8.1. К двузначному числу a приписали двузначное число b, в результате чего получилось число, равное $(a+b)^2$.

Найдите все возможные значения полученного числа.

Ответ: 2025 и 3025.

Условие задачи равносильно равенству

$$(a+b)^2 = 100a + b. \tag{1}$$

Сделаем несколько предварительных оценок. Так как $31^2 = 961$, а полученное число четырёхзначное, то $a + b \geqslant 32$. Кроме того, левая часть равенства (1) равна $(a+2b)a + b^2$, что больше чем $(a+2b)a + b$. Значит, $a + 2b < 100$ и, следовательно, $a + b < 90$.

Запишем равенство (1) в виде

$$(a+b)(a+b-1) = 99a. \tag{2}$$

Множители $a+b$ и $a+b-1$ взаимно просты (так как отличаются на 1), меньше 99 и их произведение делится на 99. Значит, ровно один из них делится на 11 и ровно один из них делится на 9.

Если множитель $a+b$ делится на 11, то он принадлежит множеству $\{33, 44, 55, 66, 77, 88\}$. Только при $a+b = 55$ число $a+b-1$ кратно 9, следовательно, $a+b = 55$ и из равенства (2) находим $a = 30$. Получаем пару чисел $(a, b) = (30, 25)$, которым соответствует $3025 = (30+25)^2$.

Если множитель $a+b-1$ делится на 11, то $a+b$ принадлежит множеству $\{34, 45, 56, 67, 78, 89\}$. Только число $a+b = 45$ кратно 9, следовательно, $a+b = 45$ и из равенства (2) находим $a = 20$. Получаем пару чисел $(a, b) = (20, 25)$, которым соответствует $2025 = (20+25)^2$.

8.2. В классе учатся 14 девочек и 14 мальчиков. На уроке физкультуры все ученики класса стали по кругу. Через A обозначим количество пар соседних детей разного пола, а через B – количество пар детей разного пола, стоящих через одного ребёнка.

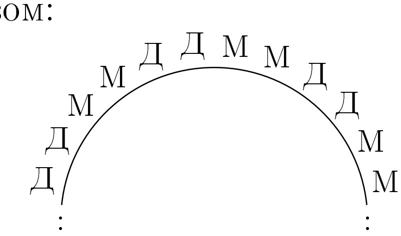
Найдите наибольшее возможное значение суммы $A + B$.

Ответ: 42.

Решение. Занумеруем всех детей числами от 1 до 28 по ходу движения часовой стрелки. Будем считать, что дети с номерами 1 и 2 также имеют номера 29 и 30 соответственно. Для каждого k от 1 до 28 положим $x_k = 1$, если дети с номерами k и $k+1$ разного пола, иначе $x_k = 0$. Аналогично положим $y_k = 1$, если дети с номерами k и $k+2$ разного пола, иначе $y_k = 0$. Тогда $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_{28}$ и $B = y_1 + y_2 + \ldots + y_{28}$. Так как среди детей с номерами k, $k+1$, $k+2$ хотя бы два одного пола, то $x_k + x_{k+1} + y_k \leqslant 2$. Поэтому $x_k + x_{k+1} + y_k + y_{k+1} \leqslant 3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A + B &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{28}) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{28}) = \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2) + (x_3 + x_4 + y_3 + y_4) + \ldots + \\ &+ (x_{27} + x_{28} + y_{27} + y_{28}) \leqslant 14 \cdot 3 = 42. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что полученная оценка достигается, если расставить детей следующим образом:



(пары по два мальчика и две девочки чередуются между собой).

8.3. Про квадратный трёхчлен $p(x)$ известно, что уравнение

$$p(3x-2)p(2-3x) = (p(0))^2$$

имеет ровно одно действительное решение.

Найдите все возможные решения уравнения $p(x) = 0$.

Ответ. $x = 0$

Решение. Обозначим $p(x) = ax^2 + bx + c$, тогда уравнение из условия имеет вид $(a(3x-2)^2+b(3x-2)+c)(a(3x-2)^2-b(3x-2)+c) = c^2$. Применив формулу разности квадратов и раскрыв скобки, получим уравнение

$$a^2(3x-2)^4 + 2ac(3x-2)^2 + c^2 - b^2(3x-2)^2 = c^2.$$

Вычтем из обеих частей слагаемое c^2 и вынесем за скобки общий множитель $(3x-2)^2$:

$$(3x-2)^2(a^2(3x-2)^2 + 2ac - b^2) = 0.$$

Нетрудно видеть, что число $x = \frac{2}{3}$ является решением данного уравнения. Так как согласно условию задачи других решений у этого уравнения нет, уравнение $a^2(3x-2)^2 = b^2 - 2ac$ либо не имеет решений, либо $x = \frac{2}{3}$ – его единственное решение. Рассмотрим эти возможности по отдельности.

Если уравнение $a^2(3x-2)^2 = b^2 - 2ac$ не имеет решений, то $b^2 < 2ac$. В частности, число $2ac$ положительно, поэтому, верно двойное неравенство $b^2 < 2ac < 4ac$. Следовательно, дискриминант квадратного уравнения $p(x) = 0$ отрицателен и оно не имеет решений.

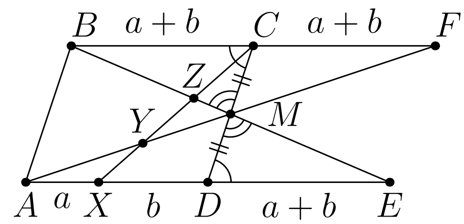
Если число $x = \frac{2}{3}$ является решением уравнения $a^2(3x-2)^2 = b^2 - 2ac$, то $b^2 = 2ac$. В частности, число $2ac$ неотрицательно, поэтому, дискриминант квадратного уравнения $p(x) = 0$ равен $-2ac$ и неположителен. Следовательно, уравнение $p(x) = 0$ имеет решение, если и только если $-2ac = 0$. В таком случае $c = 0$, $b^2 = 2ac = 0$ и квадратный трёхчлен $p(x) = ax^2$ имеет единственный корень 0 и, как нетрудно видеть, удовлетворяет условию задачи.

8.4. Точка M – середина стороны DC параллелограмма $ABCD$. На стороне AD отметили произвольную точку X. Отрезки AM и BM пересекают отрезок CX в точках Y и Z, соответственно.

Докажите, что $CZ > XY$.

Решение. Продлим прямые BM и AM до пересечения с прямыми AD и BC в точках E и F, соответственно. Так как $DE \parallel BC$ и $MD = MC$, треугольники MDE и MCB равны по второму признаку равенства. Значит, $ED = BC$. Аналогично доказывается, что $CF = AD$.

Из параллельности прямых XE и BC следует подобие треугольников XZE и CZB. В этих треугольниках верно равенство $\frac{XZ}{ZC} = \frac{EX}{BC}$. Аналогично из подобия треугольников CYF и XYA получаем равенство $\frac{CY}{YX} = \frac{CF}{XA}$. Введём обозначения $AX = a$ и $DX = b$. Вместо длин отрезков CZ и XY сравним отношения $\frac{CX}{XY}$ и $\frac{CX}{CZ}$. Выразим их в наших обозначениях:



$$\frac{CX}{XY} = 1 + \frac{CY}{XY} = 1 + \frac{CF}{AX} = 2 + \frac{b}{a},$$
$$\frac{CX}{CZ} = 1 + \frac{XZ}{CZ} = 1 + \frac{EX}{BC} = 2 + \frac{b}{a+b}.$$

Так как $\frac{b}{a} > \frac{b}{a+b}$, то $\frac{CX}{XY} > \frac{CX}{CZ}$, откуда следует требуемое неравенство.

9.1. В классе учатся 15 девочек и 15 мальчиков. На уроке физкультуры все ученики класса стали по кругу. Через A обозначим количество пар соседних детей разного пола. По команде учителя дети рассчитались на первый-второй и каждый второй школьник вышел из круга. Через B обозначим количество пар соседних детей разного пола, которые остались стоять по кругу.

Найдите наибольшее возможное значение суммы $A + B$.

Ответ: 30.

Решение. Тройку детей, состоящую из ребёнка, вышедшего из круга, и двух его соседей, назовём *интересной*. С одной стороны, каждая пара соседних детей разного пола, которую учитывали в сумме $A+B$, состоит в какой-то интересной тройке. С другой стороны, в каждой интересной тройке ровно по одному разу рассматривалась каждая пара детей: соседние до выхода из круга, а стоящие через одного – после. Так как среди них есть хотя бы двое одного пола, то в общую сумму $A + B$ эта тройка могла дать вклад не больше двух. Поскольку общее число интересных троек равно 15, сумма $A + B$ не превосходит $2 \cdot 15 = 30$.

Нетрудно видеть, что полученная оценка могла достигаться, если мальчики и девочки чередовались друг с другом.

9.2. Миша написал в тетрадке некоторое натуральное число. Если последнее написанное им число равно n, Миша может написать после него наименьший простой делитель числа $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$, если он не был написан ранее.

Какое наибольшее количество чисел он может написать?

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что для любого нечётного числа n число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ чётно и после него Миша может выписать только 2. А для любого чётного числа n число n^3+2n^2+4n+3 нечётно и после него Миша может выписать только нечётное число. Если среди выписанных Мишей чисел найдутся два нечётных, ни одно из которых не является последним выписанным, то после каждого из них должно быть выписано 2, что противоречит условию. Значит либо в последовательности выписанных Мишей чисел есть не больше одного нечётного, либо в ней есть ровно два нечётных, одно из которых стоит на последнем месте. Так как чётность чисел, выписанных Мишей, чередуется, в первом случае он выписал не больше трёх чисел, а во втором – не больше четырёх чисел.

Покажем, что 4 числа он мог выписать. Примером этому может служить последовательность чисел $4, 5, 2, 3$.

9.3. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют натуральные числа a, b и c такие, что верно равенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=n.$$

Решение. Для каждого натурального числа n чи́сла $a=n(n+1)-1$, $b=n$ и $c=1$ удовлетворяют требуемому равенству, так как для них

$$\frac{n(n+1)-1}{n+1}+\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{n(n+1)}{n+1}=n.$$

Хотя это и не требуется в условии задачи, покажем один из способов нахождения требуемой тройки чисел a,b,c. Положим для простоты $c=1$, тогда требуемое равенство примет вид

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=n \iff a^2+a+b^2+b=n(a+1)(b+1).$$

Преобразуем последнее равенство к виду квадратного уравнения переменной a, получим уравнение

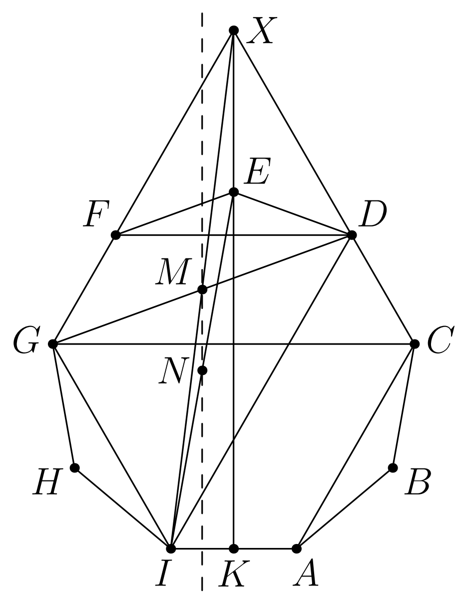
$$a^2+a(1-n(b+1))+(b+1)(b-n)=0.$$

Осталось заметить, что при $b=n$ это уравнение является неполным квадратным уравнением и его корни равны 0 и $n(b+1)-1=n(n+1)-1$.

9.4. В правильном девятиугольнике $ABCDEFGHI$ точки M и N – середины диагоналей DG и EI.

Докажите, что прямые MN и AI перпендикулярны.

Решение. Обозначим через Ω описанную окружность девятиугольника $ABCDEFGHI$. Все стороны этого девятиугольника стягивают равные дуги окружности Ω, такие дуги будем называть *единичными*. Пусть прямые CD и FG пересекаются в точке X. Так как хорды DG и IC стягивают по три единичные дуги, эти хорды равны. Значит, $GDCI$ – равнобедренная трапеция и $DC \parallel GI$. Аналогично, хорды GI и FD стягивают по две единичные дуги, поэтому, $GF \parallel DI$. Значит, у четырёхугольника $GIDX$ пары противоположных сторон параллельны, поэтому, он является параллелограммом. По свойству параллелограмма середина M его диагонали DG совпадает с серединой диагонали IX. Из равенств дуг FG и DC следует, что $FDCG$ – равнобедренная трапеция, а из равенства дуг GI и CA – что $CG \parallel AI$. Точка X пересечения противоположных сторон равнобедренной трапеции $FDCG$ ввиду симметрии лежит на серединном перпендикуляре к её основаниям DF и CG. Так как на серединном перпендикуляре к отрезку DF лежит точка E, то $XE \perp DF$, откуда $XE \perp AI$.

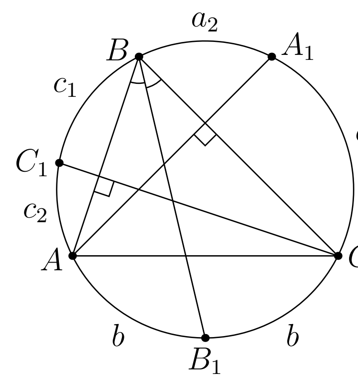


Так как точки M и N – середины отрезков IX и EI, прямая MN – средняя линия треугольника IXE. Следовательно, прямая MN параллельна основанию XE и утверждение задачи следует из перпендикулярности $XE \perp AI$.

10.1. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC угол при вершине C наименьший. Высоты, проведённые из вершин A и C пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 и C_1, а биссектриса, проведённая из вершины B – в точке B_1.

Докажите, что если $AA_1 = BB_1$, то $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Решение. Обозначим через b, a_1, a_2, c_1, c_2 градусные меры меньших дуг $AB_1, CA_1, A_1B, BC_1, C_1A$ соответственно, градусная мера дуги B_1C тоже равна b. Перпендикулярности $AA_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AB$ хорд записываются в виде двойных равенств:



$$a_2 + 2b = \pi = a_1 + c_1 + c_2,$$
$$c_1 + 2b = \pi = c_2 + a_1 + a_2.$$

Из левых равенств получаем, что $a_2 = \pi - 2b$ и $c_1 = \pi - 2b$. Подставляя эти значения в правые равенства, получаем, что $a_1 + c_2 = 2b$.

Так как хорды равной длины стягивают дуги равной длины, равенство $AA_1 = BB_1$ означает, что дуга AA_1, проходящая через точки B_1 и C, равна одной из двух дуг BB_1. Таким образом, либо $2b + a_1 = b + a_1 + a_2$, либо $2b + a_1 = b + c_1 + c_2$. Рассмотрим эти два варианта по отдельности.

Предположим, что $2b + a_1 = b + a_1 + a_2$, тогда $a_2 = b$. С учётом равенства $a_2 = \pi - 2b$, получаем, что $b = \frac{\pi}{3}$. В таком случае градусная мера дуги CC_1, проходящей через точки B и A_1, равна $c_1 + a_2 + a_1 = 2b + a_1$ и совпадает с градусной мерой дуги AA_1, проходящей через точки B_1 и C. Значит, $CC_1 = AA_1$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $2b + a_1 = b + c_1 + c_2$. С одной стороны

$$b + a_1 = c_1 + c_2 \iff b + \pi = 2(c_1 + c_2),$$

что по условию меньше $4b$, а значит $3b > \pi$. С другой стороны

$$b + a_1 = c_1 + c_2 \iff a_1 + a_2 + 3b - \pi = c_1 + c_2,$$

что по условию меньше $a_1 + a_2$, а значит $3b < \pi$. Получаем противоречие.

10.2. В летнем лагере отдыхает n детей. Старший вожатый каждый день назначает трёх дежурных: главного дежурного и двух его помощников. При этом он хочет составить расписание таким образом, чтобы для любых двух детей был ровно один день, в который один из них (не важно который) был главным дежурным, а другой – его помощником.

Найдите все натуральные значения $n \geqslant 3$, при которых это возможно.

Ответ: все числа вида $4k$ и $4k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Предположим, что для некоторого натурального числа n старшему вожатому удалось составить расписание дежурств согласно условию задачи. Найдём двумя способами общее количество пар, состоящих из главного дежурного и его помощника. С одной стороны, оно совпадает с общим числом $\frac{n(n-1)}{2}$ пар детей, а с другой стороны, оно равно удвоенному количеству дней в расписании, поскольку каждый день образовывались ровно две такие пары. Значит, в расписании указаны дежурства на $\frac{n(n-1)}{4}$ дней, откуда следует, что произведение $n(n-1)$ делится на 4. Непосредственный перебор остатков при делении на 4 показывает, что $n(n-1) \vdots 4$, если и только если n даёт остаток 0 или 1 при делении на 4.

Пусть число $n \geqslant 3$ делится на 4, тогда оно равно $4k$ для некоторого натурального числа k. Составим пример расписания, удовлетворяющего условию задачи. Разделим всех детей на k групп по 4 ребёнка. Для каждой группы присвоим входящим в неё детям номера $1, 2, 3, 4$ и назначим дежурных на три дня в виде $(1, 2, 3)$, $(4, 2, 1)$ и $(3, 2, 4)$, где на первой позиции указан номер главного дежурного. Нетрудно видеть, что после таких $3k$ дней будет выполнено условие задачи для любых двух детей внутри каждой группы. Теперь для каждых двух групп G_1 и G_2 составим расписание на 8 дней следующим образом: разделим детей группы G_1 на две пары и пусть каждый из детей группы G_2 выполнит роль главного дежурного по разу с каждой из двух пар детей из G_1 в качестве его помощников. После таких $4k(k-1)$ дней будет выполнено условие задачи для любых двух детей из разных групп.

Пусть число $n \geqslant 3$ даёт остаток 1 при делении на 4, тогда оно равно $4k+1$ для некоторого натурального числа k. Составим пример расписания, удовлетворяющего условию задачи, воспользовавшись предыдущей конструкцией. Выделим одного ребёнка, пусть он отдыхает первые $4k^2-k$ дней, в которые остальные $4k$ детей будут дежурить согласно расписанию, составленному ранее. После этого разделим этих $4k$ детей на $2k$ пар и в каждый из следующих $2k$ дней назначим на дежурство выделенного ребёнка в роли главного дежурного и одну из ещё незадействованных пар в качестве его помощников.

10.3. Назовём рациональное число r *почти простым*, если оно имеет вид $\dfrac{p}{s}$, где $p > 7$ – некоторое простое число, а s – сумма цифр числа p в десятичной записи.

а) Может ли произведение двух почти простых чисел оказаться почти простым числом?

б) Может ли сумма двух почти простых чисел оказаться почти простым числом?

Ответ: а) нет, не может; **б)** нет, не может.

Решение. а) Предположим, существуют такие почти простые числа r_1, r_2, r_3, для которых $r_1 r_2 = r_3$. По определению почти простого числа, для всех $i \in \{1, 2, 3\}$ равенство $r_i = \frac{p_i}{s_i}$ выполнено для некоторого простого числа p_i с суммой цифр s_i. Перепишем условие $r_1 r_2 = r_3$ в виде

$$\frac{p_1}{s_1} \cdot \frac{p_2}{s_2} = \frac{p_3}{s_3} \iff p_1 p_2 s_3 = p_3 s_1 s_2. \qquad (1)$$

Заметим, что любое простое число p_i, большее 7, не является однозначным, значит $s_i < p_i$. Чи́сла s_i и p_i взаимно просты, поскольку число p_i простое и $s_i < p_i$. Во втором равенстве (1) правая часть кратна p_3, поэтому левая часть также кратна p_3. С другой стороны, s_3 и p_3 взаимно просты, поэтому одно из чисел p_1 или p_2 кратно p_3. Однако, одно простое число кратно другому тогда и только тогда, когда они равны. Без потери общности, пусть $p_1 = p_3$. Тогда $s_1 = s_3$ и равенство (1) после сокращения на $s_1 p_1 \neq 0$ принимает вид $p_2 = s_2$, что противоречит неравенству $s_2 < p_2$. Значит, равенство $r_1 r_2 = r_3$ невозможно.

б) Предположим, для некоторых почти простых чисел r_1, r_2, r_3 выполнено равенство $r_1 + r_2 = r_3$. Воспользуемся обозначениями пункта а), тогда

$$\frac{p_1}{s_1} + \frac{p_2}{s_2} = \frac{p_3}{s_3} \iff p_1 s_2 s_3 + s_1 p_2 s_3 = s_1 s_2 p_3. \qquad (2)$$

Как известно, любое натуральное число и его сумма цифр дают одинаковый остаток при делении на 3. В силу второго равенства (2) верны следующие сравнения:

$$p_1 p_2 p_3 \equiv s_1 s_2 p_3 \equiv p_1 s_2 s_3 + s_1 p_2 s_3 \equiv p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 \equiv 2 p_1 p_2 p_3 \pmod 3.$$

Таким образом, имеет место сравнение $p_1 p_2 p_3 \equiv 0 \pmod 3$, которое невозможно, поскольку p_1, p_2, p_3 – простые числа, бо́льшие 3. Следовательно, сумма двух почти простых чисел не может оказаться почти простым числом.

10.4. Даны три функции $f_1(x) = \sin(x + 20^\circ)$, $f_2(x) = \sin(40^\circ - x)$, $f_3(x) = \sin(x - 100^\circ)$ и три действительных числа x_1, x_2, x_3.

Докажите, что для некоторой перестановки y_1, y_2, y_3 чисел x_1, x_2, x_3 выполнено неравенство

$$f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3) \geqslant 0.$$

Решение. Докажем, что для каждого действительного числа x верно равенство $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 0$. Действительно,

$$\begin{gathered} f_1(x) + f_2(x) = \sin(x + 20^\circ) + \sin(40^\circ - x) = \\ = 2\sin(30^\circ)\cos(x - 10^\circ) = -\sin(x - 100^\circ) = -f_3(x). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \big(f_1(x_1) + f_2(x_1) + f_3(x_1)\big) + \big(f_1(x_2) + f_2(x_2) + f_3(x_2)\big) + \\ + \big(f_1(x_3) + f_2(x_3) + f_3(x_3)\big) = \big(f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)\big) + \\ + \big(f_1(x_2) + f_2(x_3) + f_3(x_1)\big) + \big(f_1(x_3) + f_2(x_1) + f_3(x_2)\big) = 0. \end{gathered}$$

Поэтому хотя бы для одной из трёх перестановок (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1) и (x_3, x_1, x_2) соответствующая ей сумма среди $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$, $f_1(x_2) + f_2(x_3) + f_3(x_1)$ и $f_1(x_3) + f_2(x_1) + f_3(x_2)$ неотрицательна.

11.1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $AB = AC = AD$. Прямая AB и прямая, проходящая через точку D параллельно стороне BC, пересекаются в точке E.

Докажите, что центр описанной окружности треугольника BED лежит на прямой CD.

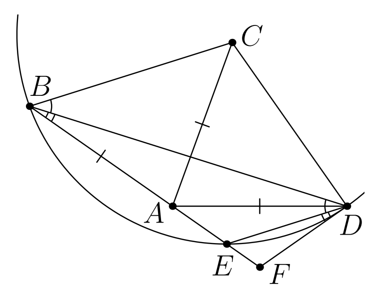
Решение. Введём обозначения $\angle BAC = x$ и $\angle CAD = y$. В равнобедренных треугольниках ABC, ACD и ABD верны равенства

$$\angle ABC = 90^\circ - \frac{x}{2}, \angle ADC = 90^\circ - \frac{y}{2}, \angle ADB = 90^\circ - \frac{x+y}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle ABC + \angle BDC = \angle ABC + \angle ADC - \angle ADB = 90^\circ. \qquad (1)$$

Пусть касательная, проведённая к описанной окружности треугольника BED в точке D, пересекает прямую AB в точке F. По свойству угла между касательной и хордой верно равенство $\angle EBD = \angle FDE$. Углы DBC и EDB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и DE и секущей BD. Следовательно,



$$\angle ABC = \angle EBD + \angle DBC = \angle FDE + \angle EDB = \angle FDB.$$

С учётом равенства (1) получаем, что прямые CD и FD перпендикулярны, поскольку

$$\angle FDC = \angle FDB + \angle BDC = \angle ABC + \angle BDC = 90^\circ.$$

Так как прямая CD перпендикулярна касательной DF, она проходит через центр описанной окружности треугольника BED, что и требовалось доказать.

11.2. Известно, что в некоторой арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, произведение второго и третьего её членов равно десятому её члену.

Найдите все возможные значения её пятого члена.

Ответ: $1, 13$.

Решение. Обозначим через a первый член данной прогрессии, а через d – её разность. Число a натуральное по условию задачи. Если $d < 0$, то с какого-то момента члены прогрессии станут отрицательными, что противоречит условию задачи. Следовательно d – тоже натуральное число. В наших обозначениях равенство из условия имеет вид

$$(a+d)(a+2d) = a + 9d. \tag{1}$$

Если предположить, что $d \geqslant 4$, получим противоречие

$$(a+d)(a+2d) = a^2 + 3ad + 2d^2 \geqslant a + 3d + 8d > a + 9d.$$

Значит $d \leqslant 3$, рассмотрим три оставшиеся значения по отдельности.

При $d = 3$ равенство (1) обращается в уравнение

$$(a+3)(a+6) = a + 27 \Leftrightarrow a^2 + 8a - 9 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+9) = 0,$$

единственным натуральным решением которого является $a = 1$. При $a = 1$ и $d = 3$ значение пятого члена прогрессии равно 13.

При $d = 2$ равенство (1) обращается в уравнение

$$(a+2)(a+4) = a + 18 \Leftrightarrow a^2 + 5a - 10 = 0,$$

не имеющее целых решений.

При $d = 1$ равенство (1) обращается в уравнение

$$(a+1)(a+2) = a + 9 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 7 = 0,$$

также не имеющее целых решений.

Наконец, при $d = 0$ равенство (1) обращается в уравнение

$$a^2 = a,$$

единственным натуральным решением которого является $a = 1$, тогда значение пятого члена прогрессии равно 1.

11.3. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел таких, что если к числу a^2 приписать справа число b^2, получится число, равное $(a \cdot b + 1)^2$.

Ответ: $(4, 3)$ и $(2, 3)$.

Решение. Пусть k – количество цифр в десятичной записи числа b^2, тогда $10^{k-1} \leqslant b^2 < 10^k$. Условие задачи равносильно равенству

$$10^k a^2 + b^2 = a^2 b^2 + 2ab + 1.$$

Если предположить, что $10^k \geqslant b^2 + 2$, то

$$10^k a^2 + b^2 \geqslant a^2 b^2 + 2a^2 + b^2 \geqslant a^2 b^2 + a^2 + 2ab \geqslant a^2 b^2 + 2ab + 1,$$

причём неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ обращается в равенство только при $a = b$, а неравенство $a^2 \geqslant 1$ – только при $a = 1$. Однако, в таком случае $a = b = 1$ и они не удовлетворяют условию задачи. Значит, $10^k = b^2 + 1$.

При $k = 1$ находим значение $b = 3$. Подставляя его в исходное равенство, получаем уравнение $10a^2 + 9 = 9a^2 + 6a + 1$. Решениями этого уравнения являются числа $a = 4$ и $a = 2$, которым соответствуют пары $(4, 3)$ и $(2, 3)$ чисел a, b.

При $k \geqslant 2$ число $b^2 = 10^k - 1$ оканчивается на 99, вследствие чего даёт остаток 3 при делении на 4. Однако, квадраты натуральных чисел при делении на 4 дают только остатки 0 и 1. Поэтому, при $k \geqslant 2$ равенство $10^k = b^2 + 1$ невозможно и больше нет пар, удовлетворяющих условию задачи.

11.4. Божья коровка и Мотылёк играют в игру на бесконечной клетчатой плоскости, делая ходы по очереди. Изначально все клетки белые, их разрешается красить в один из двух цветов: красный или чёрный. Божья коровка за свой ход может покрасить две белые клетки, а Мотылёк – одну. Первой ходит Божья коровка. Она может в любой момент остановить игру и получить n макарон, если на плоскости есть полностью красный или полностью черный клетчатый квадрат с длиной стороны n.

а) Может ли Божья коровка, независимо от действий Мотылька, получить 2025^{2025} макарон?

б) Пусть теперь Божья коровка за свой ход может красить только одну клетку. Какое наибольшее количество макарон она может получить независимо от действий Мотылька?

Ответ. а) да, может; б) 1 макарон.

а) Обозначим $n = 2025^{2025}$. Приведём стратегию Божьей коровки, следуя которой, она гарантированно получит хотя бы n макарон. На каждом своём ходу она будет перекрашивать клетки в красный цвет. Выберем 2^{n^2} непересекающихся клетчатых квадрата с длиной стороны n. Индукцией по $i \leqslant n^2$ докажем, что Божья коровка может добиться следующей ситуации: перед некоторым её ходом среди выбранных квадратов есть хотя бы 2^{n^2-i} квадрата, в каждом из которых Божья коровка покрасила ровно i клеток, а Мотылек – ни одной.

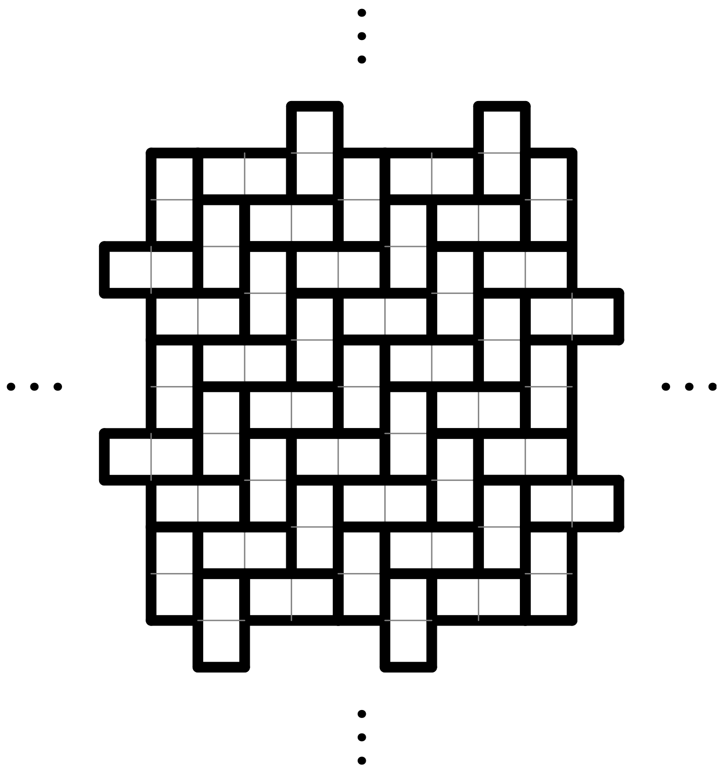
База индукции. При $i = 0$ утверждение верно перед первым ходом игры, так как никто из игроков ещё не закрасил ни одной клетки.

Шаг индукции. Пусть для некоторого $i < n^2$ предположение индукции верно. Выберем 2^{n^2-i} квадрата, в каждом из которых Божья коровка покрасила ровно i клеток, а Мотылек – ни одной, и назовем их *хорошими*. Пусть в каждый из следующих 2^{n^2-i-1} ходов Божья коровка красит по одной клетке в двух хороших квадратах так, чтобы в итоге покрасить ещё по одной клетке в каждом из них. За это время Мотылёк успеет покрасить клетки не более, чем в 2^{n^2-i-1} хороших квадратах. Значит, в хотя бы $2^{n^2-(i+1)}$ хороших квадратах Мотылёк не покрасит клетки, а Божья коровка покрасит ровно одну (и их станет не i, а $i + 1$). Шаг индукции доказан.

Рассмотрим доказанное утверждение при $i = n^2$: есть хотя бы один клетчатый квадрат с длиной стороны n, все n^2 клеток которого красила только Божья коровка. Остановив в этот момент игру, она получит n

макарон.

б) Божья коровка может получить 1 макарон после первого же своего хода. Приведём стратегию Мотылька, при которой Божья коровка не сможет получить больше макарон. Рассмотрим следующее разбиение плоскости на доминошки:



Как нетрудно видеть, в любом квадрате 2×2 полностью содержится одна доминошка. Пусть после того, как Божья коровка покрасила некоторую клетку, Мотылёк красит вторую клетку из той же доминошки разбиения в другой цвет. При такой стратегии Мотылька ни одна доминошка из разбиения не будет полностью красной или полностью чёрной, значит, не найдётся полностью красного или полностью черного клетчатого квадрата размера 2×2.