

8.5. Десять мартышек разделили между собой 60 бананов. Каждая мартышка получила хотя бы один банан, при этом любые две мартышки получили различное целое число бананов.

Докажите, что любые шесть мартышек могут распределить все свои бананы между другими так, что у каждой мартышки из четырёх оставшихся в итоге окажется равное число бананов.

Решение. Для того, чтобы любые шесть мартышек могли распределить все свои бананы между четырьмя другими так, как это требуется в условии задачи, необходимо и достаточно, чтобы у каждой мартышки первоначально было не более $60/4 = 15$ бананов.

Предположим, что у некоторой мартышки было не менее 16 бананов. У девяти оставшихся мартышек вместе хотя бы $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ бананов, а значит, всего у мартышек не менее $16 + 45 = 61$ бананов, что противоречит условию задачи.

8.6. Клетчатый квадрат 8×8 разбили на прямоугольники, состоящие из двух клеток. Два прямоугольника разбиения назовём *соседними*, если они граничат между собой по отрезку длины 1 или 2. В каждый прямоугольник записали количество соседних с ним прямоугольников.

Найдите наибольшее возможное значение суммы всех записанных чисел.

Ответ: 158.

Решение. Количество пар соседних по стороне клеток в квадрате 8×8 равно $8 \cdot 7 \cdot 2 = 112$. Так как квадрат разбит на $64 : 2 = 32$ прямоугольника, то ровно в $112 - 32 = 80$ парах клетки принадлежат разным прямоугольникам. Для любых двух соседних прямоугольников найдётся хотя бы одна пара соседних по стороне клеток таких, что прямоугольники содержат по одной клетке из этой пары.

Докажем, что хотя бы два прямоугольника разбиения имеют общий отрезок длины 2. Действительно, предположим противное и начнём рассматривать, как расположены прямоугольники: сначала не ограничивая общности выберем, как накрыта левая верхняя угловая клетка квадрата, а потом будем каждый раз рассматривать, как может быть накрыта клетка, соседняя с левой верхней клеткой последнего нарисованного прямоугольника. После того, как будет однозначно определено расположение 13 прямоугольников, получим противоречие в правом нижнем углу квадрата (построение схематически изображено на рис. 1).

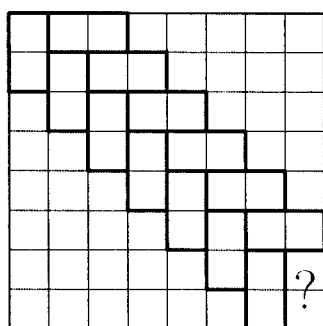


Рис. 1

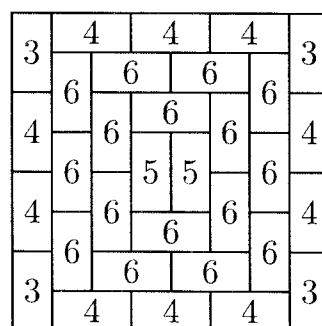


Рис. 2

Следовательно, количество пар соседних прямоугольников разбиения не больше $80 - 1 = 79$, а значит, сумма всех выписанных чисел не больше $2 \cdot 79 = 158$. Пример, изображённый на рисунке 2, показывает, что рассматриваемая сумма действительно может быть равна 158.

8.7. Ян и Кирилл играют в игру. Сначала Кирилл называет четыре числа $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, а затем Ян называет три попарно различных ненулевых числа a_1, a_2 и a_3 . Для каждого i от 1 до 3 они находят квадратный трёхчлен $f_i(x)$, который имеет корни x_i и x_{i+1} и старший коэффициент a_i , и строят на координатной плоскости графики полученных трёх многочленов. Ян выигрывает, если в каждой паре $(f_1(x), f_2(x))$ и $(f_2(x), f_3(x))$ их графики пересекаются ровно в одной точке, а если в какой-то паре графики не пересекаются или имеют больше одной общей точки, то выигрывает Кирилл.

Определите, какой из игроков может гарантировать себе победу независимо от действий соперника.

Ответ: Кирилл.

Решение. Нетрудно видеть, что

$$f_i(x) = a_i(x - x_i)(x - x_{i+1}) = a_ix^2 - a_i(x_i + x_{i+1})x + a_ix_ix_{i+1}.$$

Чтобы найти точки пересечения графиков функций $f_i(x)$ и $f_{i+1}(x)$, запишем уравнение $f_{i+1}(x) - f_i(x) = 0$:

$$(a_{i+1} - a_i)x^2 - (a_{i+1}(x_{i+1} + x_{i+2}) - a_i(x_i + x_{i+1}))x + a_{i+1}x_{i+1}x_{i+2} - a_ix_ix_{i+1} = 0.$$

Предположим, что Ян выиграл, тогда единственным корнем этого уравнения является x_{i+1} . Из теоремы Виета получаем равенство

$$(a_{i+1} - a_i)x_{i+1}^2 = a_{i+1}x_{i+1}x_{i+2} - a_ix_ix_{i+1},$$

из которого находим значение коэффициента

Откуда можно получить:

$$a_{i+1} = a_i \cdot \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

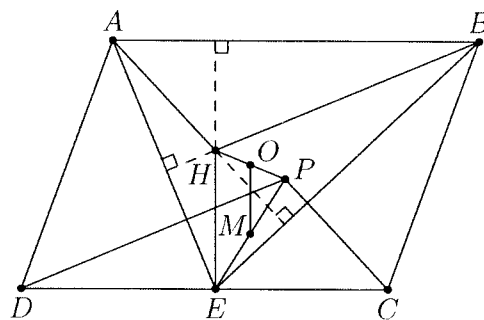
Пусть Кирилл назовёт числа $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ и $x_4 = 5$, тогда $a_2 = -\frac{1}{2} \cdot a_1$, а $a_3 = -2 \cdot a_2$, откуда $a_1 = a_3$. Однако, это противоречит тому, что Ян должен был называть попарно различные числа.

8.8. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ выбрана произвольная точка E . Перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую BE , пересекает перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AE , в точке P . Точка M – середина отрезка PE .

Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую CD , проходит через центр параллелограмма $ABCD$.

Решение. Через O обозначим центр параллелограмма $ABCD$. Пусть H – точка, симметричная P относительно точки O .

Поскольку точка O является серединой отрезков AC и PH , четырёхугольник $APCH$ является параллелограммом, и значит $AH \parallel PC$. Однако так как $PC \perp BE$, имеем $AH \perp BE$, поэтому точка H лежит на высоте треугольника ABE , проведённой из точки A .



Аналогично, поскольку точка O является серединой отрезков BD и PH , четырёхугольник $BPDH$ является параллелограммом, и значит $BH \parallel PD$. Однако так как $PD \perp AE$, имеем $BH \perp AE$, поэтому точка H лежит на высоте треугольника ABE , проведённой из точки B .

Таким образом, точка H лежит на двух высотах треугольника ABE , поэтому является точкой пересечения его высот, следовательно $EH \perp AB$. Поскольку отрезок MO является средней линией треугольника HPE , по свойству средней линии имеем $MO \parallel EH$. Значит, прямая MO перпендикулярна стороне AB параллелограмма $ABCD$, поэтому она перпендикулярна и его стороне CD . Следовательно, прямая MO совпадает с перпендикуляром, опущенным из точки M на прямую CD , что и требовалось.

9.5. У Полины и Яна есть n карточек, на первой карточке с одной стороны написано число 1, а с другой стороны — число $n + 1$, на второй карточке с одной стороны написано число 2, а с другой стороны — число $n + 2$ и т. д. Полина разложила карточки в некотором порядке по кругу. Ян хочет перевернуть некоторые из них так, чтобы числа с верхней стороны соседних карточек были не взаимно просты.

Для каждого натурального $n \geq 3$ определите, сможет ли Ян осуществить желаемое независимо от действий Полины.

Ответ: Только для нечётных.

Решение. Покажем, что для любого нечётного n Ян может осуществить желаемое. Для любой карточки на сторонах которой записаны числа k и $n + k$ верно, что $k + (n + k) = n + 2k \equiv n \equiv 1 \pmod{2}$. Так как сумма чисел на сторонах любой карточки является нечётной, то чётность чисел, записанных на разных сторонах карточек, отличается. Таким образом, для победы Яну достаточно повернуть все карточки чётной стороной вверх, ведь все числа будут иметь общий делитель 2.

Теперь покажем, что для любого чётного n Полина может расположить карточки таким образом, чтобы независимо от действий Яна нашлись две соседний карточки со взаимно простыми числами. Действительно, пусть Полина расположит рядом карточки на которых написаны числа $\{1, n+1\}$ и $\{n, 2n\}$. Число 1 взаимно просто с каждым натуральным числом, а число $n + 1$ взаимно просто с числами n и $2n$, так как $\text{НОД}(n + 1, n) = \text{НОД}(1, n) = 1$ и

$$\text{НОД}(n + 1, 2n) = \text{НОД}(n + 1, n - 1) = \text{НОД}(2, n - 1) = 1,$$

Значит, независимо от действий Яна числа на этих карточках будут взаимно просты.

9.6. Числа a, b, c равны длинам сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq \frac{a+b}{2c} + \frac{b+c}{2a} + \frac{c+a}{2b}.$$

Решение. Выберем треугольник ABC таким образом, что числа a, b, c – это длины сторон BC, AC, AB , соответственно, и вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Обозначим $x = BD, y = CE$ и $z = AF$, тогда $a = x + y, b = y + z$ и $c = z + x$ из свойства касательной.

Сделав эту замену в исходном неравенстве, получаем равносильное неравенство

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq \frac{x+2y+z}{z+x} + \frac{x+y+2z}{x+y} + \frac{2x+y+z}{z+y}. \quad (1)$$

Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, верна цепочка неравенств

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y} \right) \geq \frac{x}{\sqrt{yz}} \geq \frac{2x}{y+z}.$$

Сложив три аналогичных неравенства, получим неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{y} + \frac{z}{x} \right) \geq \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}. \quad (2)$$

Аналогично, сложив три неравенства вида

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2,$$

получим неравенство

$$\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} \geq 6. \quad (3)$$

Требуемое неравенство (1) получается как сумма неравенств (2) и (3).

9.7. В треугольнике ABC угол BAC равен 60° . Точка M – середина стороны BC , а точка D – основание высоты, проведённой из вершины A . Точки T и P отмечены так, что треугольник TBC равносторонний, $\angle BPD = \angle DPC = 30^\circ$ и эти точки лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC , а точка A – в другой.

Докажите, что окружности, описанные около треугольников ADP и AMT , касаются друг друга.

Решение. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC , а D – произвольная точка на прямой BC . Прямая OD повторно пересекает окружность, описанную около треугольника BOC в точке E . Тогда прямая AO касается описанной окружности треугольника ADE .

Доказательство леммы. Заметим, что

$$\angle DBO = \angle CBO = \angle OCB = \angle OEB = \angle DEB,$$

следовательно, прямая OB касается описанной окружности треугольника BED . Из теоремы о касательной и секущей $OB^2 = OD \cdot OE$ откуда, учитывая, что $OB = OA$ как радиусы, получаем, что $OA^2 = OD \cdot OE$, что влечёт требуемое касание.

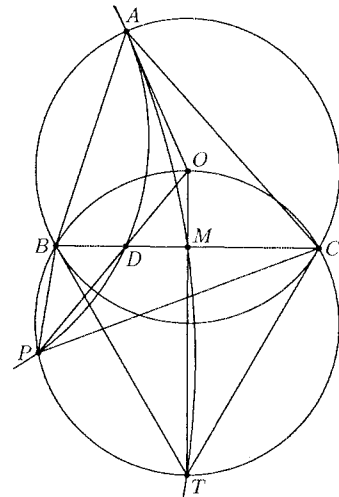
Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC . Заметим, что $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$ и $\angle BPC = \angle BTC = 60^\circ$, откуда точки B, O, C, T, P лежат на одной окружности. Точки O, M, T лежат на одной прямой – серединном перпендикуляре отрезка BC , поэтому из леммы прямая AO касается окружности, описанной около треугольника AMT .

Далее, так как $OB = OC$, то $\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 30^\circ$. Так как точки P, B, O, C лежат на одной окружности, то

$$\angle BPO = \angle BCO = 30^\circ = \angle BPD \quad \text{и} \quad \angle OPC = \angle OBC = 30^\circ = \angle DPC,$$

откуда точка O лежит на прямой PD . Тогда из леммы заключаем, что прямая AO касается окружности, описанной около треугольника ADP .

Таким образом, окружности, описанные около треугольников AMT и ADP , касаются прямой AO , а значит, касаются друг друга.



9.8. В некоторой галактике ровно миллион планет, на каждой из которых есть хотя бы 101 портал. Каждый портал позволяет переместиться между некоторыми двумя планетами, никакие две планеты не соединены несколькими порталами. Известно, что начиная с любой планеты при помощи порталов можно добраться до любой другой; в то время как вернуться на эту же планету, используя по разу менее 6 различных порталов, невозможно.

Докажите, что с любой планеты галактики можно попасть на любую другую не более чем за год, используя не более одного портала в день. (Считайте, что в году 365 дней.)

Решение. Переформулируем задачу на язык теории графов. Рассмотрим граф G , вершинами которого являются миллион планет галактики. Будем соединять две вершины ребром, если между соответствующими планетами есть портал. По условию степень каждой вершины не менее 101. Поскольку начиная с любой планеты при помощи порталов можно добраться до любой другой, то граф G связан. Кроме того, длины всех циклов не меньше 6. Требуется доказать, что расстояние между любыми двумя вершинами не превосходит 365.

Предположим, что это не так. Возьмём две вершины v_0 и v и рассмотрим путь $v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_n = v$ наименьшей длины, соединяющий вершины v_0 и v . Предположим, длина этого пути хотя бы 366, то есть $n \geq 366$.

Пусть A_i – множество всех соседей вершины v_i , отличных от вершин $v_0, v_1, \dots, v_n$. Покажем, что для любых $i > j + 1$ вершины v_i и v_j не смежны. Действительно, если это не так, то в графе существует путь $v_0 v_1 \dots v_j v_i v_{i+1} \dots v_n$, соединяющий вершины v_0 и v_n длины меньше n , что противоречит минимальности выбранного пути. Так как степень всех вершин по условию не меньше 101, то $|A_i| \geq 99$ для всех $i = 0, 1, \dots, n - 1, n$.

Докажем, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ для любых различных $i, j \in S$. Не теряя общности, пусть $i \geq j$. Тогда если $x \in A_i \cap A_j$ и $i - j = 1$, то в графе существует цикл $v_j v_{j+1} x v_j$ длины $4 < 6$, что противоречит условию задачи. Если $i - j = 2$, то в графе существует цикл $v_j v_{j+1} v_{j+2} x v_j$ длины $5 < 6$, что противоречит условию задачи. Если $i - j \geq 3$, то в графе существует путь

$$v_0 v_1 \dots v_j x v_i v_{i+1} \dots v_n,$$

длина которого меньше n , получаем противоречие. Значит $A_i \cap A_j = \emptyset$

для любых различных $i, j \in S$.

Рассмотрим множество $S = \{0, 1, 6, 7, 12, 13, \dots, 360, 361, 366\}$. Для любого $i \in S$ и любой вершины $u \in A_i$ через B_u обозначим множество всех соседей вершины u , отличных от v_i . Докажем, что для любых $i, j \in S$ и любых различных $u \in A_i, w \in A_j$ множества B_u и B_w не пересекаются. Предположим противное. Тогда существует вершина $y \in B_u \cap B_w$. Без потери общности, пусть $i \geq j$. Если $i = j$, то в графе существует цикл $v_i u y w v_i$ длины 4, что меньше 6. Если $i - j = 1$, то в графе существует цикл $v_i u y w v_{i+1} v_i$ длины 5, что меньше 6. Если $i - j \geq 5$, то в графе есть путь, соединяющий вершины v_0 и v_n длины меньше n :

$$v_0 v_1 \dots v_j w y v_i v_{i+1} \dots v_n.$$

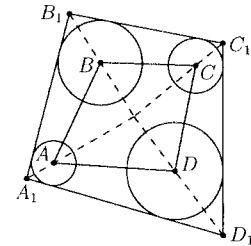
Во всех случаях получаем противоречие. Значит, множества B_u и B_w для $i, j \in S$ и различных $u \in A_i$ и $w \in A_j$ не пересекаются. Также из условия задачи мощность B_u не меньше 100. Следовательно общее количество вершин графа G не менее

$$\sum_{i \in S} \sum_{u \in A_i} |B_u| \geq \sum_{i \in S} \sum_{u \in A_i} 100 \geq \sum_{i \in S} 99 \cdot 100 \geq 124 \cdot 99 \cdot 100 > 1000000.$$

Но из условия задачи вершин в графе ровно 1000000, следовательно, мы получили противоречие.

Значит изначальное предположение неверно, а значит $n \leq 365$, что и требовалось доказать.

10.5. Длины сторон AB , BC , CD , AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны 16, 13, 14, 17 соответственно. Нарисованы окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ с центрами в вершинах A, B, C, D и радиусами 2, 6, 3, 9 соответственно. Общие внешние касательные к окружностям $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1 , как изображено на рисунке справа.



Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. На плоскости нарисованы окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 соответственно. Общая внешняя касательная к окружностям ω_1, ω_2 касается окружности ω_1 в точке P_1 , а окружности ω_2 – в точке P_2 . Тогда $P_1P_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2}$.

Доказательство. Без нарушения общности будем считать, что $R_1 \geq R_2$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины O_2 на прямую O_1P_1 . Так как $\angle O_2HP_1 = \angle HP_1P_2 = \angle P_1P_2O_2 = 90^\circ$, то $\angle P_2O_2H = 90^\circ$, а значит, $HP_1P_2O_2$ – прямоугольник. Следовательно, $P_1P_2 = O_2H$ и $HP_1 = O_2P_2 = R_2$. Согласно теореме Пифагора $O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{O_1O_2^2 - (R_1 - R_2)^2}$. Лемма доказана.

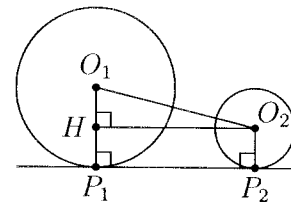


Рис. 1

Вернёмся к решению задачи. Отметим точки касания общих внешних касательных с окружностями (см. рисунок 2). Согласно лемме

$$A_3B_2 = 4\sqrt{15}, \quad B_3C_2 = 4\sqrt{10}, \quad C_3D_2 = 4\sqrt{10}, \quad D_3A_2 = 4\sqrt{15}. \quad (1)$$

Так как прямые A_1A_2 и A_1A_3 – касательные к окружности, проведённые из одной точки, то $A_1A_2 = A_1A_3$ и A_1A – биссектриса угла $A_2A_1A_3$. Аналогично получаем, что $B_1B_2 = B_1B_3$, $C_1C_2 = C_1C_3$, $D_1D_2 = D_1D_3$ и прямые B_1B , C_1C , D_1D – биссектрисы углов $B_2B_1B_3$, $C_2C_1C_3$, $D_2D_1D_3$ соответственно. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ описанный, или, что то-

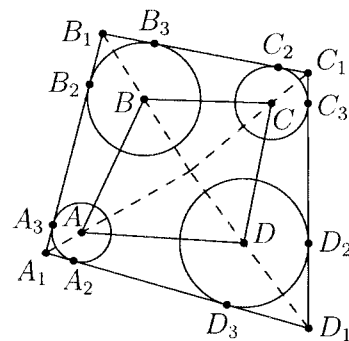


Рис. 2

же самое, что выполнено равенство

$$A_1B_1 + C_1D_1 = B_1C_1 + D_1A_1. \quad (2)$$

Так как $A_1A_2 = A_1A_3$, $B_1B_2 = B_1B_3$, $C_1C_2 = C_1C_3$, $D_1D_2 = D_1D_3$, то равенство (2) равносильно равенству $A_3B_2 + C_3D_2 = B_3C_2 + D_3A_2$, которое следует из равенств (1).

10.6. Для последовательности из нулей и единиц Вася делает ходы следующего вида, пока процесс не закончится:

- Если первая цифра последовательности равна нулю, эта цифра удаляется.
- Если первая цифра – единица и цифр хотя бы две, Вася меняет две первые цифры местами и записывает полученную последовательность справа налево, заменяя единицы нулями, а нули единицами.
- Если последовательность пустая или состоит из одной единицы, процесс заканчивается.

Найдите количество последовательностей длины 2025, начиная с которых Вася получит пустую последовательность.

Ответ: 2025.

Решение. Назовём последовательность из нулей и единиц *редкой*, если после нескольких ходов Вася получит из неё пустую последовательность. Докажем следующую

Лемма. Все редкие последовательности длины n имеют вид

$$111 \dots 111, 011 \dots 111, \dots, 000 \dots 111, 000 \dots 011, 000 \dots 000.$$

Доказательство. Проведём индукцию по n . База при $n = 1, 2, 3$ проверяется вручную. Далее рассмотрим первую цифру последовательности. Если она равна 0, то убрав её, мы можем получить любую последовательность размера на один меньше и спускаемся к предположению индукции. Далее рассмотрим последовательность длины n , первая цифра которой равна 1.

Пусть $D = 1a_1a_2 \dots a_{n-1}$ – начальная последовательность, где n больше 1. Тогда на следующем ходу Вася получит из неё последовательность $\overline{a_{n-1}a_{n-2}} \dots \overline{a_20a_1}$, где $\overline{x}$ означает $1 - x$.

Если $\overline{a_{n-1}} = 0$, то после операции получим последовательность длины на один меньше, в которой предпоследняя цифра равна 0. Но такая последовательность может быть редкой, только если состоит полностью из нулей. Но это означает, что изначальная последовательность D состояла полностью из одних единиц.

Если $\overline{a_{n-1}} = 1$, то после очередного хода Вася получит последовательность

$$D_0 = a_1a_2 \dots a_{n-3}0a_{n-2}.$$

Если $a_1 = 0$, то по предположению индукции вновь получим не редкую последовательность.

Если $a_1 = 1$, то применяя ход, получим последовательность

$$\overline{a_{n-2}1a_{n-3}} \dots \overline{a_2}00.$$

Опять же, если $\overline{a_2} = 0$, получим противоречие с предположением индукции. Иначе, $\overline{a_2} = 1$ и тогда после применения хода, Вася получит

$$11a_2 \dots a_{n-3}00,$$

которая совпадает с уже ранее полученной последовательностью D_0 , ибо $a_2 = 0$ и $a_{n-1} = 1$. Значит, последовательность никогда не уменьшит свою длину и не является редкой. Это завершает доказательство шага. $\square$

Из *Леммы* следует, что количество редких последовательностей длины n равно n . В частности, ответ на задачу – 2025.

10.7. Для каждого натурального числа n выпишем в возрастающем порядке все его натуральные делители: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$.

Найдите все n такие, что $2025 \cdot n = d_{20} \cdot d_{25}$.

Ответ: $3^4 5^4$

Решение. Далее через $\nu_p(x)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в число x , а через $\tau(n)$ количество делителей числа n .

Покажем, что $\nu_3(d_{20}) \geq 4$. Из условия:

$$\nu_3(2025 \cdot n) = \nu_3(d_{20} \cdot d_{25})$$

$$\nu_3(n) + 4 = \nu_3(d_{20}) + \nu_3(d_{25})$$

Так как n делится и на d_{20} , и на d_{25} , то получаем, что $\nu_3(n) \geq \nu_3(d_{20})$ и $\nu_3(n) \geq \nu_3(d_{25})$, откуда

$$\nu_3(n) \geq \nu_3(d_{25}) = \nu_3(n) - \nu_3(d_{20}) + 4 \Rightarrow \nu_3(d_{20}) \geq 4$$

Аналогично образом можно показать, что $\nu_3(d_{25}) \geq 4$, $\nu_5(d_{20}) \geq 2$ и $\nu_5(d_{25}) \geq 2$.

Так как каждый делитель числа d_m одновременно является делителем числа n и не превосходит d_m , то для любого $1 \leq m \leq k$ выполнено неравенство:

$$\tau(d_m) \leq m.$$

Покажем, что числа d_{25} и d_{20} не имеют простых делителей отличных от 3 и 5. Пусть $d_{25} = 3^x 5^y D$, где x, y и D натуральные числа и D не делится ни на 5, ни на 3. Ранее было доказано, что $x = \nu_3(d_{25}) \geq 4$ и $y = \nu_5(d_{25}) \geq 2$. Предположим, что $\tau(D) \geq 2$. Тогда

$$25 \geq \tau(d_{25}) = \tau(3^x 5^y D) = \tau(3^x) \tau(5^y) \tau(D) = (x+1)(y+1) \tau(D) \geq 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$$

Покажем, что n не имеет простых делителей отличных от 3 и 5. Предположим, что это не так и n делится на некоторый простой $p \neq 3, 5$. Тогда $2025n = d_{20}d_{25}$ делится на этот простой делитель p , откуда одно из чисел d_{20} или d_{25} делится на p , что противоречит доказанному ранее.

Пусть $d_{20} = 3^a 5^b$. Тогда $\tau(d_{20}) = (a+1)(b+1) \leq 20$. Нетрудно заметить, что ввиду ограничений $a \geq 4$ и $b \geq 2$ решениями будут являться только пары $(4, 2)$, $(4, 3)$ и $(5, 2)$.

Рассмотрим все возможные случаи:

1. $d_{20} = 2025$, а значит $d_{25} = n$, то есть $\tau(n) = 25$, откуда $n = 3^4 5^4$.
Остаётся удостовериться, что 2025 является двадцатым делителем числа n , это верно, так как

$$1 = d_1 < 3 = d_2 < 5 = d_3 < 9 = d_4 < 15 = d_5 < 25 = d_6$$

откуда

$$\frac{n}{1} = d_{25} > \frac{n}{3} = d_{24} > \frac{n}{5} = d_{23} > \frac{n}{9} = d_{22} > \frac{n}{15} = d_{21} > \frac{n}{25} = d_{20}.$$

2. $d_{20} = 2025 \cdot 3$, откуда $n = 3d_{25}$, с другой стороны $3d_{25} = d_{26}$, откуда получаем $\tau(n) = 26$, что невозможно, так как 26 делиться на 13 и на 2.
3. $d_{20} = 2025 \cdot 5$, откуда $n = 5d_{25}$. Заметим, что $3d_{25} \nmid n$, тогда $n = 5d_{25} = d_{26}$, откуда получаем $\tau(n) = 26$, что уже было разобрано в предыдущем случае.

10.8. Дано множество S , состоящее из $n \geq 3$ натуральных чисел. Известно, что, если для некоторых (необязательно различных) чисел a, b, c, d из S выполняется равенство $a - b = 2(c - d)$, то $a = b$ и $c = d$. Обозначим, через M наибольший элемент множества S .

а) Докажите, что $M > \frac{n^2}{3}$.

б) Для $n = 1024$ найдите наименьшее возможное значение числа M .

Решение. а) Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — все числа на доске. Рассмотрим множество $T = \{a_i + 2a_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Если для каких различных пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) выполнено равенство $a_{i_1} + 2a_{j_1} = a_{i_2} + 2a_{j_2}$, то тогда $a_{i_1} - a_{i_2} = 2(a_{j_1} - a_{j_2})$, откуда по условию $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$. Но это противоречит тому, что пары (i_1, j_1) и (i_2, j_2) выбраны различными. Таким образом получаем, что множество T содержит ровно $n \cdot n = n^2$ элементов. Так как все элементы множества являются различными натуральными числами, то самый большой и самый маленький элементы множества T отличаются хотя бы на $|T| - 1$. Следовательно, $3a_n \geq 3a_1 + |T| - 1 \geq 3 + n^2 - 1 = n^2 + 2$, откуда получаем, что $a_n \geq \frac{n^2+2}{3} > \frac{n^2}{3}$.

б) Ответ: $\frac{1024^2+2}{3}$

Как было показано в предыдущем пункте самое большое число на доске не меньше, чем $\frac{n^2+2}{3}$. Покажем, что если n является степенью двойки, то данная оценка достижима.

Построим последовательность (d_i) следующим образом. Возьмём $d_1 = 1$. Далее пусть у нас уже заданы члены последовательности $d_1, \dots, d_{2^i-1}$. Тогда положим $d_{2^i} = 2(d_1 + \dots + d_{2^i-1}) + 1$ и $d_{2^i+j} = d_j$ для любого j , такого что $1 \leq j \leq 2^i - 1$.

Положим $n = 2^k$. Пусть на доске записаны числа $1, 1 + d_1, \dots, 1 + d_1 + \dots + d_{n-1}$. Докажем по индукции, что они не противоречат условию задачи. База $k = 1$ очевидна. Предположим, что наше утверждение верно для некоторого $k = m$. Покажем, что тогда она верна и для $k = m + 1$. Предположим, что это не так. Тогда существуют l_1, r_1, l_2, r_2 такие что $1 \leq l_1 \leq r_1 \leq n - 1$, $1 \leq l_2 \leq r_2 \leq n - 1$ и $d_{l_1} + \dots + d_{r_1} = 2(d_{l_2} + \dots + d_{r_2})$.

Отрезок $[l_2, r_2]$ не содержит число 2^m , так как иначе

$$2(d_{l_2} + \dots + d_{r_2}) \geq 2d_{2^m} = d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + 1 > d_{l_1} + \dots + d_{r_1}$$

Так как $d_{2^m+j} = d_j$ то можно считать, что $1 \leq l_2 \leq r_2 \leq 2^m - 1$. С другой стороны отрезок $[l_1, r_1]$ так же не содержит число 2^m , так как

иначе

$$d_{l_1} + \dots + d_{r_1} \geq d_{2^m} = 2(d_1 + \dots + d_{2^m-1}) + 1 > 2(d_{l_2} + \dots + d_{r_2})$$

Таким образом можно считать, что $1 \leq l_1 \leq r_1 \leq 2^m - 1$. Но по предположению индукции числа $1, 1 + d_1, \dots, 1 + d_1 + \dots + d_{2^m-1}$ удовлетворяют условию, то есть не существует l_1, r_1, l_2, r_2 таких что $1 \leq l_1 \leq r_1 \leq 2^m - 1$, $1 \leq l_2 \leq r_2 \leq 2^m - 1$ и $d_{l_1} + \dots + d_{r_1} = 2(d_{l_2} + \dots + d_{r_2})$.

Вычислим значение самого большого числа на доске. Обозначим $S_k = d_1 + \dots + d_{2^k-1}$. Тогда $S_1 = d_1 = 1$ и

$$S_{k+1} = (d_1 + \dots + d_{2^k-1}) + d_{2^k} + (d_{2^k+1} + \dots + d_{2^{k+1}-1}) = 4S_k + 1$$

Откуда по индукции находим, что $S_k = \frac{2^{2k}-1}{3}$. Таким образом значение самого большого числа на доске равно $S_k + 1 = \frac{2^{2k}+2}{3} = \frac{n^2+2}{3}$. Подставляя $n = 1024$ получаем ответ.

11.5. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что оба числа $n^3 - n$ и $(n + 1)^3 - (n + 1)$ делятся на 2025.

Ответ: 324.

Решение. Найдём наибольший общий делитель данных чисел.

$$\text{НОД}(n^3 - n, (n + 1)^3 - (n + 1)) = n(n + 1)\text{НОД}(n - 1, n + 2) : 2025$$

Известно, что $\text{НОД}(n - 1, n + 2) = \text{НОД}(n - 1, 3) \in \{1, 3\}$. Если он равен 3, то $n - 1$ делится на 3 и $n(n + 1)$ не делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из чисел $n - 2, n + 1$ не делится на 9. Следовательно хотя бы одно из чисел $(n - 1)n(n + 1), n(n + 1)(n + 2)$ не делится на 2025. Получаем, что $\text{НОД}(n - 1, n + 2) = 1$.

Тогда $n(n + 1)$ должно быть кратно $2025 = 81 \cdot 25$. Поскольку n и $n + 1$ взаимно просты, ровно одно из них делится на 81 и ровно одно из них делится на 25.

Если одно из чисел $n, n + 1$ делится и на 81, и на 25, то оно не меньше 2025 и $n \geq 2024$.

Пусть n кратно 81, а $n + 1$ кратно 25. Перебрав первые 4 значения n , убеждаемся, что наименьшее подходящее n равно 324.

Пусть n кратно 25, а $n + 1$ кратно 81. Тогда n представимо в виде $n = 25k$. Чтобы $n + 1$ делилось на 27 нужно, чтобы $25k + 1 : 27$. Тогда $13 \cdot (25k + 1) = 325k + 13 = k - 14 + (12 + 1) \cdot 27 : 27$, что выполняется только при $k \equiv 13 \pmod{27}$. Тогда $n \geq 13 \cdot 25 = 325 > 324$.

11.6. Точка H – основание высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC . На прямых AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что описанные окружности треугольников BXH и CYH касаются друг друга, обозначим эти окружности через ω_B и ω_C соответственно. Касательные к окружностям ω_B и ω_C , проходящие через точки X и Y соответственно, пересекаются в точке Z .

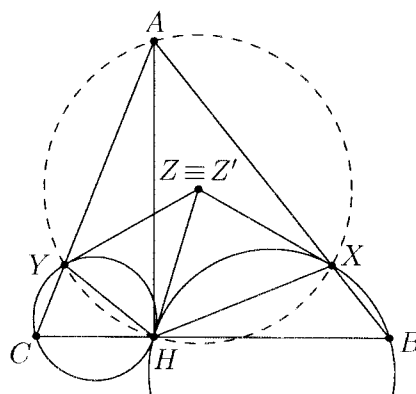
Докажите, что точка Z равноудалена от точек A и H .

Решение. Для начала докажем, что четырёхугольник $XA YH$ вписан. Поскольку окружности ω_B и ω_C касаются, они имеют общую касательную в точке H . Тогда справедливо равенство $\angle YHX = \angle C + \angle B$ и $\angle YHX + \angle A = 180^\circ$, а следовательно четырёхугольник $XA YH$ вписан.

Пусть Z' – центр описанной окружности четырёхугольника $HA YX$. Тогда $\angle YZ'H = 2\angle YAH = 180^\circ - 2\angle C$. При этом $Z'Y = Z'H$, а значит $\angle Z'YH = \angle Z'HY = \angle C$, а следовательно $Z'Y$ и $Z'H$ – касательные к ω_C .

Аналогично $\angle XZ'H = 2\angle XAH = 180^\circ - 2\angle B$ и $Z'X = Z'H$, а значит $\angle Z'XH = \angle Z'HX = \angle B$, следовательно $Z'X$ и $Z'H$ – касательные к ω_B .

Значит точка Z' совпадает с Z , а так как Z' – центр окружности, описанной около четырёхугольника $XA YH$, то $AZ = HZ$, что и требовалось доказать.



11.7. Положительные вещественные числа $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ с суммой s таковы, что уравнение $nx^2 - sx + 1 = 0$ имеет положительный корень a_{n+1} , меньший a_n .

Докажите, что найдётся натуральное число r , не превосходящее n , для которого выполнено неравенство $a_r a_{r+1} \geq \frac{1}{r}$.

Решение. Так как a_{n+1} – решение уравнения $nx^2 - sx + 1 = 0$, то верно равенство $sa_{n+1} - na_{n+1}^2 = 1$. Подставим в это равенство вместо s сумму $a_1 + \dots + a_n$ и разделим обе части на положительное число a_{n+1} , получим равенство

$$\frac{1}{a_{n+1}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1}. \quad (1)$$

Преобразуем правую часть полученного равенства в виде

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1} &= n(a_n - a_{n+1}) + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + \\ &+ \dots + (a_1 - a_2) = \sum_{i=1}^n i(a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^n ia_i a_{i+1} \left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что для всех натуральных индексов $i \leq n$ верно неравенство $a_i a_{i+1} < \frac{1}{i}$. Тогда из равенств 1 и 2 будет следовать, что

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \sum_{i=1}^n ia_i a_{i+1} \left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) < \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}.$$

Полученное противоречие показывает, что $a_i a_{i+1} \geq \frac{1}{i}$ хотя бы для одного индекса $i \leq n$.

11.8. В некоторые клетки таблицы 2025×2025 поставили по одному крестику. Множество, состоящее из 2025 клеток, назовём *ладейным*, если любые две из них находятся в разных строках и разных столбцах. Известно, что каждое ладейное множество содержит хотя бы k крестиков.

Найдите наименьшее k , при котором крестики заведомо возможно окрасить в два цвета так, что любое ладейное множество будет содержать крестики обоих цветов.

Ответ: 676.

Решение. Набор клеток, в котором любые две находятся в разных строках и разных столбцах будем называть *независимым*. Клетки без крестиков будем называть *пустыми*. Для обращения к строке или столбцу будем использовать слово *ряд*.

Так как каждое ладейное множество содержит хотя бы k крестиков, то множество пустых клеток содержит не больше $2025 - k$ независимых. Согласно теореме Кёнига-Эгервари это означает, что все пустые клетки содержатся в некоторых $2025 - k$ рядах. Пусть эти ряды состоят из a строк и b столбцов. Ясно, что можно переставлять между собой строки и столбцы исходной таблицы с сохранением условия задачи, поэтому не ограничивая общности, будем считать, что пустые клетки расположены в нижних a строках и правых b столбцах, причём $a \geq b$.

Рассмотрим случай $k = 676$. Все клетки левого верхнего прямоугольника R размера $(2025 - a) \times (2025 - b)$ заполнены крестиками. Покрасим все крестики каждой строки $1 \times (2025 - b)$ прямоугольника R в один цвет, чередуя цвета строк между собой. Поскольку $a + b = 2025 - 676 = 1349$ и $a \geq b$, то $b \leq 674$, откуда $2025 - a = 676 + b > 2b + 1$. Следовательно, строк каждого цвета будет больше, чем b .

Рассмотрим любое ладейное множество. Оно содержит по одной клетке в каждой из первых $2025 - a$ строк таблицы, причём не больше b из них стоят в правых b столбцах. Так как этих клеток меньше, чем окрашенных $1 \times (2025 - b)$ строк прямоугольника R каждого из цветов, то это ладейное множество содержит хотя бы по одной окрашенной клетке каждого цвета.

Пусть теперь $k \leq 675$. Рассмотрим таблицу, в которой нижние 675 строк и правые 675 столбцов пустые, а левый верхний квадрат R размера 1350×1350 заполнен крестиками. В такой таблице любое ладейное множество содержит не менее $675 \geq k$ крестиков. Рассмотрим произвольную раскраску крестиков в два цвета. Занумеруем все строки и столбцы таблицы

числами $\{1, 2, \dots, 2025\}$ сверху вниз и слева направо. Под клеткой (x, y) будем понимать клетку, расположенную на пересечении строки номер x и столбца номер y .

Выберем множество $\mathcal{M}$ всех клеток, лежащих на главной диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол таблицы. В этих клетках находится по крайней мере 675 крестиков одного цвета (назовём его первым) и не более 675 крестиков другого цвета (который назовём вторым). Поставим в соответствие каждой клетке (i, i) из $\mathcal{M} \cap R$, в которой стоит крестик второго цвета, какую-то свою клетку $(f(i), f(i))$ для некоторого $f(i) > 1350$ таким образом, чтобы $f(i) \neq f(j)$ при $i \neq j$. Заменяем в $\mathcal{M}$ каждую пару соответствующих клеток (i, i) и $(f(i), f(i))$ на пару клеток $(i, f(i))$ и $(f(i), i)$. Нетрудно видеть, что получится ладейное множество, в клетках которого будут стоять крестики только первого цвета. Следовательно, наша раскраска не удовлетворяет условию задачи.