8.5. В тетрадку выписали в строку все нечётные числа от 1 до 105 по одному разу. В строку ниже под каждым числом записали:

- 0, если ни одно другое число верхней строки на него не делится;
- 1, если ровно одно другое число верхней строки на него делится;
- 2 в остальных случаях.

Найдите сумму всех чисел, записанных в нижней строке.

Ответ: 29.

Решение. Рассмотрим произвольное нечётное число x, $1 \leqslant x \leqslant 21$. Для него в верхней строке найдутся два числа $3x \leqslant 105$ и $5x \leqslant 105$, которые на него делятся. Следовательно под каждым таким числом x записано число 2.

Рассмотрим произвольное нечётное число x, $21 < x \leqslant 35$. На него делится число $3x \leqslant 105$. Допустим, найдётся другое нечётное число y, не превосходящее 105, которое на него делится. Тогда частное $\frac{y}{x}$ – натуральное число. Так как y нечётно, это частное тоже нечётно. Кроме того, $\frac{y}{x} \leqslant \frac{105}{x} < \frac{105}{21} = 5$, поэтому это частное равно 1 или 3. Получаем противоречие с тем, что $y \neq x$ и $y \neq 3x$. Следовательно под каждым таким числом x записано число 1.

Рассмотрим произвольное нечётное число x, $35 < x \leqslant 105$. Допустим, найдётся другое нечётное число y, не превосходящее 105, которое на него делится. Тогда частное $\frac{y}{x}$ – натуральное число. Так как y нечётно, это частное тоже нечётно. Кроме того, $\frac{y}{x} \leqslant \frac{105}{x} < \frac{105}{35} = 3$, поэтому это частное равно 1. Получаем противоречие с тем, что $y \neq x$. Следовательно под каждым таким числом x записано число 0.

Таким образом, сумма всех чисел, записанных в нижней строке, равна $2 \cdot 11 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 35 = 29$.

8.6. Даны два треугольника, длины сторон которых выражаются натуральными числами. Для каждой пары сторон из разных данных треугольников вычислили сумму их длин. В результате получился набор чисел $11, 13, 16, 18, 18, 20, 22, 23, 27$.

Найдите длины сторон этих треугольников.

Ответ: $5, 10, 14$ и $6, 8, 13$.

Решение. Обозначим длины сторон первого треугольника через $a \leqslant b \leqslant c$, а второго – через $x \leqslant y \leqslant z$. Тогда наибольшая и наименьшая из найденных сумм равны $a + x = 11$ и $c + z = 27$, а сумма всех 9 найденных сумм равна $3(a + b + c + x + y + z) = 168$. Значит, $a + b + c + x + y + z = 56$, откуда находим $b + y = 18$. Вторая по возрастанию сумма равна $a + y$ или $b + x$, не ограничивая общности, пусть $a + y = 13$. Тогда $b - a = (b + y) - (a + y) = 5$. Заметим, что разность $(b + z) - (a + z)$ тоже равна $b - a = 5$. Среди сумм $16, 18, 20, 22, 23,$ у которых мы ещё не определили соответствующие пары сторон, есть только две отличающиеся на 5 – это 18 и 23. Следовательно, $a + z = 18$ и $b + z = 23$. Так как $b + x \leqslant c + x \leqslant c + y$, мы можем определить все оставшиеся суммы: $b + x = 16$, $c + x = 20$ и $c + y = 22$.

Из неравенства треугольника и целочисленности длин сторон данных треугольников следует, что $a + b \geqslant c + 1$ и $x + y \geqslant z + 1$, поэтому,

$$56 = (a + b) + c + (x + y) + z \geqslant 2c + 1 + 2z + 1 = 2(c + z) + 2 = 56.$$

Так как это неравенство обращается в равенство, то и два следствия из неравенства треугольника обращаются в равенства, т.е. $a + b = c + 1$ и $x + y = z + 1$. Из равенств $a + x = 11$ и $c + x = 20$ находим разность $c - a = 9$. Следовательно, тройка (a, b, c) имеет вид $(a, a + 5, a + 9)$ и верно равенство $a + a + 5 = (a + 9) + 1$, откуда получаем, что $a = 5$. Таким образом, $(a, b, c) = (5, 10, 14)$ и простой подстановкой определяем, что $(x, y, z) = (6, 8, 13)$.

8.7. Докажите, что для любого натурального числа n существуют натуральные числа a, b, c, d, каждое из которых больше n, такие, что выполнены равенства $ab = cd$ и $a + b = c + d + 2$.

Решение. Покажем один из многочисленных способов, которыми можно найти необходимую четвёрку. Для того, чтобы выполнялось равенство $ab = cd$ возьмём числа a, b, c, d в виде $a = (n+x)(n+y)$, $b = (n+z)(n+t)$, $c = (n+x)(n+z)$ и $d = (n+y)(n+t)$. Для них равенство $a+b = c+d+2$ равносильно равенству $xy + zt = xz + yt + 2$. Положим для простоты $x = y = 0$, $z = 1$ и найдём из этого равенства $t = 2$. Таким образом, для любого натурального числа $n > 1$ условию задачи удовлетворяет четвёрка

$$(a, b, c, d) = (n^2, n^2 + 3n + 2, n^2 + n, n^2 + 2n),$$

в которой все числа больше n. Для $n = 1$ возьмём ту же четвёрку, что и для $n = 2$.

8.8. У Матвея был мешок с бочонками для игры «лото»: всего 90 бочонков, на каждом из которых записано двузначное число, на разных бочонках – разные числа. Однажды он обнаружил, что некоторые бочонки потерялись, и придумал свою игру с оставшимися в мешке. По новым правилам он достаёт из мешка первый бочонок наугад, а число на каждом следующем вынутом из мешка бочонке должно отличаться от числа на предыдущем только в одном разряде, причём ровно на 1. По окончании игры все бочонки возвращаются в мешок. В первый раз Матвей достал наугад бочонок с числом 13 и через несколько ходов вынул бочонок с числом 95. Во второй раз он достал наугад бочонок с числом 70 и через несколько ходов вынул бочонок с числом 49.

В третьей игре Матвей снова достал наугад число 13. Докажите, что он может действовать так, чтобы через несколько ходов вынуть бочонок с числом 49.

Решение. Нарисуем таблицу 9×10, клетки которой заполнены числами таким образом, что на пересечении i-й строки и j-го столбца записано число $10i + j - 1$. Заметим, что клетки c_1 и c_2 данной таблицы соседствуют по стороне тогда и только тогда, когда записанные в них числа отличаются только в одном разряде, причём ровно на 1. Всякой последовательности ходов, которые совершает Матвей, соответствует некоторая последовательность c_1, c_2, $\ldots$, c_k клеток таблицы такая, что клетки c_i и c_{i+1} имеют общую сторону для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Такую последовательность клеток будем называть *путём*. Ясно, что если имеется некоторый путь, то из него можно получить путь, все клетки которого различны, при необходимости выкинув из него несколько клеток. Для удобства записи также условимся обозначать клетки при помощи числа, записанного в этой клетке.

По условию задачи, существует путь

$$13 \to c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_n \to 95, \qquad (*1)$$

начинающийся в клетке 13 и заканчивающийся в клетке 95, а также существует путь

$$70 \to d_1 \to d_2 \to \ldots \to d_m \to 49, \qquad (*2)$$

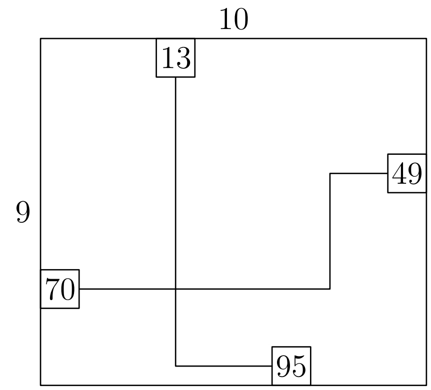
начинающийся в клетке 70 и заканчивающийся в клетке 49.

Пусть для некоторых индексов i, j выполнено $c_i = d_j$. Тогда в третьей игре Матвею достаточно вытаскивать бочонки, соответствующие пути

$$13 \to c_1 \to \ldots \to c_{i-1} \to c_i = d_j \to d_{j+1} \to \ldots \to d_m \to 49,$$

при необходимости удалив из него некоторые клетки, сделав их все попарно различными.

Осталось заметить, что клетки 13, 95, 70 и 49 лежат на верхней, нижней, левой и правой сторонах таблицы, поэтому из геометрических соображений пути $(*1)$ и $(*2)$ обязаны пересекаться (см. рисунок), а значит для некоторых индексов i, j выполнено $c_i = d_j$.



9.5. Аня расставила в некотором порядке числа в множествах $\{17, 18, 19, 20\}$ и $\{75, 76, 77, 78\}$ и получила наборы (p_1, p_2, p_3, p_4) и (q_1, q_2, q_3, q_4) соответственно. После этого для каждого из четырёх квадратных трёхчленов

$$x^2 - p_1x + q_1, \quad x^2 - p_2x + q_2, \quad x^2 - p_3x + q_3, \quad x^2 - p_4x + q_4$$

она нашла количество его различных действительных корней.

Какая могла получиться сумма четырёх найденных Аней чисел?

Ответ: 6.

Решение. Рассмотрим трёхчлен $x^2 - p_ix + q_i$, у которого $p_i = 17$. Его дискриминант равен $17^2 - 4 \cdot q_i = 289 - 4 \cdot q_i \leqslant 289 - 4 \cdot 75 = -11 < 0$. Следовательно этот трёхчлен не имеет корней.

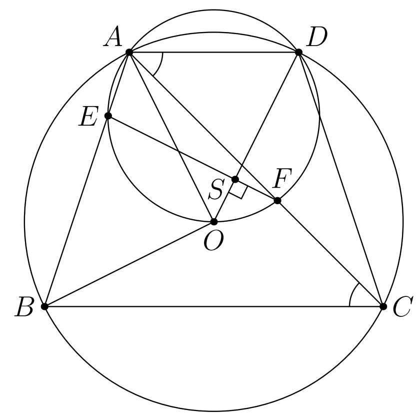
Рассмотрим любой трёхчлен $x^2 - p_jx + q_j$, у которого $p_j > 17$. Его дискриминант равен $p_j^2 - 4 \cdot q_j \geqslant 18^2 - 4 \cdot q_j \geqslant 18^2 - 4 \cdot 78 = 324 - 312 = 12 > 0$. Следовательно этот трёхчлен имеет два различных корня.

Таким образом, сумма найденных Аней чисел равна $0 + 2 + 2 + 2 = 6$.

9.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Описанная окружность треугольника AOD пересекает сторону AB и диагональ AC трапеции в точках E и F соответственно.

Докажите, что прямые EF и DO перпендикулярны.

Решение. Обозначим через $\smile EO$ и $\smile DF$ градусные меры меньших дуг EO и DF, а через S – точку пересечения хорд EF и DO. По свойству угла между хордами верно равенство $\angle ESO = \frac{\smile EO + \smile DF}{2}$. Значит, чтобы показать, что $\angle ESO = 90^\circ$, достаточно доказать равенство $\smile EO + \smile DF = 180^\circ$. Так как угол, опирающийся на дугу, равен половине её градусной меры, последнее равенство равносильно равенству $\angle OAE + \angle DAF = 90^\circ$. Из равнобедренности треугольника OAB следует,



что $\angle OAE = \angle OAB = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$. Углы DAC и ACB равны как накрест лежащие, а угол AOB вдвое больше угла ACB по свойству центрального угла. Таким образом,

$$\angle OAE + \angle DAF = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} + \angle DAC = 90^\circ - \angle DAC + \angle DAC = 90^\circ.$$

9.7. Про 2026 различных натуральных чисел известно, что произведение любых двух из них не делится на произведение никаких двух других.

Какое наименьшее количество простых делителей может быть у произведения всех этих 2026 чисел?

Ответ. 2.

Решение. Предположим, что простых делителей меньше, чем два. Тогда их либо нет, либо он один. В первом случае все числа равны 1, что противоречит условию. Во втором случае все числа являются степенями одного и того же простого числа, которое обозначим через p. Выберем среди данных 2026 чисел любые четыре числа p^a, p^b, p^c, p^d. Заметим, что либо p^ap^b делится на p^cp^d, либо p^cp^d делится на p^ap^b – снова получаем противоречие с условием задачи.

Покажем, что у произведения всех 2026 простых чисел могут быть ровно два простых делителя. Рассмотрим числа $k_i = 3^{2^i} \cdot 5^{2^{2026}-2^i}$ для всех i от 0 до 2025. Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Рассмотрим любые четыре из них: k_a, k_b, k_c и k_d. Предположим, что произведение $k_ak_b = 3^{2^a+2^b}5^{2^{2027}-2^a-2^b}$ делится на произведение $k_ck_d = 3^{2^c+2^d}5^{2^{2027}-2^c-2^d}$. Сравнивая степени вхождения тройки и пятёрки в эти произведения, получаем неравенства

$$2^a + 2^b \geqslant 2^c + 2^d \quad \text{и} \quad 2^{2027} - 2^a - 2^b \geqslant 2^{2027} - 2^c - 2^d.$$

Второе неравенство равносильно неравенству $2^a + 2^b \leqslant 2^c + 2^d$, следовательно $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$. Пусть m – наибольшее из чисел a, b, c, d, тогда часть последнего равенства, в которой присутствует m, не меньше $2^m + 1$, а другая часть – не больше $2^{m-1} + 2^{m-2} < 2^m$. Полученное противоречие показывает, что числа k_i удовлетворяют условию задачи.

9.8. На числовой прямой отметили n красных и n синих точек (все точки различные) так, что сумма координат красных точек равна сумме координат синих точек. Скажем, что отрезок $[a, b]$ лежит *строго внутри* отрезка $[c, d]$, если $c < a$ и $b < d$.

Докажите, что можно выбрать $2n$ отрезков так, что у каждого из них концы – отмеченные точки разного цвета, и ни один из выбранных отрезков не лежит строго внутри другого.

Решение. Покажем, что можно выбрать $2n$ отрезков с разноцветными концами, ни один из которых не лежит строго внутри другого.

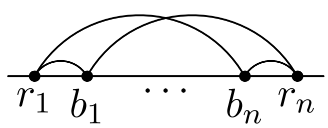


Рис. 1

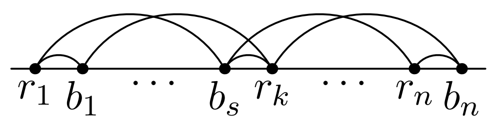


Рис. 2

Пусть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ – наборы координат красных и синих точек соответственно. Без нарушения общности будем считать, что самая левая из $2n$ точек покрашена в красный цвет, т. е. $r_1 < b_1$. Если и самая правая из точек имеет красный цвет, т. е. $b_n < r_n$, то выберем отрезки $[r_1, b_1]$, $[r_1, b_2]$, $\ldots$, $[r_1, b_n]$ и $[b_1, r_n]$, $[b_2, r_n]$, $\ldots$, $[b_n, r_n]$ (схематично выбранные отрезки изображены на рис. 1). Нетрудно видеть, что эти $2n$ отрезков удовлетворяют условию задачи.

Пусть $r_n < b_n$. Так как $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, то найдётся такой индекс k, что $b_k < r_k$. Пусть s – наибольший индекс такой, что $b_s < r_k$. Выберем отрезки четырёх видов:

$$
\begin{aligned}
&[r_1, b_1], [r_1, b_2], \ldots, [r_1, b_s];\\
&[b_1, r_k], [b_2, r_k], \ldots, [b_s, r_k];\\
&[b_s, r_{k+1}], [b_s, r_{k+2}], \ldots, [b_s, r_n];\\
&[r_k, b_n], [r_{k+1}, b_n], \ldots, [r_n, b_n];
\end{aligned}
$$

всего: $s + s + (n - k) + (n - k + 1) = 2(n + s - k) + 1 > 2n$ отрезков (схематично выбранные отрезки изображены на рис. 2). Нетрудно видеть, что они удовлетворяют условию задачи.

10.5. Про действительные числа m, v и k известно, что многочлен $x^4+mx^3+vx^2+kx-1$ имеет четыре различных корня x_1, x_2, x_3, x_4 таких, что числа $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{x_3}, \dfrac{1}{x_4}$ – тоже корни этого многочлена.

Найдите все возможные значения числа v.

Ответ: 0.

Первое решение. Зафиксируем число $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Так как числа x_i и $\dfrac{1}{x_i}$ – корни многочлена $p(x) = x^4 + mx^3 + vx^2 + kx - 1$, то $p(x_i) = 0$ и $x_i^4 \cdot p\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$. Складывая эти равенства, получаем равенство

$$0 = p(x_i) + x_i^4 \cdot p\left(\frac{1}{x_i}\right) = ((m+k)x_i^2 + 2vx_i + (m+k))x_i.$$

Следовательно, x_i – корень многочлена $(m+k)x^2 + 2vx + (m+k) = 0$. Таким образом, у этого многочлена степени не выше второй есть четыре различных корня x_1, x_2, x_3, x_4, что возможно только если он тождественно равен нулю, т.е. $m + k = 0$ и $v = 0$.

Второе решение. По теореме Виета произведение $x_1x_2x_3x_4 = -1$ отрицательно, значит, три из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 одного знака (обозначим их через $a < b < c$), а четвёртое – другого знака (обозначим его через d). Так как многочлен четвертой степени имеет не больше четырёх корней, то числа $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$ совпадают с числами $a < b < c$, а число $\dfrac{1}{d}$ – с числом d. Значит, числа b и d являются решениями уравнения $x^2 = 1$, т.е. совпадают с числами ± 1. Следовательно, многочлен $x^4+mx^3+vx^2+kx-1$ делится на многочлен x^2-1, т.е. верно равенство

$$x^4 + mx^3 + vx^2 + kx - 1 = (x^2-1)(px^2+qx+r),\ p, q, r \in \mathbb{R}.$$

Приравняв коэффициенты при x^4 и x^0, найдём $p = 1$ и $r = 1$. Значит,

$$x^4 + mx^3 + vx^2 + kx - 1 = (x^2-1)(x^2+qx+1) = x^4 + qx^3 - qx - 1,$$

откуда следуют равенства $k = -m$ и $v = 0$.

10.6. Натуральные числа a, b и c удовлетворяют равенствам

$$2a + b + ab + 1 = 3b + c + bc + 2 = 2c + 2a + ca + 3.$$

Докажите, что сумма $a + b + c + 1$ делится на 3.

Решение. Прибавим 1 к каждой из частей двойного равенства из условия задачи и разложим их на множители, получим равенства

$$(a + 1)(b + 2) = (b + 1)(c + 3) = (c + 2)(a + 2).$$

Введём обозначения $x = a + 1$, $y = b + 1$ и $z = c + 2$. Для новых переменных предыдущее равенство имеет вид

$$x(y + 1) = y(z + 1) = z(x + 1).$$

Так как числа y и $y + 1$ взаимно просты и $x(y + 1) = y(z + 1)$, число x делится на y. Аналогично, из равенства $y(z + 1) = z(x + 1)$ получаем, что y делится на z, а из равенства $z(x + 1) = x(y + 1)$ – что z делится на x. Получаем цепочку неравенств $x \geqslant y \geqslant z \geqslant x$, из которой следует, что числа x, y, z равны между собой.

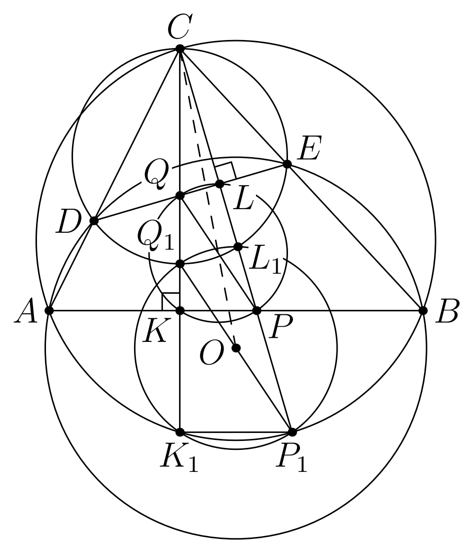
Сделаем обратную замену: $a = x-1$, $b = y-1 = x-1$, $c = z-2 = x-2$. Сумма $a + b + c + 1 = 3x - 3$ делится на 3, что и требовалось доказать.

10.7. Окружность с центром O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает его стороны AC и BC в точках D и E соответственно. На прямых AB и DE соответственно отметили такие точки P и Q, что $CP \perp DE$ и $CQ \perp AB$.

Докажите, что прямая CO делит отрезок PQ пополам.

Решение. В случае $DE \parallel AB$ четырёхугольник $ABED$ – равнобедренная трапециея, поэтому треугольник ABC равнобедренный и точки C, P, Q лежат на серединном перпендикуляре отрезка AB. Точка O тоже лежит на этом серединном перпендикуляре, поэтому в данном случае требуемое утверждение выполнено. Далее считаем, что $DE \nparallel AB$.

Положим $K = CQ \cap AB$ и $L = CP \cap DE$. Тогда $\angle PKQ = \angle PLQ = 90°$, поэтому четырёхугольник $PKQL$ вписан в окружность с диаметром PQ и центр этой окружности – середина отрезка PQ.



Пусть описанная окружность треугольника ABC пересекает прямые CP и CQ в точках P_1 и K_1 соответственно; описанная окружность треугольника CDE пересекает прямые CP и CQ в точках L_1 и Q_1 соответственно. Из вписанности четырёхугольника $ABED$ следует подобие $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. Так как прямые CQ и CP содержат высоты этих подобных треугольников, верно равенство $\angle ACQ = \angle BCP$. Откуда получаем подобия $\Delta CDQ \sim \Delta CBP$ и $\Delta CQ_1D \sim \Delta CP_1B$, значит верны равенства

$$\frac{CQ}{CP} = \frac{CD}{CB} = \frac{CQ_1}{CP_1}.$$

Следовательно, прямые QP и Q_1P_1 параллельны.

Из равенства $\angle ACQ = \angle BCP$ вытекает равенство дуг DQ_1 и L_1E описанной окружности треугольника CDE и равенство дуг AK_1 и P_1B описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, $DE \parallel Q_1L_1$ и $AB \parallel K_1P_1$. Значит, вписанные трапеции DQ_1L_1E и AK_1P_1B равнобедренные. Поэтому $\angle CL_1Q_1 = \angle CLQ = 90°$ и $\angle CK_1P_1 = \angle CKP = 90°$. Следовательно, четырёхугольник $P_1K_1Q_1L_1$ вписанный. Так как DQ_1L_1E и AK_1P_1B – равнобедренные трапеции, серединные перпендикуляры отрезков DE и Q_1L_1 совпадают и серединные перпендикуляры отрезков AB

и K_1P_1 совпадают. Поскольку O – центр описанной окружности четырёхугольника $ADEB$, она является точкой пересечения серединных перпендикуляров отрезков AB и DE. Значит, точка O лежит на не совпадающих серединных перпендикулярах отрезков Q_1L_1 и K_1P_1, поэтому O – центр описанной окружности четырёхугольника $P_1K_1Q_1L_1$ с диаметром P_1Q_1.

Наконец, из параллельности $QP \parallel Q_1P_1$ вытекает подобие треугольников CPQ и CP_1Q_1. Значит, прямая, проходящая через вершину L и середину O отрезка P_1Q_1, проходит и через середину отрезку PQ.

10.8. Найдите все бесконечные последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел такие, что для любых различных натуральных чисел m и n одно из чисел a_m, a_n или a_{m+n} равно сумме двух других.

Ответ: $a_n = kn$ для некоторого фиксированного натурального k.

Решение. Для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел верно ровно одно из следующих двух утверждения: либо существует число C такое, что для всех $n \geqslant C$ выполнено неравенство $a_n \geqslant a_1$, либо существует бесконечно много n таких, что $a_n < a_1$. Рассмотрим их как два отдельных случая.

Случай 1. Существует число C такое, что для всех $n \geqslant C$ выполнено неравенство $a_n \geqslant a_1$.

Для каждого $n \geqslant C$ справедливо неравенство $a_1 \leqslant a_n < a_n + a_{n+1}$, следовательно, a_1 не может быть равно сумме $a_n + a_{n+1}$, поэтому

$$|a_{n+1} - a_n| = a_1.$$

Предположим, что $a_n = a_{n+2}$ для некоторого $n > C$. Из равенств $|a_{n+1} - a_n| = a_1$ и $|a_{n+3} - a_{n+2}| = a_1$ получаем, что $a_{n+3} = a_{n+1}$ или $a_{n+3} = 2a_n - a_{n+1}$.

Если $a_{n+3} = a_{n+1}$, то, так как одно из чисел a_2, a_{n+1}, a_{n+3} равно сумме двух других, $a_2 = 2a_{n+1}$. Аналогично, из равенства $a_n = a_{n+2}$ следует равенство $a_2 = 2a_n$. Значит, $a_n = \frac{1}{2}a_2 = a_{n+1}$ и число

$$a_1 = |a_n - a_{n+1}| = 0$$

не является натуральным, что противоречит условию.

Таким образом, $a_{n+3} = 2a_n - a_{n+1}$. Рассмотрим числа a_{n-1} и a_{n+1}. По аналогии с предыдущим случаем получаем, что представляются возможными два варианта: $a_{n-1} = a_{n+1}$ и $a_{n-1} = 2a_n - a_{n+1}$, первый из которых приводит к противоречию. Следовательно,

$$a_{n-1} = 2a_n - a_{n+1} = a_{n+3}.$$

Рассмотрим число a_{2n+2}. С одной стороны, $(n-1) + (n+3) = 2n+2$, поэтому, так как $a_{n-1} = a_{n+3}$, то $a_{2n+2} = 2a_{n-1}$. С другой стороны, поскольку $n+(n+2) = 2n+2$ и $a_n = a_{n+2}$, то $a_{2n+2} = 2a_n$, откуда $a_n = a_{n+1}$, что приводит к противоречию $a_1 = |a_n - a_{n+1}| = 0$. Значит $a_n \neq a_{n+2}$ для всех $n > C$, следовательно, разности $a_n - a_{n+1}$ и $a_{n+1} - a_{n+2}$ либо обе положительны, либо обе отрицательны. Значит, $a_n - a_{n+1} = \pm a_1$ для всех $n > C$.

Так как для всех $n > C$ разность $|a_{n+1} - a_n| = a_1$ постоянна, верно равенство $a_{n+1} = a_n + c$ для некоторого целого числа $c = \pm a_1$. Если $c < 0$, то при любом $n > C$ и натуральном $\ell > \frac{a_n}{|c|}$ имеем $a_{n+\ell} = a_n + \ell c < 0$, что невозможно. Таким образом, $c > 0$, поэтому $c = a_1$.

Пусть $m > 1$ — некоторое натуральное число. Возьмём произвольное натуральное число n, такое, что $n - \lceil \frac{a_m}{a_1} \rceil > C$. тогда $a_n = a_{n-\lceil \frac{a_m}{a_1} \rceil} + \lceil \frac{a_m}{a_1} \rceil a_1 > \lceil \frac{a_m}{a_1} \rceil a_1 > a_m$. По доказанному выше, поскольку $n > C$,

$$a_{n+m} = a_n + ma_1 > a_n > a_m,$$

поэтому, так как по условию среди чисел a_n, a_m и a_{n+m} одно равно сумме двух других, то $a_{n+m} = a_n + a_m$, следовательно

$$a_n + ma_1 = a_{n+m} = a_n + a_m \implies a_m = ma_1,$$

откуда получим требуемый ответ. Несложно убедиться, что такая последовательность действительно подходит:

$$a_{n+m} = (n+m)a_1 = na_1 + ma_1 = a_n + a_m.$$

Случай 2. Существует бесконечно много n таких, что $a_n < a_1$.

Поскольку существует конечное количество чисел, меньших a_1, то по принципу Дирихле существует такое число $k < a_1$ и бесконечная последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$ натуральных чисел такая, что $a_{i_n} = k$ для всех натуральных n, при этом, если $a_t = k$, то $t = i_s$ для некоторого s . Выберем произвольное i_t. Поскольку $a_1 > a_{i_t}$, то число a_{i_t+1} может иметь одно из следующих двух значений: $a_{i_t+1} = a_1 - k$ или $a_{i_t+1} = a_1 + a_{i_t} = a_1 + k$.

Предположим, существуют такие индексы $m > \ell$, для которых $a_{i_m+1} = a_{i_\ell+1}$. Рассмотрим число $a_{i_m-i_\ell}$. С одной стороны, поскольку $a_{i_m} = a_{i_\ell}$, то $a_{i_m-i_\ell} = 2a_{i_m} = 2k$. С другой стороны, $a_{i_m+1} = a_{i_\ell+1}$ и $(i_\ell+1)+(i_m-i_\ell) = i_m + 1$, поэтому $a_{i_m-i_\ell} = 2a_{i_m+1}$. Отсюда получаем, что $a_{i_m+1} = a_{i_m} = k$, но тогда равенство $a_{i_m+1} = a_1 + k$ не может быть верным, а значит, предполагаемое возможно лишь при $a_{i_m+1} = a_1 - k$. Поэтому существует не больше одного такого индекса m, что $a_{i_m+1} = k+a_1$, следовательно, для всех натуральных $n > m$ выполнено равенство $a_{i_n+1} = a_1 - k$, поэтому эти числа равны между собой, а тогда, как было доказано ранее, $a_{i_n+1} = k$, поэтому $i_{n+1} = i_n + 1$ и $a_r = k$ для всех натуральных чисел $r \geqslant i_n$.

Однако данная ситуация невозможна, поскольку ни одно из чисел a_{i_n}, a_{i_n+1} и a_{2i_n+1} не может быть равно сумме двух других, так как они попарно равны между собой и отличны от 0. Таким образом, случай 2 невозможен.

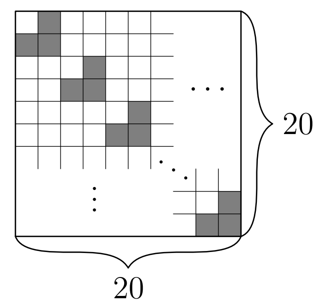
11.5. Ева выложила без пересечений на квадратную доску $n \times n$ уголки, состоящие из трёх клеток так, что их стороны совпали со сторонами клеток. Под *рядом* будем понимать любую строку или столбец. Может ли оказаться так, что в каждом ряду с нечётным номером уголками накрыта ровно одна клетка, а в ряду с чётным номером – ровно две клетки, если

а) $n = 20$; **б)** $n = 21$?

Ответ: а) да, б) нет.

Решение. а) Пример представлен справа на рисунке.

б) Каждый уголок накрывает ровно 3 клетки, следовательно количество накрытых клеток должно делиться на 3. В каждой строке с нечётным номером накрыта 1 клетка, а в каждой строке с чётным – 2. Следовательно на всей доске накрыта $11 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 31$ клетка. Поскольку 31 не делится на 3, так выложить уголки невозможно.



11.6. В ряд выписаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ такие, что $a_1 = 2$, а для каждого k от 2 до 2026 число a_k – это наименьшее натуральное число, удовлетворяющее следующим трём условиям:

- $a_k \neq a_{k-1}$;
- a_k не является полным квадратом;
- ни для какого натурального числа $i \in \{k-2, k-4, k-6, \ldots\}$ сумма $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_k$ не является полным квадратом.

Чему равно число a_{2026}?

Ответ: 3

Решение: Заметим, что число 1 является полным квадратом, откуда получаем, что все выписанные числа не меньше двойки. Докажем по индукции, что $a_{2n} = 3$ и $a_{2n+1} = 2$. База $n = 1$ имеет вид $a_2 = 3, a_3 = 2$. По условию $a_1 = 2$. Тогда $a_2 \geqslant 3$, поскольку $a_2 \geqslant 2$, $a_2 \neq a_1$. Значение $a_2 = 3$ удовлетворяет условию задачи. Как было сказано ранее, $a_3 \geqslant 2$ и значение $a_3 = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Допустим, предположение индукции выполняется для всех $n \leqslant k$. Покажем, что оно выполняется и для $n = k+1$. Поскольку $a_{2k+2} \neq a_{2k+1} = 2$, получаем $a_{2k+2} \geqslant 3$. Покажем, что значение $a_{2n+2} = 3$ удовлетворяет условию задачи. Первые два условия выполняются. Чтобы выполнялось третье условие, необходимо, чтобы любая сумма вида $3+2+\cdots+3+2+3$ не являлась полным квадратом. Значение этой суммы имеет вид $5\ell + 3$ для некоторого натурального числа ℓ, и, поскольку полные квадраты дают остатки 0, 1 и 4 при делении на 5, данная сумма не является полным квадратом.

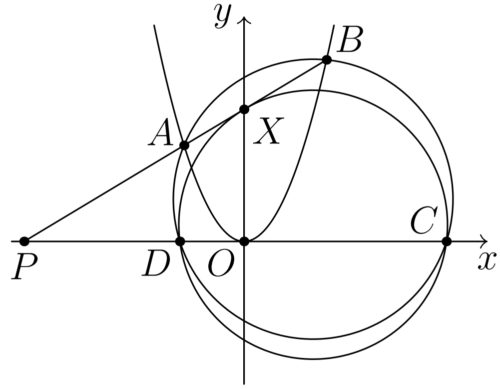
Покажем, что $a_{2k+3} = 2$. Так как $a_{2n+3} \geqslant 2$ и первые два условия выполняются для $a_{2k+3} = 2$, то достаточно проверить, что последовательность $2, 3, 2, \ldots, 2, 3, 2$ удовлетворяет третьему условию. Это верно, так как значение суммы $2+3+\cdots+2+3+2$ имеет вид $5\ell+2$ для некоторого натурального ℓ и не может являться полным квадратом.

Таким образом, находим, что $a_{2026} = 3$.

11.7. Окружность ω пересекает параболу $y = x^2$ в точках A и B, а ось абсцисс – в точках C и D. Отрезок AB пересекает ось ординат в точке X.

Докажите, что описанная окружность треугольника CDX касается прямой AB.

Решение. Если $AB \parallel Ox$, утверждение задачи очевидно из соображений симметрии. Пусть прямая AB пересекает ось Ox в точке P под углом α. Пусть координаты точек A, B и P равны $(a, a^2), (b, b^2)$ и $(p, 0)$ соответственно. Уравнение прямой AB имеет вид



$$y^2 = (a + b)x - ab.$$

Следовательно, $p = \frac{ab}{a+b}$ и верно равенство $p^2 = (a - p)(b - p)$, что влечёт цепочку равенств

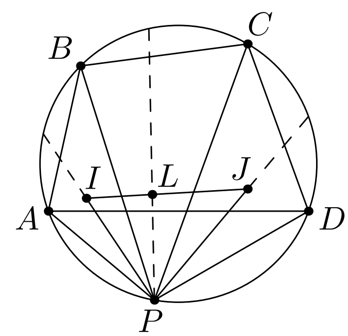
$$PX^2 = \frac{p^2}{\cos^2\alpha} = \frac{|a - p|}{\cos\alpha} \cdot \frac{|b - p|}{\cos\alpha} = PA \cdot PB.$$

По теореме о произведении длин отрезков секущих верно равенство $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Следовательно, поскольку $PX^2 = PC \cdot PD$, по обратной теореме о секущей и касательной, прямая PX касается описанной окружности треугольника CDX.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На её дуге AD, не содержащей точек B и C, выбирается произвольная точка P. Общие внутренние касательные ко вписанным окружностям треугольников PAB и PCD пересекаются в точке L.

Докажите, что все прямые PL проходят через некоторую фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

Решение. Пусть I и J – центры вписанных окружностей треугольников PAB и PCD, а r_I и r_J – их радиусы соответственно. Через Ω обозначим описанную окружность четырёхугольника $ABCD$. Заметим, что угол IPJ вписан в Ω так, что его стороны PI и PJ пересекают Ω в фиксированных точках X и Y – серединах дуг AB и CD. Если мы покажем, что отношение $\dfrac{\sin\angle IPL}{\sin\angle JPL}$ не зависит от выбора точки P, это будет означать, что все прямые PL проходят через фиксированную точку на Ω, делящую дугу XY в соответствущем отношении.



Из теорем синусов для треугольников PIL и PJL находим, что

$$\frac{\sin\angle IPL}{\sin\angle ILP}=\frac{IL}{PI}\qquad \frac{\sin\angle JPL}{\sin\angle PLJ}=\frac{JL}{PJ}.$$

Разделим полученные равенства друг на друга и сократим на равные синусы углов ILP и PLJ, получим равенство

$$\frac{\sin\angle IPL}{\sin\angle JPL}=\frac{IL}{PI}:\frac{JL}{PJ}.$$

Так как L – точка пересечения общих внутренних касательных к окружностям с центрами I и J и радиусами r_I и r_J, верно равенство $\dfrac{IL}{JL}=\dfrac{r_I}{r_J}$. Следовательно,

$$\frac{IL}{PI}:\frac{JL}{PJ}=\frac{r_I}{PI}:\frac{r_J}{PJ}=\frac{\sin\angle IPA}{\sin\angle JPD},$$

где последнее отношение не зависит от выбора точки P.