ω_A, точка B – на ω_B, а точка C – на ω_C.

Решение.

Не теряя общности, пусть AB – наибольшая сторона треугольника. Назовём α, β и γ окружности с центрами в точках A, B и C соответственно и радиусами $r = \dfrac{AB}{2}$. Пусть K – вершина равностороннего треугольника ABK, расположенная в той же полуплоскости относительно AB, что и C. Назовём Φ фигуру, ограниченную дугой BK окружности с центром A и радиусом AB, дугой AK окружности с центром B и радиусом BA и стороной AB. Из того, что AB – наибольшая сторона, следует, что C лежит в Φ. Пусть C' – такая точка, что $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CC'}$, а γ' – окружность с центром C' и радиусом r.



Докажем, что окружности α и γ' пересекаются. Так как радиусы каждой из окружностей равны $\frac{AB}{2}$, а расстояние между центрами равно AC', то это равносильно неравенству $AC' < \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB$.

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AC'},$$

поэтому нам будет достаточно доказать, что $KC < AB$. Продлим KC до пересечения с границей Φ в точке H. Если H лежит на дуге KB, то в силу того, что угол KHB тупой, $KC \leqslant KH < KB = AB$. Аналогично можем сказать и для другой дуги. Если H лежит на AB, то $KH < KB$ или $KH < KA$.

Пусть P – точка пересечения окружностей α и γ' (любая, если их несколько). Тогда точка Q, получаемая из P параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$, лежит на окружности β (т.к. β получается из α параллельным переносом на $\overrightarrow{AB}$), а точка R, получаемая из P параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{C'C}$, лежит на γ (т.к. γ получается из γ' параллельным переносом на $\overrightarrow{C'C}$). Тогда окружности ω_A, ω_B, ω_C с центрами P, Q, R соотвественно и радиусом r будут удовлетворять условию.

Сканировано с CamScanner

Таким образом можно предъявить построение:

1. Построим окружности α, β и γ.
2. Построим параллелограмм $KAC'C$.
3. Построим окружность γ' и отметим точку P.
4. Построим точки Q и R.
5. Построим окружности ω_A, ω_B, ω_C.

Сканировано с CamScanner

11.4. Дано конечное множество простых чисел S, не содержащее 3. Докажите, что существует натуральное число M, обладающее следующим свойством: для любого числа p из множества S в десятичной записи числа M можно переставить цифры так, чтобы полученное число делилось на p, но не делилось ни на какое другое число из множества S. (Десятичная запись натурального числа не должна начинаться с нуля.)

Решение. Без нарушения общности будем считать, что множество S содержит числа 2, 5 и 7 (если это не так, то добавим эти числа в множество S). Через N обозначим произведение всех элементов множества S, за исключением чисел 2 и 5. Рассмотрим число

$$M = 10^{N\varphi(N)} + 10^{(N-1)\varphi(N)} + \ldots + 10^{\varphi(N)} + 521,$$

где $\varphi(n)$ – функция Эйлера, и докажем, что оно удовлетворяет условию задачи. Так как $7 \in S$, то $\varphi(N) \geqslant \varphi(7) = 6$, а значит, в десятичной записи числа M есть $N-1$ единица, слева от каждой из которых стоит 0. По теореме Эйлера $10^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$. Так как $10^{i\varphi(N)+1} \equiv 10 \pmod{N}$, то, после перестановки в десятичной записи числа M местами произвольных $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ единиц со стоящими непосредственно перед ними нулями, остаток числа M при деления на N изменится на $9k$ (строго говоря, произойдёт сложение с $9k$ по модулю N). Так как НОД$(N, 9) = 1$, то переставляя нули и единицы, можно получить из M число, дающее любой наперёд заданный остаток при делении на N. Следовательно, для каждого числа $p \in S \backslash \{2, 5\}$ в десятичной записи числа M можно переставить цифры так, чтобы полученное число давало остаток p при делении на N – такое число будет делиться на p и не будет делиться ни на какое другое простое число из множества S. Наконец, если $p = 2$ или 5, то, переставив на последнее место в десятичной записи числа M цифру 2 или 5 соответственно и, возможно, поменяв местами несколько единиц со стоящими перед ними нулями, можно получить число, которые делится на p, но не делится на другие элементы множества S (например, получить 1 по модулю N).

Сканировано с CamScanner